UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE EDUCACIÓN
Departamento de Didáctica y Organización Escolar

TESIS DOCTORAL

El álgebra en la enseñanza inclusiva de la matemática Braille: estrategias didácticas en el 3er. ciclo de la enseñanza básica en Portugal

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Miguel Pereira Damiao Vila-Verde

Director

José Antonio García Fernández

Madrid, 2016

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Departamento de Didáctica y Organización Escolar

TESIS DOCTORAL

EL ÁLGEBRA EN LA ENSEÑANZA INCLUSIVA DE LA MATEMÁTICA BRAILLE: ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS EN EL 3er. CICLO DE LA ENSEÑANZA BÁSICA EN PORTUGAL

PRESENTADA POR:

D. Tiago Miguel Pereira Damião Vila-Verde

Director:

Prof. Dr. D. José Antonio García Fernández

MADRID, 2015

SUMÁRIO

CAPÍTULO II - A GRAFIA MATEMÁTICA BRAILLE

CAPÍTULO III – ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

CAPÍTULO IV – O ENSINO DA ARITMÉTICA NO SISTEMA BRAILLE

CAPÍTULO VII – ESTRATÉGIAS DE ENSINO NO ESTUDO DE FUNÇÕES

7 – Unidade de ensino - FUNÇÕES

CAPÍTULO VIII – ESTRATÉGIAS DE ENSINO NO ESTUDO DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU A UMA INCÓGNITA

8 – Unidade de ensino – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU A UMA INCÓGNITA

CAPÍTULO IX – RESULTADOS

A ti, Gonçalo, pelos momentos que perdemos…

A ti, Filipa, pelos momentos que sofremos…

"*Algo só é impossível até que alguém duvide e acabe provando o contrário*"

Albert Einstein

"O impossível é só uma espécie de exagero para difícil"

Maya Al-Kadri

(Aluna cega)

Agradecimentos

Ao meu Diretor de tese, *Professor Doutor José Antonio García Fernández*, pelas sugestões, cordialidade e disponibilidade sempre demonstradas.

Ao Professor Doutor *Félix Sagredo Fernandez*, por todo o carinho, apoio, força e dedicação manifestada ao longo deste caminho, por quem tenho uma enorme admiração e estima;

Ao Professor Doutor *Carlos César Correia Gonçalves* que, já não se encontrando entre nós, esteve, está e estará sempre presente na minha vida, tendo sido o grande impulsionador, o verdadeiro amigo a que esta tese diz respeito;

Aos Professores Doutores, *Augusto Deodato Guerreiro* e *Artur Olímpio Ferreira Gonçalves da Silva* pela sua colaboração e disponibilidade;

Ao meu Filho, *Gonçalo*, o grande orgulho da minha vida, por ser aquele, que com a luz do seu olhar, me fez ver que nada é impossível;

À minha Esposa, *Filipa*, pelo incentivo, amor, força e alegria que me deu em todos os momentos, fossem eles fáceis ou difíceis;

Aos meus Pais, *Fernando* e *Nazaré*, por me terem proporcionado todo este percurso;

Aos Alunos, que participaram neste estudo, pela simpatia, colaboração e disponibilidade;

E, a todos aqueles que de uma forma direta ou indireta tiveram uma palavra a dizer.

RESUMO

"[As] *escolas devem reconhecer e satisfazer as necessidades dos seus alunos, adaptando-se aos vários estilos e ritmos de aprendizagem, de modo a garantir um bom nível de educação para todos, através de currículos adequados, de uma boa organização escolar, de estratégias pedagógicas, de utilização de recursos e de uma cooperação com as respetivas comunidades. É preciso, portanto um conjunto de apoios e de serviços para satisfazer o conjunto de necessidades especiais dentro da escola."*[1], contudo, "*[e]mbora os compromissos internacionais, assumidos pelos políticos, sejam muito importantes, eles não desencadeiam, por si só, práticas diferentes nas comunidades a que se dirigem*"[2] e, como comprovam diversos estudos, a formação inicial de professores não tem desenvolvido nos docentes a prática de estratégias inclusivas.

A presente investigação pretende criar alguns pontos de convergência entre a orientação das políticas educativas mundiais, a investigação realizada nesse âmbito e as práticas letivas atuais, uma vez que "*[o]s profissionais da educação defrontam-se na sua prática com inúmeros problemas. Em vez de aguardar por soluções vindas do exterior, muitos deles procuram investigá-los directamente.*"[3]

Acreditando que "*[é] possível ensinar para fazer aprender mesmo nas em situações difíceis, se acreditarmos que é possível e se utilizarmos os meios e os recursos necessários, [para os quais são necessários] criatividade, trabalho, saber e meios*

[1] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.* [Em linha]. Disponível em <http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_9.pdf>.

[2] *Revista Lusófona de Educação*, 2005, 5, pp. 127-142 "Compreender, Agir, Mudar, Incluir. Da investigação-acção à educação inclusiva".

[3] Ponte, J. P. (2008). *Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional*. PNA, 2(4), pp. 153-180.

para que o ensino seja verdadeiramente eficaz"[2], este trabalho de investigação tem como principais objetivos *delinear*, *aplicar* e *avaliar* estratégias inclusivas que permitam transmitir o conhecimento algébrico a todos os alunos de uma turma de ensino regular que inclui alunos cegos, de modo a responder à questão "*Que estratégias de ensino e recursos educativos serão necessários delinear e aplicar para que os alunos cegos consigam adquirir o conhecimento algébrico no 3.º Ciclo do Ensino Básico em Portugal do mesmo modo que os restantes elementos do grupo-turma?*".

Para o efeito, procurou-se, através do paradigma de investigação interpretativa, descritiva e qualitativa, segundo uma metodologia de investigação ação, assente num estudo de caso: a) conhecer as características, limitações e as dificuldades recorrentes da grafia Matemática Braille (GMB), as quais, embora possam não estar diretamente relacionadas com o estudo em causa, lhe estão subjacentes; b) identificar as maiores dificuldades manifestadas pelos alunos cegos na aprendizagem em Álgebra; e partir destas para c) delinear estratégias de organização e gestão da sala de aula para a inclusão de alunos cegos em atividades algébricas, utilizando os recursos pedagógicos existentes no contexto do estudo; bem como para d) avaliar o impacto da implementação de um vasto leque de atividades de caráter exploratório que possibilite ao aluno cego desenvolver o seu próprio raciocínio matemático, nomeadamente no que à Álgebra diz respeito, e assim evoluir no seu processo de ensino-aprendizagem. Assim, o presente estudo assentou na e) análise e reflexão de explorações, raciocínios e conclusões matemáticas evidenciadas por alunos cegos, no decorrer da sua aprendizagem, com recurso a estratégias de inclusão, no âmbito de diferentes tópicos da Álgebra (*Sequências e Regularidades; Funções; e Equações e Inequações do 1.º grau a uma Incógnita*), em contexto de sala de aula.

Apesar de toda a Literatura já desenvolvida neste domínio, os docentes têm de tomar opções diárias relativamente à prática letiva mais adequada a determinado contexto, pelo que, para dar cumprimento aos objetivos mencionados, se partiu de um modelo praxiológico e se procedeu, no âmbito do processo de ensino-aprendizagem do tópico *Sequências e Regularidades* a: a) para compreensão dos processos de raciocínio usados por alunos cegos na resolução de atividades de exploração com diferentes níveis de complexidade; e b) identificação das dificuldades manifestadas por alunos cegos na resolução de atividades de exploração que envolvam a representação e a generalização, no âmbito da aprendizagem dos conteúdos inerentes ao tópico. Já no âmbito do processo de ensino-aprendizagem do tópico *Funções*, procedeu-se a: a) verificação do processo de aquisição do conceito de função por parte de alunos cegos; b) análise dos processos de raciocínio usados por alunos cegos na resolução de atividades de exploração; c) identificação das dificuldades manifestadas por alunos cegos na resolução de atividades de exploração que envolvam a representação, a generalização e a conversão de diferentes tipos de uma representação de uma função. Finalmente, no âmbito do processo de ensino-aprendizagem do tópico *Equações e Inequações do 1.º grau a uma Incógnita,* procedeu-se a: a) verificação do processo de aquisição do conceito de equação por parte de alunos cegos; b) análise das representações e dos processos de significação desenvolvidos por alunos cegos na resolução de atividades de exploração; c) identificação das dificuldades manifestadas por alunos cegos na resolução de atividades que envolvam a resolução de problemas. Salienta-se que todos os procedimentos desenvolvidos aquando do trabalho de campo visaram uma ação que implicasse mudanças nas práticas pedagógicas atuais, pelo que foi necessário proceder-se à constante aferição do impacto das atividades de exploração propostas na aquisição e aplicação de conceitos e procedimentos, nos diferentes tópicos do domínio da Álgebra por parte de alunos cegos, o que se fez com recurso a entrevistas, aulas de apoio individualizado, acompanhamento dos alunos em sala de aula e atividades de avaliação, nomeadamente minitestes e testes de avaliação, sendo que para a presente investigação se revelou mais pertinente a apresentação dos minitestes, por avaliar, isoladamente, as capacidades trabalhadas com os alunos.

Neste estudo, o qual se prolongou por um período de três anos letivos, correspondentes ao 3.º Ciclo do Ensino Básico (7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade), participou uma turma do ensino regular composta por vinte alunos, treze do sexo masculino e sete do sexo feminino, com idades, no início do estudo, compreendidas entre os doze e quinze anos. De entre esses vinte alunos, cinco encontravam-se ao abrigo do Decreto-lei 3/2008, de 7 de Janeiro, tendo Necessidades Educativas Especiais de caráter permanente, sendo que três deles eram alunos cegos. A investigação incidiu no *estudo de caso* relativo a estratégias e práticas de inclusão adotadas para o ensino da Álgebra, na disciplina de Matemática, a três alunos cegos, dois do sexo masculino e um do sexo feminino, dois dos quais apresentavam, como única especificidade clínica, a cegueira, e o terceiro algumas limitações do ponto de vista cognitivo.

Tendo em conta que o investigador é, também, agente ativo no estudo, docente de Matemática da turma, e que este trabalho partiu, precisamente, da reflexão inerente à necessidade de desenvolver práticas que promovessem o sucesso de todos os alunos, optou-se por uma metodologia de investigação interpretativa, descritiva e qualitativa, tendo-se elegido o modelo de *investigação-ação*.

Assim, e após uma reflexão sobre as influências restritivas dos fatores institucionais, sistémicos e sociais sobre a liberdade dos professores para promoverem valores educativos nas escolas, assente na necessidade de promover estratégias adequadas, o trabalho que se apresenta consiste na identificação de situações problemáticas a partir de uma observação naturalista e descritiva, na formulação descritiva de hipóteses, isto é, de estratégias que as pudessem solucionar, e no desenvolvimento e avaliação indutiva das estratégias de ação, resultados que foram constituindo e poderão continuar a constituir pontos de partida para a formulação de novas hipóteses.

Os resultados obtidos revelaram que os alunos cegos, no estudo do tema *Sequências e Regularidades*, quando confrontados com estratégias adequadas às suas necessidades, neste caso concreto, com adequação dos enunciados propostos, através, nomeadamente, da seleção de enunciados apreensíveis, da sua codificação, da sua descrição, e da sua apresentação em suporte adequado - relevos, desenvolvem, à semelhança dos alunos sem Necessidades Educativas Especiais da mesma turma, processos de raciocínio adequados às atividades a desenvolver, manifestando dificuldades similares às dos restantes elementos da turma à medida que os conteúdos se foram complexificando, sendo estas, contudo, agravadas quando se trata de atividades assentes em sequências pictóricas de qualquer género, no estabelecimento de relações entre os conteúdos e na verbalização dos processos de raciocínio utilizados. Inesperadamente, constatou-se que estes alunos revelam maiores facilidades que os restantes quando confrontados com atividades de cariz mais abstrato, embora denotem particulares dificuldades na conversão do concreto para o abstrato.

No estudo do tema *Funções*, os resultados obtidos demonstraram que, apesar de não ter sido possível colmatar todas as lacunas evidenciadas pelos alunos, nomeadamente as respeitantes a hábitos enraizados de memorização de procedimentos, às dificuldades de abstração e à ausência de hábitos de trabalho tátil, as tarefas propostas, através da utilização de estratégias de definição criadas pelo autor, do uso de materiais de trabalho em relevo e do trabalho colaborativo de pares contribuíram para as minimizar. No primeiro caso, o docente facultou aos alunos o acesso a procedimentos estruturantes, um meio ao qual recorrem e que lhes é familiar e fácil, através do recurso a uma definição concreta, procurando usar uma limitação dos alunos ao serviço da sua aprendizagem; no segundo caso proporcionou aos alunos novo contacto e manipulação de materiais táteis que, como verificado, é fundamental no estudo da Matemática; finalmente o docente proporcionou aos alunos a possibilidade de, organizados em pequenos grupos, desenvolverem interações aluno-aluno, permitindo que todos os alunos se confrontem com diferentes perspetivas e criando condições, não apenas para o desenvolvimento cognitivo mas também de competências sociais.

Relativamente ao estudo das Equações e Inequações do 1.º grau a uma incógnita, os resultados obtidos demonstram que esta é uma área da Matemática que não ofereceria particulares dificuldades aos alunos cegos, caso, no seu processo de ensino-aprendizagem, houvesse uma efetiva articulação entre docentes, técnicos e alunos. Através da análise das explorações desenvolvidas pelos alunos, verificou-se que é possível atenuar as dificuldades inerentes à aquisição dos conceitos de *equação* e *inequação* por parte dos alunos através do recurso a materiais didáticos adaptados que concretizem o abstrato. Verificou-se, ainda, que como desejado, as aulas de apoio individualizado, lecionadas em paralelo com as aulas de Matemática, contribuíram para que os alunos recorressem a uma abordagem algébrica no âmbito de situações problemáticas e que aplicassem corretamente as regras de resolução de equações, seguindo o ritmo de aprendizagem dos restantes colegas do grupo-turma. Finalmente, apurou-se que as principais dificuldades sentidas neste âmbito se encontravam, possivelmente, relacionadas com problemáticas externas ao ensino do tópico em si, isto é, em ausência de pré-requisitos necessários ao desenvolvimento das tarefas e em dificuldades de compreensão e interpretação de enunciados, fatores que só seriam passíveis de apuramento em situação de articulação com outros elementos da comunidade escolar.

Conclui-se assim que é possível colmatar alguns dos obstáculos inerentes à aquisição e operacionalização de conceitos matemáticos no âmbito da Álgebra por parte de alunos cegos, levando-os a progredir no seu processo de ensino-aprendizagem a um ritmo semelhante ao dos restantes alunos do grupo-turma, com recurso a práticas letivas inclusivas adequadas, utilizando os recursos pedagógicos existentes, sem recorrer a limitações no currículo. Para o efeito, é fundamental que os docentes que ensinam alunos cegos conheçam a grafia matemática braille e as dificuldades com que os alunos cegos se deparam na sua aplicação à Matemática, necessidade que se pretende responder, ainda que parcialmente, com o presente trabalho; é também necessário que reconheçam que, apesar das limitações inerentes à cegueira, existem diversas outras limitações próprias da individualidade de cada aluno, conforme ilustra a análise efetuada às evidências do presente estudo; finalmente, é fundamental que os docentes desenvolvam estratégias específicas para atenuar estas condicionantes e, sempre que possível, colmatá-las, fazendo todos os alunos progredir no seu processo de ensino-aprendizagem o mais possível, efeito para o qual esta investigação pretende contribuir, facultando caminhos e conselhos de atuação suficientemente gerais para poderem ser adotados e adaptados por qualquer docente de Matemática confrontado com alunos cegos.

Na verdade, cabe ao sistema educativo garantir não só o acesso de todos os alunos à escola, mas também a sua participação e o seu sucesso e, como afirmam Madureira e Leite[4], a condição essencial para criar situações de aprendizagem diferenciadas que garantam a todos os alunos condições de participação e de sucesso é que o

[4] Madureira, I.; Leite, T. (2003). *Necessidades Educativas Especiais*. Lisboa, Universidade Aberta.

professor deixe de preparar e orientar aulas para o aluno-padrão imaginário e que promova estratégias de ensino e atividades para os alunos que efetivamente é da sua responsabilidade ensinar.

RESUMEN

"Las Escuelas deben de reconocer y satisfacer las necesidades de sus alumnos, adaptándose a los varios estilos y ritmos de aprendizaje, con el fin de garantizar un buen nivel en la educación, para todos a través de curricula adecuados, de una buena organización escolar, de estrategias pedagógicas, de utilización de recursos y de una cooperación con las respectivas comunidades. Son precisos, por tanto, un conjunto de apoyos y de servcios para satisfacer ese conjunto de necesidades especiales dentrto de la Escuela", "con todo ello y aunque, sin embargo, los compromisos internacionales, asumidos por los políticos, sean muy importantes, éstos no desencadenan, por sí solos, prácticas diferentes en las comunidades a las que van dirigidos" y, como comprueban diversos estudios, la formación inicial de los profesores no ha desarrollado en los docentes la práctica de estrategias inclusivas.

La investigación presente pretende elaborar algunos puntos de convergencia entre la orientación der las políticas educativas mundiales, la investigación realizada en ese ámbito y las prácticas lectivas actuales, dado que *"Los profesionales de la educación se enfrentan en la práctica con innumerables problemas. En vez de aguardar soluciones venidas del exterior, muchos de ellos procuran investigarlos directamente".*

Afirmamos que es posible enseñar en las circunstancias más difíciles, si utilizamos los medios y los recursos necesarios, y para ello es imprescindible la creatividad, trabajo, y conocer los medios, para que la enseñanza sea realmente eficaz. El presente trabajo de investigación, tiene como motivos principales diseñar, aplicar y evaluar estrategias inclusivas que permitan transmitir el conocimiento algebraico a todos los alumnos de una sección de enseñanza regular, que incluye a los alumnos

invidentes, de tal modo que puedan responder a la cuestión: ¿Qué estrategias de enseñanza y qué recursos educativos será necesario diseñar y aplicar para que estos alumnos logren adquirir el conocimiento algebraico en el 3er, Ciclo de la Enseñanza Básica en Portugal, de modo semejante a como lo hacen los restantes del grupo?

Para ello se ha procurado, a través del paradigma de investigación interpretativa, descriptiva y cualitativa, según una metodología de investigación-acción, basándose en un estudio de caso:
a) conocer las características, limitaciones y las dificultades consecuentes de la grafía Matemática Braille (GMB), las cuales, aunque puedan no estar directamente relacionadas con el estudio en cuestión, subyacen bajo él;
b) identificar las dificultdes mayores que tienen los alumnos invidentes en el aprendizaje del Álgebra, partir de esto mismo.
c) diseñar estrategias de organización y gestión del aula para la inclusión de alumnos invidentes en actividades algebraicas, utiizando los recursos pedagógicos existentes en el contexto del presente estudio; así como:
d) Evaluar el impacto de la aplicación de un amplio campo de actividades de carácter exploratorio, que posibiliten a dichos alumnos desarrollar su propio raciocinio matemático, especialmente en el ámbito del álgebra y así evolucionar en su proceso de enseñanza-aprendizaje. De este modo el presente trabajo se basa en
e) el análisis y reflexión de exploraciones, raciocinios y conclusiones matemáticas evidentes para los estos alumnos, en el transcurso de su aprendizaje, con recursos y estrategias de inclusión, en el campo de los diferentes aspectos singulares del Álgebra (Secuencias y Regularidades; Funciones: Ecuaciones e Inecuaciones de 1er. Grado con una incógnita) en el contexto de la clase.

A pesar de toda la Literatura desarrollada ya en este campo, los docentes deben de adoptar opciones diarias relativas a la práctica más adecuada a determinado contesto, por lo que, para dar cumplimiento a los mencionados objetivos, partimos de um modelo praxiológoco, procediendo, en el ámbito del proceso enseñanza-aprendizaje del tópico Sequências y Regularidades a: a) análisis de los procesos de raciocinio utilizados por alumnos ciegos en la resolución de actividades de exploración con diferentes niveles de complejidad b) identificación de las dificultades manifestadas por alumnos ciegos en la resolución de actividades de exploración que impliquen la repreentación y la generalización, del aprendizaje de contenido inherentes al tema *Funciones*, precedida de: a) verificación del proceso de adquisición del concepto de función por parte de los alumnos invidentes; b) análisis de los procesos de raciocinio, utilizados por los alumnos invidentes en la resolución de actividades de exploración; c) identificación de las dificultades manifestadas por estos alumnos en la resolución de las actividades de exploración que incluyan la representación, la generalización y la conversión de los diferentes tipos de representación de una función. Finalmente, en el ámbito del proceso de enseñanza-aprendizaje del tema Ecuaciones e Inecuaciones de 1er. Grado, se procedió a: a) verificación del proceso de adquisición del concepto de ecuación por parte del alumno invidente; b) análisis de las representaciones y de los procesos de significación desarrollados por alumnos invidentes en la resolución de actividades de exploración; c) identificación de las dificultades manifestadas por alumnos invidentes en la resolución de actividades que impliquen la resolución de problemas. Destacamos que todos los procedimientos desarrollados referentes al trabajo de campo, tendrán por objetivo una actuación que implique cambios en las prácticas pedagógicas actuales, por lo que se presenta como necesario proceder a una constante actualización del impacto de dichas actividades de exploración propuestas en la adquisición y aplicación de coneptos y procedimientos, en los diferentes temas del campo del álgebra, por parte de los alumnos invidentes, lo que se realiza con recurso a las entrevistas, a los apoyos individualizados, a el seguimiento de los estudiantes en el aula, las actividades de evaluación, especialmente microtest o tests de evaluación, dado que para la presente investigación se manifestó más pertinente la presentación de minitests, para evaluar, aisladamente, las capacidades desarrolladas por los alumnos.

En el presente estudio, que se prolongó durante res años lectivos, correspondientes al 3er. Ciclo de Enseñanza Básica (7º, 8º, y 9º Cursos de Escolaridad), participó unturno de enseñanza regular compuesta de veinte alumnos, trece de seco masculoinos y siete del femenino, con edades, al inicio del estudio, comprendidas entre los 12 y 15 años. De entre esos veinte alumnos, cinco se encontraban bajo el amparo del Decreto-Ley 3/2008, de 7 de enero, con Necesidades Educativas Especiales de carácter permanente, dado que 3 de ellos eran alumnos invidentes. La investigación incidió en un estudio de caso relativo a las estrategias y práctivcas de inclusión adoptadas para la enseñanza del Algebra, en la asignatura de Matemáticas, a tres invidentes, dos de sexo masculino y uno de sexo femenino dos de los cuales presentaban como especificación clínica la ceguera, y el tercero alguns limitaciones dese el punto de vista cognitivo.

De este modo y después de una reflexión sobre las influencia restrictivas de los factores institucionales, sistémicos y sociales, sobre la libertad de los profesores para promover valores educativos en las escuelas, dada la necesidad de promover las estratregias adecuadas, el trabajo que se presenta consiste en la identificación de situaciones problemáticas, a partir de una observación natural y descriptiva, y en la formulación desciptiva de hipótesis, es decir, de estrategias que las pudiesen solucionar, y en el desarrollo y evaluación inductiva de las estrategias de acción, resultados que fueran constituyendo y pudieran continuar, para constituir puntos de partida para la formulación de nuevas hipótesis.

Los resultados obtenidos revelaron que los alumnos invidentes, en el estudio del tema Sequencias y Regularidades, cuando son confrontados con estrategias adecuadas a sus necesidades, en este caso concreto, con adecuación de los enunciados propuestos, a través y especialmente, de la selección de enunciados comprensibles, de su codificación, de su descripción y de su presentación en soporte adecuado reveladores de que dichois alumnos se desenvuelven sin Necesidades Educativas Especiales del mismo grupo, procesos de raciocinio adecuados a las actividades a desarrollar, manifestan dificultades parecidas a las de los restantes elementos del grupo, a medida de que los contenidos van siendo más complejos, éstas, sobretodo, agravadas cuando se trata de actividades consistentes en secuencias pictóricas de cualquier género, en el establecimiento de relaciones entre los contenidos y la verbalización de los procesos de raciocinio utilizados. Sorpresivamente, se constató que dichos alumnos demostraron mayores facilidades que los restantes, cuando eran confrontados con las actividades de cariz más abstracto, aunque denotaran paticulares dificultades en la elevación de lo concreto a lo abstracto.

En el estudio del tema *Funciones*, los resultdos obtenidos demostraron que, a pesar de no haber sido posible colmar todas las lagunas evidenciadas por los alumnos, especialmente las que respectan a hábitos enraizados de memorización de los procedimientos, las dificultades de abstracción y la ausencia de hábitos de trabajo táctil, las tareas propuestas, a través de la utilización de estrategias de definición creadas por el autor, del uso de materiales de trabajo en relevo y de trabajo colaborativo de pares, contribuirán para minimizarlas. En el primer caso , el docente facultó a los alumnos el acceso a procedimientos estructurantes, un medio al que recurren y que les es familoiar y fácil, a través del recurso a una definición concreta, procurando utilizar una limitación de los alumnos con respecto a su aprendizaje. en el segundo caso se proporcionó a los alumnos un nuevo contacto y manejo de las materias que, como se ha demostrado, son fundamentales en el estudio de la Matemática; y finalmente el docente proporcionó a los alumnos la posibilidad de que, organizados en pequeños grupos, desarrollaran interacciones alumno-alumno , que permitieran que todos los alumnos se enfrenten a diferentes perspectivas y creen condiciones, no sólo para el desarrollo cognitivo, sino que también de competencias sociales.

En lo relativo al estudio de las Ecuaciones e Inecuaciones de 1er. Grado con una incógnita, los resultados obternidos demostraron que esta es una área de la Matemática que no ofrecería dificaltades particulares a los alumnos invidentes, dado el caso de que en su proceso de enseñanza-aprendizaje, tuvieren una efectiva articulación entre docentes, técnicos y alumnos. A través del análisis de las exploraciones desarrolladas por los alumnos, se demostró que es posible atenuar las dificultades inherentes a la adquisición de conceptos de ecuación e inecuación por parte de los alumnos, mediante el recurso a materiales didácticos adaptados que concreticen lo abstracto. Se verificó, incluso, que como era esperado, las aulas de apoyo individualizado, impartidas en paralelo con las de Matemática, contribuían a que los alumnos recurrieran a un tratamiento algebraico en el ámbito de situaciones problemáticas y que aplicasen corectamente las reglas de resolución de ecuaciones, siguiendo el ritmo de aprendizaje de los restantes colegas del grupo. Finalmente se consiguió que las principales dificultades experimentadas en este campo se encontraban, posiblemente, relacionadas con problemáticas externas a la enseñanza del tema en sí, es decir, en ausencia de prerrequisitos necesarios al desarrollo de las tareas y en dificultades de conprensión e interpretación de enunciados, factores que sólo eran posibles de concreción en situación de su articulación con otros miembros de la comunidad escolar.

Se concluye de este modo que es posible obviar algunos obstáculos inherentes a la adquisicióp n y operalización de conceptos matemáticos en el ambito del Algebra por parte de los invidentes, conduciéndoles a un progreso en su proceso de enseñanza-aprendizje a ritmo semejante al de los restantes alumnos del grupo, con el recurso a prácticas lectivas inclusivas adecuadas, utilizando los recursos pedagógicos existentes, sin recurrir a limitaciones en el curriculo. A tal efecto es fundamental que los decentes que enseñan a alumnos invidentes, conozcan la grafia matemática Braille y las dificulatades con que dichos alumnos se enfrentan en su aplicación a la Matemática, necesidad a la que se preternde responder aunque parcialmente con el presente trabajo. Es también necesaario que reconozcan que, a pesar de las limitaciones inherentes a la ceguera, existen otras diversas limitaciones propias de la individualidad de cada alumno, finalmente, como demuestra el análisis efectuado en el presente estudio, es por tanto fundamental que los docentes desarrollen estrategias específicas para disminuir estos condicionantes y, siempre que sea posible , completarlos haciendo progresar a todos los alumnos en su proceso de enseñanza-aprendizaje, lo más posible al efecto, a lo cual esta investigación pretende contribuir, facilitando caminos y consejos de actuación suficientemente generales para que puedan ser adoptados y adaptados por cualquier docente de Matemáticas que se enfrente con alumnos inviderntes.

Realmente, corresponde al sistrema educativo garantizar no sólo el acceso de todos los alumnos a la escuerla, sino también su participación y su éxito, y, como afirman Madureira y Leite, condición esencial para crear situaciones de aprendizaje diferenciadas que garanticen a todos los alumnos condiciones de participación y de éxito, es que el profesor deje de preparar y orientar clases para un modelo de alumno imaginario, y que promueva estrategias de enseñánza y actividades para los alumnos o los que efectivamente debe de formar.

ABSTRACT

“The schools should recognize and satisfy the needs of their students, adapting themselves to the various styles and rhythms of learning, with the goal to guarantee a good level in the education for all, through an adequate curricula, of a good school organization, pedagogic strategies, of the use of resources, and of cooperation with their respective communities. Is necessary, therefore, a set of supports and services in order to satisfy that set of special needs in the school” “with that all, and although, nevertheless the international commitments, made by the politicians, are very important, those do not unleash, by themselves, practices different in the communities to which they are directed“ and, as several studies prove, the starting training of the professors has not developed in the teachers the practice of inclusive strategies.

The present research pretends to elaborate some points of convergence among the orientation of the world´s educative policy, the research done in this ambit and the actual teaching practices, given that “the education professionals are faced in practice with numerous problems. Instead of waiting for solutions coming from the outside, many of them try to research them directly”.

We assert that it is possible to teach in the most difficult circumstances, if we use the means and resources necessary, and for that is essential the creativity, the work, and to get to know the means, so that the teaching is really effective. This research study has as the main goal to design, apply and evaluate inclusive strategies that will allow to pass down the algebraic knowledge to all the students of a section of regular teaching, that include sightless students, so as they could answer to the question : ¿what learning strategies and what educational resources will be needed in order to

design and apply, so that those students could obtain the knowledge in the 3rd cycle of the basic school teaching in Portugal, on similar ways as there is made by the rest of the group?

For that we have tried, through a research-action process: a) to know the limitations and the difficulties of the Braille Mathematics spelling (GMB), which, even though they are not directly related with such a study, underlay under it; b) to identify the major difficulties that the sightless students have in the learning of algebra, starting from that itself; c) to design strategies of organization and management of the classroom for the incorporation of sightless students in algebraic activities, using the existing pedagogic resources in the context of existing pedagogic resources; so as: d) to expose a wide field of activities of exploratory character that allow such students to develop their own mathematical reasoning, specially in the algebraic scope and so to evolve in their process of teaching-learning. That way the present job is based in; e) the analysis and reflection of explorations, reasoning's and mathematical conclusions obvious for those students, on the process of their learning, with resources and strategies of inclusion, in the field of the different singular aspects of Algebra (Sequences and Regularities; Functions; Equations and Inequations of 1rst. degree with an Unknown) in the context of the class.

Despite of all the literature already developed in this field, the teachers should adopt daily options relative to the more appropriate practices to a determined context, so that, to comply to the mentioned objectives, we depart from a praxiological model, proceeding, in the scope of the teaching-learning process of the topic Sequences and Regularities to an: a)analysis of the reasoning processes used for unsighted students in the resolution of activities of exploration with different levels of complexity; b) identification of the difficulties expressed by unsighted students in the resolution of exploration of activities that imply the representation and the generalization, and of the learning of contents inherent to the subject.

Functions, preceded of: a) verification of the process of acquisition of the concept of function by part of the unsighted students; b) analysis of the reasoning processes, used by the unsighted students in the resolution of exploration activities; c) identification of the difficulties expressed by those students in the solution of the exploration activities, that include the representation, the generalization and the conversion of the different types of representation of a function. Finally, in the scope of the teaching-learning process the topic Equations and Inequations of 1rst grade, it was proceeded to: a) verification of the process of acquisition by the unsighted student; b) analysis of the representations and the process of signification developed by unsighted students in the resolution of exploration activities; c) identification of the difficulties manifested by unsighted students in the resolution of activities that imply the solving of problems. We highlight that all the procedures developed to field work, will have by goal an actuation that implies changes in the actual pedagogic practices, by which is presented as a necessity to procedure for a constant actualization of the impact of such activities of exploration in the application and acquisition of concepts and procedures in the different topics in the field of algebra, by part of the unsighted students, which is done using the activities of evaluation, specially micro test or evaluation tests, due to the fact that in the present research it was shown more appropriate the presentation of minitests, to evaluate, isolated, the capacities developed by the students.

In the present study, that lasted three schooldays years corresponding to the 3rd cycle of Basic Learning (7th, 8th and 9th courses of school) participated a shift of regular teaching made of twenty students, thirteen of them were males and seven females, with ages, at the beginning of the study, ranging from 12 to 15 years. Among those twenty students, five of them were to be under the Decreto-Ley (law) 3/2008 of January 7th, with special Educational Needs of a permanent type, given that three of them were unsighted students. The research got on a case study relative to the strategies and practices of inclusion adopted for the teaching of Algebra, in the course of mathematics, to three unsighted students, two of them male and one female, two of them had as disease clinic blindness, and the third some limitations from the point of view cognitive.

That way, and after a reflection about the restrictive influences of the institutional factors, systemic and social, related to the freedom of the professors to promote educational values in the schools, given the need to promote the suitable strategies, the study that is presented consists in the identification of problematic situations, departing from a natural and disruptive observation, and in the descriptive formulation of hypothesis, is to say, of strategies that could solve them, and in the inductive development and evaluation of the strategies of action, results that were constituted and could continue, to establish points of departure for the formulation of new hypothesis.

The results obtained revealed that the unsighted students in the study of the subject Sequences and Regularities, when they are confronted with adequate strategies to their needs, in this concrete situation, with adequacy to the statements proposed, through and specially, to the choosing of comprehensive statements, of its codification, of its description and of its presentation in adequate support, revealed that such students develop themselves without Special Educational Needs of the same group, processes of suitable reasoning to the activities to be developed, manifest similar difficulties to those of the rest of the elements of the group, as the contents become more complex, those, above all, compounded when it comes to activities consisting in pictorial sequences of any kind, in the establishment of relations between the contents and the verbalization of the processes of reasoning used. Surprisingly, it was confirmed that such students did show more adapted that the rest, when confronted with the activities of a more abstract type, even though if they showed particular difficulties in the elevation of the concrete to the abstract.

In the study of the topic “Funciones”, the results obtained demonstrate that, despite of not have been possible to fill up all the gaps exposed by the students, especially the ones related to the habits rooted of the memorization of the procedures, the difficulties of abstraction and the absence of tactile working habits, the proposed tasks, through the use of strategies of definition created by the author, the use of working materials in the take over and of collaborative work of peers, will contribute to minimize them. In the first case, the teacher empowered the students with the access to structuring procedures, a means to which they resort, and that is familiar to them and easy, through the resort of a concrete definition, procuring to use a limitation of the students with respect to their learning. In the second case it was provided to the students a new contact and usage of the materials that, as it has been demonstrated, are fundamental in the study of mathematics; and finally the teacher provided to the students the possibility that, organized in small groups, would develop interactions student to student, that could allow that all the students were confronted to different perspectives and create conditions, not only for the cognitive development, but also of social competences.

In what it relates to the Equations and Inequations of 1rst degree with an unknown, the results obtained showed that this is an area of mathematics that would not offer special difficulties to the unsighted students, given the case that the process of learning-teaching had an effective linkage among teachers, technical professionals and students. Through the analysis of the explorations developed by the students, it was shown that is possible to weaken the difficulties inherent to the acquisition of concepts of equations and inequations by the students, by means of the resource to didactic materials adapted that concretize the abstract. Actually it was found, that, as it was expected, the classrooms of individualized support, taught in parallel with those of mathematics, contribute so that the students resorted to an algebraic treatment in the scope of problematic situations, and that they apply correctly the rules for solving the equations, following the rhythm of learning of the rest of their group colleagues. Finally it was attain that the main difficulties experimented in this field were founded, possibly, related with external problematic to the teaching of the topic per se, is to say, in absence of necessary prerequisites for the development of the tasks and of difficulties of understanding and interpreting the statements, factors that were only possible of concretion in situation of its linkage with other members of the educational community.

That way is concluded, that is possible to avoid some obstacles inherent to the acquisition and operationalization of mathematical concepts in the scope of algebra by the unsighted, driving them to a progress in their process of teaching-learning on a rhythm like the one of the rest of students from the group, with the resort to the adequate inclusive teaching practices, using the existing pedagogic resources, without resorting to limitations in the curricula. For such purpose it is fundamental for the teachers that they teach to unsighted students, get to know the spelling of the Braille mathematics and the difficulties by which such students are confronted in their application of mathematics, need to which we pretend to answer, although partially, with the present study. It is also necessary that is recognized that, despite the limitations inherent to unsightnes, there are other diverse limitations, proper of the individuality of each student; finally, as it is shown in the analysis done in the present study, it is for that fundamental that the teachers develop specific strategies in order to decrease those conditions that cause it and, always when if possible to complete them, making all the students to progress in their process of teaching-learning, as much as possible to this effect, to which this investigation pretends to contribute, facilitating paths and advices for acting generic enough, so that they could be adopted and adapted by any teacher of mathematics that is confronted with unsighted students.

Really it corresponds to the educational system to warranty not only its access to all students to the school, but also its participation and success, and, as it is stated by Madureira and Leite, is an essential condition to create differentiated situations of learning that warranty to all the students conditions of participation and success, that the professor stops preparing and guiding courses for a student model that is not real, and that it promotes strategies of learning and activities for the students to which it should really prepare.

Chave de siglas

A

ACAPO - Associação dos Cegos e Amblíopes de Portugal

AV – Acuidade Visual

APA – Apoio Pedagógico Acrescido

B

BRAILLE - Sistema de leitura (tátil) e escrita especialmente bem adaptado a pessoas deficientes visuais.

BV – Baixa visão

BIE - Bureau International d'Éducation

C

CIF-CJ – Classificação Internacional de Funcionalidade - Crianças e Jovens

CRTIC - Centros de Recursos TIC para a Educação Especial

CBL - Calculadora gráfica ligada a um sensor.

D

DEEB - Divisão do Ensino Especial do Ensino Básico

DEES - Divisão do Ensino Especial do Ensino Secundário

DGIDC – Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

DL - Decreto-Lei

E

EE – Encarregado de Educação

G

GMB - Grafia Matemática Braille

I

IPSS - Instituição Particular de Solidariedade Social

IOGP – Instituto de Oftalmologia Dr. Gama Pinto

L

LPPC - Liga Portuguesa da Profilaxia da Cegueira

M

MEC – Ministério da Educação e Ciência

M.M.C – Mínimo múltiplo comum

N

NCTM – National Council of teachers of Mathematics

NEE – Necessidades Educativas Especiais

N.I. – Nota importante

O

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

OD – Olho direito

OE – Olho esquerdo

OMS – Organização Mundial de Saúde

ONCE – Organização Nacional dos Cegos de Espanha

P

PEI – Programa Educativo Individual

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

R

IR – Conjunto dos números reais

S

SNRIPD – Secretariado Nacional de Reabilitação e Integração das Pessoas com Deficiência

U

UCM - Universidad Complutense de Madrid

UNESCO – Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

V

VD – Variável Dependente

VI – Variável Independente

Vol. – Volume

W

WWW - World Web Wide

INTRODUÇÃO

Ao longo da História, a atitude do ensino face a pessoas portadoras de deficiência passou por diversos períodos, de entre os quais se destacam os seguintes: *segregação*, *proteção*, *emancipação*, *integração* e *inclusão*. A evolução verificada neste campo assenta numa evolução do conceito de *pessoa portadora de deficiência* para o conceito *de pessoa com Necessidades Educativas Especiais* (NEE). Com a introdução deste conceito, o qual veio substituir o termo *deficiente*, pretendeu-se alterar a tradicional classificação que assentava em critérios médicos, passando a destacar-se aspetos de ordem pedagógica e educativa.

É com a *Declaração de Salamanca*[5], em junho de 1994, que se reafirma um compromisso já traçado para com a educação para todos como política e prática para crianças e jovens com NEE, em que se defende a ideia de que devem ser as escolas a moldarem-se e a adaptarem-se a todos os alunos, e não o processo contrário, independentemente das suas condições[6].

De acordo com a mesma Declaração, atualmente, a tendência das políticas e práticas educativas assenta no princípio da promoção da escola para todos. É esta a filosofia pela qual se gere a escola inclusiva que se pretende que seja entendida como uma estrutura educativa de suporte social aberta a todos, ajustando-se às condições específicas de cada indivíduo, aceitando as diferenças, apoiando as aprendizagens e

---

[5] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais*. Lisboa: UNESCO.

[6] Correia, L. & Cabral, M. (1999). *Práticas Tradicionais da Colocação do Aluno com Necessidades Educativas Especiais.* In: Correia, L. (Ed.), *Alunos com Necessidades Educativas Especiais nas Classes Regulares.* Porto, Porto Editora, pp.11-16

promovendo uma educação diferenciada que responda às necessidades individuais dos alunos que acolhe.

Assim sendo, cada vez mais se procura uma escola inclusiva, em que todos os alunos, independentemente das suas problemáticas específicas, sejam integrados numa mesma turma, pelo que é fundamental que os professores estejam disponíveis para lecionarem os conteúdos programáticos da sua disciplina, sem nunca descurar as especificidades de cada aluno, nem esquecer que estes estão inseridos num grupo-turma.

No caso dos alunos cegos, e partindo do princípio que estes têm as mesmas capacidades cognitivas que os alunos normovisuais, é importante que o professor, aula a aula, procure perceber em que medida a sua deficiência pode afetar a aquisição de conhecimentos, que em contexto, procure estratégias para colmatar as dificuldades sentidas por esses alunos e que estas sejam, concomitantemente, adequadas aos alunos normovisuais, pois, caso contrário, estaríamos a usar estratégias de diferenciação positiva e não de inclusão.

Anos após a *Declaração de Salamanca*, em que a educação dos alunos com NEE, entre os quais se incluem os alunos cegos, passou a ser enquadrada pelos princípios da educação inclusiva[7], foi publicado, em Portugal, em 2008, o Decreto-Lei 3/08, pelo Ministério da Educação e Ciência, onde a designação educação inclusiva, bem como alguns princípios que lhe estão subjacentes, são claramente explicitados.

Atualmente, esta noção assumiu uma maior abrangência e, por isso, compete às escolas proporcionar condições para que todos os alunos, incluindo os alunos cegos, possam ter acesso às ferramentas culturais das diferentes disciplinas,

[7] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais*. Lisboa: UNESCO.

proporcionando, assim, oportunidades equitativas de sucesso académico[8] e facilitando, também, a sua inclusão social[9].

As interações sociais são um dos elementos que concorrem para a configuração de cenários de educação formal mais inclusivos, podendo contribuir para derrubar algumas das barreiras com que se deparam alguns alunos no que se refere ao acesso a ferramentas culturais das diferentes disciplinas[10].

No caso dos alunos cegos, as interações sociais assumem um papel de enorme importância por se constituírem como um veículo que permite organizar e integrar as informações com origem nos outros sentidos[11], permitindo compensar as informações a que os alunos cegos poderiam não ter acesso por não poderem recorrer ao sentido da visão.

Por isso, Cullata, Tompkins e Werts[12] consideram que, na organização do trabalho na sala de aula que inclui alunos cegos, é de grande importância o recurso a uma linguagem que designam por descritiva. Trata-se de uma linguagem onde se procura tornar explícito o contexto e respetivos elementos a que nos pretendemos referir, evitando o recurso a expressões como "aqui" ou "aquele", por exemplo, e optando por explicitar, verbalmente, os conceitos ou aspetos das representações gráficas a que estas se referem.

---

[8] Bénard da Costa, A. B. (2006). *A educação inclusiva dez anos após Salamanca: Reflexões sobre um caminho percorrido*. In D. Rodrigues (Ed.), *Educação inclusiva: Estamos a fazer progressos?* (pp. 13-29). Cruz Quebrada: Faculdade de Motricidade Humana.

[9] César, M. (2003). *A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos*. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 117-149). Porto: Porto Editora; César, M., e Santos, N. (2006). From exclusion into inclusion: Collaborative work contributions to more inclusive learning settings. *European Journal of Psychology of Education, XXI(*3), pp.333-346.

[10] Vygotsky, L. S. (1932/1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, Trad.). Cambridge MA: Harvard University Press. [Trabalho original publicado em russo, em 1932].

[11] Batista, C. G. (2005). *Formação de conceitos em crianças cegas: Questões teóricas e implicações educacionais*. Psicologia: Teoria e pesquisa, 21(1), pp.7-15; Ochaíta, E. (1993). *Ceguera y desarrollo psicologico*. In A. Rosa, & E. Ochaíta (Eds.), *Psicología de la ceguera* (pp. 111-202). Madrid: Alianza Editorial; Tobin, M. J., Bozic, N., Douglas, G., Greaney, J., & Ross, S. (1997). Visually impaired children: Development and implications for education. *European Journal of Psychology of Education, XII(4)*, pp.431-447.

[12] Cullata, R. A., Tompkins, J. R., & Werts, M. G. (2003). *Fundamentals of special education: What every teacher needs to know* (2nd ed.). New Jersey: Merrill Prentice Hall.

Todavia, o desenvolvimento das crianças cegas não pode apenas centrar-se no elemento da linguagem oral, como destaca Batista[11]. A estimulação dos outros sentidos, entre os quais se encontra o tato, é também de grande importância para estes alunos. O autor relembra ainda que, para os alunos cegos, é essencial criar condições para minimizar e/ ou ultrapassar os obstáculos existentes devido à falta de visão, criando deste modo oportunidades de acesso, mas também de participação e sucesso nos processos de ensino e de aprendizagem. Torna-se, portanto, necessário refletir e atuar sobre as experiências de ensino e de aprendizagem que envolvam alunos cegos.

No que respeita à educação Matemática, diversos autores[13] sustentam que as conexões entre os novos conhecimentos matemáticos e os conhecimentos matemáticos já apropriados pelos alunos desempenham um papel crucial na aprendizagem. Estas conexões contribuem para que os alunos tenham uma visão da Matemática como um todo, onde os diferentes conteúdos se encontram encadeados e não isolados. Segundo Bishop e Goffree, na comunicação em cenários de educação formal, nomeadamente nas aulas de Matemática, o professor deve ter como preocupação, durante a introdução de novos conceitos e procedimentos, estabelecer pontes entre estes e os conceitos e procedimentos matemáticos que os alunos entretanto já adquiriram. Este é, também, um dos elementos referidos por Batista, no domínio da educação dos alunos cegos. Como nos referem Bishop e Goffree, o estabelecimento de conexões torna-se mais eficiente se existir *feedback* por parte dos alunos sobre quais os conceitos e procedimentos já adquiridos, para que o professor a eles possa recorrer nas discussões gerais, com a turma. Será interessante observar de que forma estes elementos – processos interativos e estabelecimento de conexões - podem contribuir para a promoção do acesso às ferramentas culturais da Matemática, nomeadamente de alunos cegos.

Alfabetizar algebricamente os alunos no Ensino Básico tem sido desafiante. As dificuldades desse processo provêm da forma já pronta e isolada como a álgebra é

[13] Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). *Classroom organization and dynamics*. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reídle; Jaworski, B. (2002). *Social constructivism in mathematics learning and teaching*. In L. Haggarty (Ed.), *Teaching mathematics in secondary schools: A reader* (pp. 67-82). Londres: RoutledgeFalmer; Serrazina, M. L. (1996). *Ensinar/aprender matemática*. In H. M. Guimarães (Ed.), *Dez anos de Profmat: Intervenções* (pp. 235 – 247). Lisboa: APM.

introduzida aos alunos, fazendo com que esses não saibam relacioná-la com competências já adquiridas nem como aplicá-la de modo significativo. Assim, quando a álgebra é introduzida, é comum ouvir dos alunos que eles não sabem quais são as suas utilizações ou, em termos matemáticos, quais são as suas aplicações práticas. Mas, a partir de certo momento, os alunos param de questionar a respeito do seu uso e da maneira como deve ser entendida a linguagem formal, trata-se do início de uma aceitação quanto ao carácter de ferramenta para resolver exercícios. Em verdade, os alunos estão sob a pressão institucional, colocada na forma de demanda, para obter uma aprovação nas provas referentes a esse conteúdo.

Alfabetizar algebricamente os alunos cegos no Ensino Básico é ainda mais desafiante. Às dificuldades dos restantes, acrescem as dificuldades inerentes à sua própria *deficiência*, a inadequação dos recursos e materiais disponíveis e a ausência de formação docente nesta área.

Assim sendo, esta investigação visa essencialmente contribuir para analisar a participação de alunos cegos em cenários de educação formal, identificar as barreiras que estes enfrentam no ensino da Álgebra e, sobretudo, delinear estratégias de atuação, nomeadamente em contexto de sala de aula, que permitam derrubar ou minimizar as limitações que estes alunos enfrentam, contribuindo, deste modo, para a construção de cenários educativos mais inclusivos.

1 - Definição de objetivos

No âmbito deste trabalho de investigação, foram considerados os seguintes objetivos gerais:

- Conhecer as características, limitações e dificuldades recorrentes da grafia matemática Braille;

- Identificar as maiores dificuldades manifestadas pelos alunos cegos na aprendizagem em Álgebra;

- Delinear estratégias de organização e gestão da sala de aula para a inclusão de alunos cegos em atividades algébricas, utilizando os recursos pedagógicos existentes no contexto do estudo;

- Avaliar o impacto de um vasto leque de atividades de caráter exploratório que possibilite ao aluno cego desenvolver o seu próprio raciocínio matemático, nomeadamente no que à Álgebra diz respeito e assim evoluir no seu processo de ensino-aprendizagem;

- Analisar e refletir sobre explorações, raciocínios e conclusões matemáticas de alunos cegos no decorrer da aprendizagem de diferentes tópicos no domínio temático da Álgebra em contexto de sala de aula, de forma a possibilitar a sua utilização e adaptação por outros docentes, no sentido de melhorar o processo de ensino-aprendizagem destes alunos.

Tendo em consideração os objetivos gerais traçados na investigação, definiram-se os seguintes objetivos específicos:

- Compreender os processos de raciocínio usados por alunos cegos na resolução de atividades referentes ao tópico Sequências e Regularidades, com diferentes níveis de complexidade;

- Identificar as dificuldades manifestadas por alunos cegos na resolução de atividades que envolvam a representação e a generalização, no âmbito da aprendizagem dos conteúdos inerentes ao tópico Sequências e Regularidades;

- Verificar o processo de aquisição do conceito de função por parte de alunos cegos no tópico relativo a Funções;

- Analisar os processos de raciocínio usados por alunos cegos na resolução de atividades referentes ao tópico Funções;

- Identificar as dificuldades manifestadas por alunos cegos na resolução de atividades que envolvam a representação, a generalização e a conversão de diferentes tipos de uma representação de uma função;

- Verificar o processo de aquisição do conceito de equação por parte de alunos cegos no tópico relativo às Equações e Inequações do 1.º grau a uma incógnita;

- Analisar as representações e os processos de significação desenvolvidos por alunos cegos na resolução de atividades de exploração relativas ao tópico Equações e Inequações do 1.º grau a uma incógnita;

- Identificar as dificuldades manifestadas por alunos cegos na resolução de atividades que envolvam a resolução de problemas no âmbito do tópico Equações e Inequações do 1.º grau a uma incógnita;

- Aferir, aquando do cumprimento dos anteriores objetivos específicos o impacto das atividades de exploração propostas na aquisição e aplicação de conceitos e procedimentos nos diferentes tópicos do domínio da Álgebra por parte de alunos cegos.

2 - Limitações e dificuldades

Como principal limitação, que constitui simultaneamente a principal dificuldade, destaca-se a escassez de tempo para a redação do presente trabalho de investigação, tendo em conta motivos de ordem pessoal e profissional, tais como a necessidade de manutenção do exercício de funções docentes na área da Matemática e alterações na vida pessoal, salientando-se, neste campo, as exigências inerentes ao nascimento do meu filho.

Evidenciam-se, também, as reformulações produzidas pelo Ministério da Educação, no que respeita ao Programa de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico, as quais tiveram reflexo direto na seleção das evidências ainda relevantes para o cumprimento dos objetivos propostos.

Acresce-se, ainda, o tempo dedicado à transcrição para Braille de todos os enunciados facultados aos alunos e, posteriormente, à transcrição para negro das explorações realizadas pelos mesmos, das observações, entrevistas e interações verbais, quer na sua própria simbologia, quer já devidamente reformulados, trabalho para o qual foi necessário um domínio da linguagem Braille que requereu muito tempo.

Finalmente, salienta-se a escassez de bibliografia que aborde o binómio Braille/Álgebra.

3 - Definição de conceitos

Apresentam-se, de seguida, alguns conceitos que são considerados essenciais, muito embora, alguns deles, estejam devidamente explanados ao longo do presente trabalho investigativo.

Abcissa - Nome da coordenada no eixo dos *xx* num sistema cartesiano bidimensional.

Origem da palavra (étimo) - *Abcissa* - *"linha cortada"* o nome provém dos eixos cartesianos onde o eixo dos *xx* é uma *linha cortada* pelo eixo dos *yy*.

Alfabeto Braille - Alfabeto representado por sinais do Sistema Braille.

Algoritmo - Conjunto de procedimentos para atingir determinado resultado ou operação.

Amblíope – ver pessoa amblíope.

Associativa (propriedade) - Propriedade da adição e da multiplicação que permite juntar duas ou mais parcelas ou fatores e adicionar ou multiplicar pelos restantes.

Base de uma potência - Nas potências denomina-se assim o número que se encontra na
parte inferior e que indica o valor de cada fator.

Braille - Processo de leitura e escrita baseado no sistema braille.

Braille, Louis (1809-1852) - Inventor do Sistema Braille.

Braille a Negro - Ver Braille em/ou a Tinta.

Braille de Oito Pontos - Escrita em relevo com base no conjunto fundamental acrescido dos pontos 7, por baixo do ponto 3, e 8, por baixo do ponto 6, possibilitando assim a existência de 256 sinais simples.

Braille em/ou a Tinta - Simulação do braille por meio de pontos em tinta.

Cego - Ver pessoa cega.

Célula Braille - Espaço a que se ajusta a unidade estrutural básica dos seis pontos do Sistema Braille.

Centímetro - A centésima parte do metro. Representa-se como cm.

Código Braille - Conjunto de símbolos utilizados na escrita de uma qualquer matéria.

Coeficiente - O fator constante de um monómio. Exemplo nos monómios $2x^3$ e $-4y^2$, os coeficientes são 2 e -4 respetivamente.

Comutativa (propriedade) - Indica que a ordem em que aparecem os números em nada influi no resultado. Na adição: 3 + 2 é o mesmo que 2 + 3. Na multiplicação: 4×3 é o mesmo que 3×4. A subtração e a divisão não gozam da propriedade comutativa.

Condição – Chama-se condição, expressão proposicional ou função proposicional a uma expressão com variáveis que se transforma numa proposição sempre que se concretizam as variáveis.

Cubaritmo - Utensílio para efetuar cálculos, preenchido por espaços quadrangulares, onde se colocam cubos.

Decimal (sistema) - Sistema numérico que utiliza a base 10.

Deficiente Visual - Ver pessoa deficiente visual.

Denominador - A parte inferior duma fração e que representa o número de partes em que foi dividida a unidade. Exemplos: na fração $\frac{1}{4}$; 4 é o denominador, em $\frac{5}{6}$; 6 é o denominador.

Desigualdade - Expressão que mostra que um número (ou uma expressão) não é igual a outro.

> $a < b$ traduz que a é menor que b. exemplo $5 < 9$
> $a > b$ traduz que a é maior que b exemplo $11 > 4$

usam-se ainda os símbolos: $\leq$ (menor ou igual), $\geq$ (maior ou igual) e $\neq$ (diferente).

Divisor - Um número capaz de dividir exatamente outro $16 \div 2 = 8$ (resto 0), logo 2 é divisor de 16.

Equação - É uma igualdade entre duas expressões algébricas onde aparece pelo menos um valor desconhecido. Aos valores desconhecidos chamamos ***Incógnitas***. Na unidade que lecionei foi tratado apenas o caso em que existe apenas um valor desconhecido.

Equações equivalentes - Uma equação diz-se ***equivalente*** a outra, quando toda a solução da primeira é solução da segunda e reciprocamente, toda a solução da segunda é solução da primeira, ou quando são ambas impossíveis.

Expressão designatória – É uma expressão com variáveis que se transforma numa designação quando se concretizam as variáveis.

Expressão numérica - "frase" matemática constituída exclusivamente por números e símbolos de operações.

Fórmula - Expressão simbólica que relaciona duas ou mais variáveis mediante a substituição da(s) variáveis pode resolver um problema.

Fração - Uma grandeza que exprime um quociente entre dois números: o superior chamado numerador e o inferior chamado denominador. O denominador define o número de partes em que foi dividido o objeto e o numerador o número das partes que se pretendem representar.
Origem da palavra (étimo) - do latim *fractio, nis*, derivada de *frango*, quebrar em pedaços. O mesmo que partir.

Fração equivalente - Duas frações dizem-se equivalentes quando representam a mesma quantidade. Obtêm-se frações equivalentes multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número.

Grafia Braille para a Matemática - Conjunto de símbolos braille e regras de aplicação utilizados na escrita matemática.

Grandeza – É tudo o que se pode medir ou exprimir por meio de uma quantidade. São grandezas, por exemplo, o comprimento, a superfície, o volume e a amplitude de um ângulo.

Grandezas diretamente proporcionais – Duas grandezas que dependem uma da outra dizem-se diretamente proporcionais se, ao multiplicar-se qualquer de uma delas por um número, o valor correspondente da outra vem multiplicado por esse número.

Incógnita – Ver variável.

Inequação – É uma condição que exprime a desigualdade de duas expressões designatórias.

Matemática - Ciência que tem por objeto de estudo as relações entre os números, as formas, as grandezas e as operações. Na conceção platónica confundia-se com a filosofia.
Origem da palavra (étimo) - Matemática é uma palavra de origem grega *mathema* que significa "estudo de um tema", "doutrina", entendendo como tema o que atualmente dizemos "ciência". Também a palavra tema tem origem grega (*thema*) e significa assunto ou matéria principal. Por outro lado *Mathematika* era o nome dado às quatro ciências ensinadas por Platão e Pitágoras: aritmética, geometria, música y astronomia. Isto é aquilo que nas Universidades da Idade Média se chamava *quadrivium*, consideradas como superiores ao *trivialis*: a gramática, a retórica e a dialética.

Monómio - É um número, ou um produto de números em que alguns podem ser representados por letras. Quando estão presentes letras, podemos distinguir duas partes num monómio, uma parte numérica, ***coeficiente***, e a ***parte literal***, constituída essa por letras.

Número Primo – É um número natural diferente de 1 que tem apenas dois divisores: 1 e o próprio número. Exemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, ...

Número Misto - Número constituído por uma parte inteira e uma parte fracionária.

Numerador - O número superior de uma fração. Em $\frac{1}{4}$ o numerador é 1, em $\frac{5}{6}$ o numerador é 5.

Ordinal - Palavra que indica a ordem de colocação num conjunto de um dos seus objetos (1.º, 2.º, 3.º, ...) ou (primeiro, segundo, terceiro...).

Par ordenado - Um conjunto de dois números usados para localizar um ponto no plano,.. O primeiro número indica a distância à origem no eixo dos *xx* (abcissa) e o segundo a distância à origem segundo o eixo dos *yy* (ordenada) e representa-se por $(x;y)$.

Pessoa Amblíope - Pessoa com visão residual que para ler livros a tinta só o consegue com o auxílio de equipamentos especiais de ampliação óptica.

Pessoa Cega - pessoa incapacitada de ver.

Pessoa Deficiente Visual – contempla duas situações distintas: pessoa com baixo grau de visão necessitando de meios ópticos de ampliação para o acto de leitura (amblíopia) e pessoa incapacitada de ver (cegueira).

Pessoa Normovisual - pessoa que não é deficiente visual.

Potência - Forma abreviada de escrita dum produto de fatores iguais. Exemplo: $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

Proposição – Chama-se proposição a uma expressão sobre a qual faz sentido dizer que é verdadeira ou falsa. Isto significa que as proposições afirmam factos ou exprimem juízos sobre entes.

Quadrante – Cada uma das regiões em que se divide o plano quando nele se traçam duas retas perpendiculares.

Relevo Braille - Diferentes graus de saliência dos pontos do texto braille.

Sistema Braille - Sistema de leitura e escrita, concebido por Luís Braille para pessoas que apresentam deficiência visual grave que impede, mesmo com o auxílio de instrumentos óticos de ampliação, a leitura de livros a tinta, tendo por base o conjunto de 64 sinais, agrupados em séries, estruturados a partir das combinações dos seis pontos (1,2,3,4,5,6).

Símbolo Braille - Qualquer significado gráfico atribuído a um sinal braille.

Sinal Braille - Qualquer das 64 combinações que integram o Sistema Braille.

Solução - Ao valor da incógnita que transforma a equação numa igualdade numérica verdadeira chama-se **solução** ou **raiz** da equação.

Termos - Cada um dos membros de uma equação pode ser constituído por um ou mais monómios, que se designam por ***termos*** da equação. ***Termos semelhantes*** são termos que têm a mesma parte literal.

Transcrever - Reproduzir em braille, copiando ou mediante ditado; copiar textualmente.

Transcrição - Ato ou efeito de transcrever textos em caracteres comuns para braille.

Unívoca - Correspondência que faz com que a um objeto corresponda uma e uma só imagem.

Variável - A grandeza que pode ser mudada, ou melhor cujo valor pode assumir diferentes grandezas. As letras mais usadas neste caso são as últimas letras do alfabeto: x, y e z, mas como mero hábito já que a variável pode ser representada por qualquer símbolo.
Exemplo: na equação $f + 5 = 12$, f é a variável ou incógnita, cujo valor determinado será 7.

4 - Formulação do problema

De acordo com Quivy e Campenhoudt[14], a problemática estabelece uma abordagem ou perspetiva teórica que o investigador determina para conduzir o estudo que pretende efetuar. Desta forma, na prática, a definição de uma problemática traduz-se na formulação dos principais pontos de referência teóricos da investigação.

Tendo em conta a filosofia pela qual se gere a escola da atualidade preconiza o conceito de uma educação para todos, enquanto estrutura educativa de suporte social, capaz de se ajustar às condições específicas de cada um dos seus alunos, reconhecendo e aceitando as diferenças, fomentando as aprendizagens de todos, tendo como ponto de partida o próprio aluno e promovendo, desse forma, uma educação diferenciada que responda às necessidades individuais de cada um dos seus alunos, na escola inclusiva, todos os alunos, independentemente das suas problemáticas específicas, são integrados numa mesma turma, pelo que é fundamental que os professores estejam disponíveis para lecionarem os conteúdos programáticos da sua disciplina, sem nunca descurar as especificidades de cada aluno, nem esquecer que estes estão inseridos num grupo-turma.

No caso concreto dos alunos cegos, é importante que o professor, na sua prática diária, procure entender as características da sua deficiência, as suas limitações e potencialidades, no sentido de perceber em que medida esta pode afetar as aprendizagens e que procure definir e aplicar estratégias que minimizem ou colmatem as lacunas inerentes à limitação destes alunos, sempre que possível, também adequadas aos alunos normovisuais, pois, caso contrário, estaríamos a usar estratégias de diferenciação positiva e não de inclusão.

[14] Quivy, R., & Capenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais* (5ª ed.). Lisboa, Gradiva.

Em suma, ao deparar-se com uma turma constituída por alunos cegos e normovisuais, o professor tem de delinear e aplicar estratégias de ensino que lhe permitam transmitir o conhecimento algébrico a todos os alunos de modo inclusivo. Assim sendo, e tendo em conta que, segundo Quivy e Campenhoudt[15], a questão de investigação deve ser realista e sucinta, usando uma linguagem clara e simples, que evite interpretações dúbias e suficientemente aberta que possibilite mais do que uma resposta, o problema inerente ao presente trabalho de investigação tem a seguinte formulação:

Que estratégias de ensino e recursos educativos serão necessários delinear e aplicar para que os alunos cegos consigam adquirir o conhecimento algébrico no 3.º Ciclo do Ensino Básico em Portugal do mesmo modo que os restantes elementos do grupo-turma?

[15] Ibidem.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

CAPÍTULO I – O ENSINO INCLUSIVO

1.1 – Educação Inclusiva

1.1.1 – Introdução

De acordo com a *Convenção sobre os Direitos da Criança*[16], adotada pela Assembleia Geral nas Nações Unidas a 20 de novembro de 1989 e ratificada por Portugal "*A criança tem direito à educação e o Estado tem a obrigação de tornar o ensino primário obrigatório e gratuito, encorajar a organização de diferentes sistemas de ensino secundário acessíveis a todas as crianças e tornar o ensino superior acessível a todos, em função das capacidades de cada um. A disciplina escolar deve respeitar os direitos e a dignidade da criança*."

Tendo em conta que todas as crianças e jovens têm direito à igualdade de oportunidades na educação, todas devem ter direito a uma frequência escolar que anule as disparidades existentes baseadas nas limitações físicas ou mentais que possam apresentar.

É neste princípio que, segundo a Declaração de Salamanca[17], em 1994, se fundamenta a educação inclusiva, pela qual se gerem as escolas dos dias de hoje.

---

[16] UNICEF (1989). *Convenção sobre os Direitos da Criança*, p. 20

[17] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.* [Em linha]. Disponível em <http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_9.pdf>. [Consultado em 13/12/2012].

Para Rodrigues[18], a implementação de uma escola para todos implica a necessidade de se ultrapassarem as barreiras existentes quer no acesso, quer no sucesso dos alunos com NEE Para tal, torna-se fundamental construir cenários e práticas pedagógicas mais inclusivas, em detrimento das práticas tradicionais.

Tal como referido pela UNESCO[19] a formação de professores é essencial para que este propósito se concretize. Contudo, e como referem Monteiro e Oliveira[20], a formação inicial de professores não os prepara devidamente para a inclusão de alunos com NEE. Além disso, e como referido por Paiva[21], também não há uma relação direta entre uma formação especializada no âmbito das NEE e a promoção de práticas mais inclusivas.

Neste sentido, *"se queremos dar aos jovens a melhor educação, é basilar dar primeiro uma boa formação aos que os vão ensinar"* [22], pelo que, e de acordo com Estrela[23], a formação de professores deve garantir que todos os professores, enquanto membros individuais, estejam convenientemente preparados para desenvolver a sua profissão de modo autónomo e responsável.

Se, por um lado, as politicas educativas se encaminhem no sentido de proporcionar a todos os alunos a educação a que têm direito; por outro lado os recursos e as práticas educativas pouco evoluíram nesse âmbito. Para que seja possível construir uma escola para todos, em que se respeite as necessidades específicas individuais, é necessário promover mudanças reais na prática pedagógica dos docentes, mas

---

[18] Rodrigues, D. (2000). O paradigma da educação inclusiva – Reflexão sobre uma agenda possível. *Inclusão, 1*, pp.7-13; Rodrigues, D. (2003). *Perspectivas sobre inclusão. Da educação à sociedade.* Porto, Porto Editora.

[19] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.* [Em linha]. Disponível em <http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_9.pdf>. [Consultado em 15/12/2012].

[20] Monteiro, M. (2000*). Percepções dos professores do ensino básico acerca de alunos com dificuldades de aprendizagem e/ou problemas de comportamento: um estudo exploratório a propósito da inclusão educativa.* Dissertação de Mestrado Universidade do Minho, I.E.P; Oliveira, T. (2009). *Educação inclusiva e formação de professores*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação. Universidade de Coimbra.

[21] Paiva, F. (2008). *As atitudes dos professores do ensino básico face à inclusão de alunos com NEE na sala de aula*. Tese em Psicologia Educacional, Lisboa, ISPA; Paiva, F. (2012). *A formação e as atitudes de professores do ensino básico face à inclusão dos alunos com necessidades educativas especiais na sala de aula*. Dissertação de Doutoramento apresentada à Universidade da Extremadura, Badajoz.

[22] Rodrigues, A. (2006). *Análises de práticas e de necessidades de formação*. Ciências da Educação. Lisboa, Ministério da Educação.

[23] Estrela, M. (2002). Modelos de formação de professores e seus pressupostos conceptuais. *Revista de Educação, 11 (1)*, pp. 17-29.

também na organização e na gestão das escolas. Segundo Silva[24] a formação inicial de professores não tem cumprido este propósito, isto é, não tem desenvolvido nos docentes a prática de estratégias inclusivas. Estudos realizados neste campo[25], apontam para a insegurança sentida por professores do ensino regular, quando confrontados com alunos com NEE e referem que essa atitude se relaciona com a ausência de preparação prévia para o efeito. Para Silva[26], não será possível implementar uma escola inclusiva, isto é, capaz de dar respostas adequadas a todos os alunos, sem investimento na formação.

---

24 Silva, M. (2001). *A Análise de Necessidades de Formação na Formação Contínua de Professores: Um Caminho para a Integração Escolar*. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da Universidade de São Paulo. [Em linha]. Disponível em <http://www.teses.usp.br>. [Consultado em 14/01/2013]; Silva, M. (2008). Inclusão e formação docente. *EcoS,* 10(2), pp. 479-498.

25 Correia, L. (1999). *Alunos com necessidades educativas especiais nas classes regulares*. Porto, Porto Editora; Correia, L. (2003). *Educação especial e inclusão*. Porto, Porto Editora; Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais. Um guia para educadores e professores* (2.ª ed.) Porto, Porto Editora.

26 Silva, M. (2008). Inclusão e formação docente. *EcoS, 10(2)*, pp. 479-498.

1.1.2 - Educação Inclusiva de alunos com NEE

1.1.2.1 – Necessidades Educativas Especiais: Conceitos

Segundo Serra[27], o conceito *Necessidades Educativas Especiais* surgiu pela primeira vez no *Warnock Report*, em 1978, relatório resultante do primeiro comité britânico presidido por Mary Warnock constituído para reavaliar o atendimento aos deficientes.

A introdução deste conceito, que veio substituir o termo deficiente, tinha como finalidade alterar a tradicional classificação que assentava em critério médicos, passando a destacar-se critérios pedagógicos e educativos.

O uso do termo NEE traz inúmeras vantagens a diversos níveis, conferindo-lhe um caráter mais positivo e menos estigmatizante que o termo tradicional.

A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE), por exemplo, considera que *"(…) o conceito de N.E.E. é tomado, não no sentido de incapacidade específica que se atribui à criança mas ligado a tudo o que lhe diz respeito; às suas capacidades a todos os fatores que determinam a sua progressão no plano educativo*" [28]. Neste sentido, verifica-se um desvio do centro da problemática da criança para a escola, ideia também reiterada na Declaração de Salamanca, onde se refere que "*as escolas devem ajustar-se a todas as crianças independentemente das suas condições físicas, sociais, linguísticas ou outras*" [29].

[27] Serra, H. (2005). Paradigmas da inclusão no contexto mundial. *Saber (e) Educar, 10*, pp, 35-50.
[28] OCDE (1995) *A integração escolar das crianças e dos adolescentes deficientes: ambições, teorias e práticas.* Coimbra, SPRC.
[29] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da ação na área das necessidades educativas especiais.*

Esta nova conceção preconizou outra alteração significativa no ensino: a abertura e flexibilização dos currículos, pela adaptação destes às condições particulares de cada aluno, levando à criação de programas diferenciados e individualizados, que se concretizaram, posteriormente, nos PEI (Plano Educativo Individual). Esta questão constituiu outro desvio, desta vez, através da centralização no contexto e no currículo e não apenas no aluno.

Para além do desvio do centro da problemática e da visão mais positiva conferida ao termo NEE, este veio também ampliar o domínio da Educação Especial, abrangendo não apenas os até então considerados "deficientes", mas também outra população, tal como indivíduos com problemas emocionais, problemas comportamentais, problemas de aprendizagem, perturbações na linguagem, entre outros.

Tal como referido por Correia[30], a nova perspetiva de Educação Especial passa a ter por base o princípio de que todos os intervenientes no processo educativo dos alunos com NEE devem desenvolver um trabalho colaborativo, partilhando recursos, decisões e apoios. Assim sendo, a Educação Especial passa a ser encarada como um conjunto de recursos humanos e de materiais de apoio que estão ao serviço da educação, de forma a dar resposta às especificidades dos alunos, com a colaboração da restante comunidade escolar.

Apesar das reconhecidas vantagens da introdução do uso do termo NEE, alguns autores, como Leite[31] criticam a sua generalização, defendendo que a sua compreensão nem sempre foi adequada: "*Em muitas situações, a deturpação ou a incorreta interpretação do conceito levou a identificá-lo exclusivamente com a noção de défice, esquecendo o essencial que o norteava, isto é, o provimento de meios educativos que anulassem ou diminuíssem as barreiras colocadas às aprendizagens*

[30] Correia, L. (2003). *Educação especial e inclusão*. Porto, Porto Editora; Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais. Um guia para educadores e professores* (2.ª ed.) Porto, Porto Editora; Morgado, J. (2003), *Qualidade, Inclusão e Diferenciação.* Lisboa, Instituto Superior de Psicologia Aplicada.
[31] Leite, T. (2005). *Diferenciação curricular e necessidades educativas especiais*. In: Sim-Sim, I. (Ed.), *Necessidades Educativas Especiais: Dificuldades da Criança ou da Escola*? Lisboa, Texto Editores, pp. 9-25.

das crianças". Também Costa[32], embora reconheça alguns benefícios associados ao termo, defende que este *"(…) se enquadra no contexto da «integração», adotando uma perspetiva educativa centrada nos problemas e nas dificuldades dos alunos e que aponta, essencialmente, para medidas especiais de intervenção, ou seja, medidas extrínsecas ao regular funcionamento da sala de aula*", o que desvirtua o conceito na sua essência.

Segundo Rodrigues[33], o termo NEE a nível escolar designa "*os alunos que apresentam condições de deficiência ou níveis de desempenho escolar mais baixos que a «média»*". Já para Correia[34], "*[os] alunos com NEE são aqueles que, por exibirem determinadas condições específicas, podem necessitar de apoio de serviços de educação especial durante todo ou parte do seu percurso escolar, de forma a facilitar o seu desenvolvimento académico, pessoal e sócio-emocional*". Madureira e Leite[35] defendem que as NEE abrangem alguns alunos que apresentam mais dificuldades que o habitual, pelo que necessitam de apoio educativo complementar. Também Correia[36] considera que as NEE afetam crianças e jovens com "*aprendizagens atípicas, isto é, que não acompanham o currículo normal, sendo necessário proceder a adaptações curriculares, mais ou menos generalizadas*".

Face ao exposto, um aluno com NEE, e tendo em conta as suas especificidades (para Correia[34], as problemáticas relacionadas com autismo, surdez, deficiências auditiva, visual e motora, dificuldades de aprendizagem, de comunicação, de comportamento, multideficiência, outros problemas de saúde e graves perturbações emocionais), pode necessitar do apoio da Educação Especial de forma temporária (durante parte do seu percurso educativo) ou permanente (durante todo o seu percurso académico).

---

[32] Costa, A. (2006). *A educação inclusiva dez anos após Salamanca: reflexões sobre o caminho percorrido*. *In*: D. Rodrigues (Ed.) *Educação Inclusivas. Estamos a fazer progressos?* Cruz Quebrada, Faculdade de Motricidade Humana, pp.13-29.

[33] Rodrigues, D. (2001). *A educação e a diferença*. *In*: D. Rodrigues (Ed.). *Educação e diferença: Valores e práticas para uma educação inclusiva*. Porto, Porto Editora, pp.13-34.

[34] Correia, L. (2003). *Educação especial e inclusão*. Porto, Porto Editora.

[35] Madureira, I.; Leite, T. (2003). *Necessidades Educativas Especiais*. Lisboa, Universidade Aberta.

[36] Correia, L. (1999). *Alunos com necessidades educativas especiais nas classes regulares*. Porto, Porto Editora.

Assim sendo, a necessidade de realização de adequações ao currículo leva à segmentação dos alunos com NEE em dois tipos: os que têm NEE temporárias e os que têm NEE permanentes:

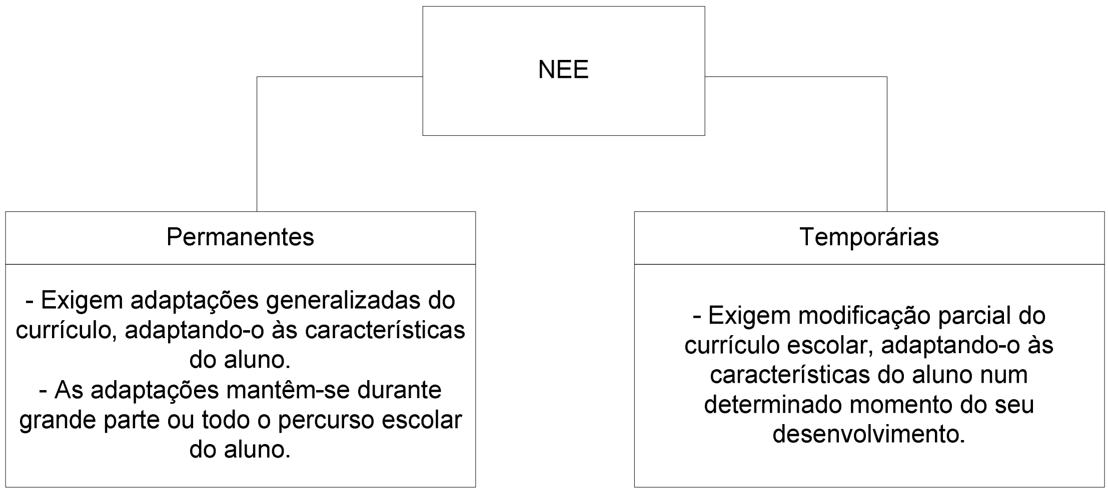


Figura 1: Esquema – Tipos de necessidades educativas especiais
(Extraído de Correia (1999), p. 49)

As NEE de caráter temporário ocorrem num determinado momento do percurso escolar e manifestam-se por problemas de grau ligeiro, exigindo por isso uma "*modificação parcial do currículo, adaptando-o às características do aluno num determinado momento do seu desenvolvimento*"[37].

Por outro lado, NEE permanentes manifestam-se ao longo de todo o percurso académico e implicam alterações substanciais no desenvolvimento do aluno, pelo que "*exigem adaptações generalizadas do currículo (…)[que] mantém-se durante grande parte ou todo o percurso escolar do aluno.*"[38]

No entanto, independentemente do tipo ou do grau de complexidade das problemáticas apresentadas pelas crianças com NEE, é inegável, tal como defendido

[37] Correia, L. (1999). *Alunos com necessidades educativas especiais nas classes regulares*. Porto, Porto Editora.
[38] Ibidem.

na Convenção sobre os Direitos da Criança[39], todas as crianças são detentoras dos mesmos direitos relativamente à educação, à saúde, à acessibilidade e ao lazer. É neste sentido que se considera que a inclusão é essencial na preservação dos direitos à igualdade, à diversidade e à dignidade pessoal.

O desenvolvimento de uma educação que promova tais valores só é possível com o delinear e a implementação de estratégias educativas que permitam atingir a igualdade de oportunidade para todos, um dos princípios orientadores da escola inclusiva.

1.1.2.2 - Necessidades Educativas Especiais: Classificação

A Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) define NEE como sendo o "*conjunto de meios que é preciso utilizar para a educação de alunos que, por diferentes motivos, de forma temporal ou permanente, não estão em condições de desenvolver a sua autonomia e integração com os meios que estão, normalmente, à disposição das escolas.*"[40]

Na verdade, considera-se que as particularidades destes alunos, bem como a forma como se desenvolvem não se limitam à sua deficiência mas também a elementos externos que os influenciam, tais como a família, as adaptações curriculares, e o envolvimento social e cultural, pelo que é fundamental para a promoção do seu desenvolvimento, o modo como o ensino é adaptada à sua realidade. Assim, e segundo a DGIDC, a Educação Especial tem como finalidades a inclusão, quer educativa, quer social, o acesso à educação, o sucesso educativo, a autonomia, a

[39] *Convenção sobre os Direitos da Criança* foi adotada pela Assembleia Geral das Nações Unidas em 20 de Novembro de 1989 e entrou em vigor em 2 de Setembro de 1990. Portugal ratificou a Convenção em 21 de Setembro de 1990.
[40] Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Educação Especial, Manual de Apoio à Prática*. Lisboa: Ministério da Educação.

estabilidade emocional, a igualdade de oportunidades, a preparação para a continuidade do percurso escolar ou para a vida profissional.

Simeonsson[41] defende que é necessário distinguir entre "*problemas de baixa-frequência e alta-intensidade e problemas de alta-frequência e alta-intensidade*".

Segundo Bairrão, são casos de *baixa-frequência* e de *alta-intensidade*, a nível escolar, aqueles que exigem mais recursos e meios adicionais para apoiar as suas necessidades educativas. Os casos de *alta-frequência e de baixa-intensidade* são casos de "*crianças e jovens com ausência de familiaridade com requisitos e competências associadas aos padrões culturais exigidos na escola e que as famílias não lhes puderam transmitir*" [42].

Partindo do pressuposto de que os condicionalismos externos afetam positiva ou negativamente os alunos com NEE, promovendo ou não o seu desenvolvimento, o seu sucesso académico e social dependerá também da compreensão das suas especificidades e da adoção de estratégias adequadas, as quais passam necessariamente por adaptações do seu currículo. É neste contexto que surge o *Plano Educativo Individual* (PEI), documento essencial à correta adaptação das práticas pedagógicas aos alunos com NEE.

Para DGIDC[43], o PEI é:

"- um documento formal que garante o direito à equidade educativa dos alunos com NEE de carácter permanente;

- um instrumento de trabalho que descreve o perfil de funcionalidade por referência à Classificação Internacional de Funcionalidade de Crianças e Jovens (CIF-CJ) do

---

[41] Simeonsson, R. J. (1994). «Towards an epidemiology of developmental, educational, and social problems of childhood». In R. J. Simeonsson (Ed), *Risk, resilience & prevention. Promoting the well-being of all children*. Baltimore. P. H. Brookes.

[42] Bairrão, J.; Pereira, F.; Felgueiras, I.; Fontes, P.; Vilhena, Carla (1998). *Os Alunos com Necessidades Educativas Especiais: Subsídios para o Sistema de Educação*. Lisboa: CNE.

[43] Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Educação Especial, Manual de Apoio à Prática*. Lisboa: Ministério da Educação.

aluno e estabelece as respostas educativas específicas requeridas por cada aluno em particular;

- um documento que responsabiliza a escola e os encarregados de educação (EE) pela implementação de medidas educativas que promovam a aprendizagem e a participação dos alunos com NEE de caráter permanente;

- um instrumento dinâmico que deve ser regularmente revisto e reformulado, uma vez que se fundamenta numa avaliação compreensiva e integrada do funcionamento do aluno, passível de sofrer alterações."

Apesar da existência deste documento, em princípio elaborado por uma equipa pluridisciplinar, o professor terá sempre um papel fundamental na sua operacionalização e avaliação.

1.1.2.3 - Da Exclusão à Inclusão: Fases

Falar de NEE e de Inclusão implica falar numa ideologia relativamente recente, para a qual contribuíram diversas fases e respetivas conceções.

De facto, ao longo da História, a sociedade e, consequentemente, a educação têm assumido diversas posições e atitudes face aos indivíduos portadores de deficiência ou que evidenciem necessidades especiais, de entre as quais se destacam cinco períodos históricos, assentes em diferentes correntes ideológicas: *segregação*, *proteção*, *emancipação*, *integração* e *inclusão*.

O período da *segregação* estende-se até aos finais da Idade Média em que se considerava que os indivíduos portadores de deficiência estavam possuídos por demónios, pelo que eram excluídos da vida em sociedade. No que respeita ao ensino em particular, e como referido por Correia e Cabral[44], estes indivíduos são condenados à ignorância e desprovidos de qualquer peso no seu seio.

Para os autores, na segunda metade da Idade Média, verificam-se alterações na conceção dos indivíduos portadores de deficiência, começando a afastar-se a ideia de relação entre a deficiência e o sobrenatural e surgindo o período *protecionista*. A hostilidade presenciada até então face a estas pessoas dá lugar a sentimentos como a compaixão assente, uma vez mais, em questões de natureza religiosa, neste caso, na teoria de que quem fosse bom teria um lugar no céu. Assim, e embora se continuasse a negar qualquer direito social ou educacional a estas pessoas, elas eram recebidas em instituições que as vestiam e alimentavam.

Os mesmos autores referem-se ao terceiro período, *emancipação*, como o resultado da relevância atribuída ao Homem e à Natureza, em detrimento do até então preponderante divino. Nesta fase, iniciam-se os primeiros estudos e as primeiras experiências com pessoas portadoras de deficiência. Embora se tenha assistido a avanços nos campos médico e terapêutico, os aspetos sociais mantiveram-se. No que respeita ao ensino, surgiram as primeiras intervenções de cariz educativo e construíram-se escolas especiais que acolhiam, em regime de internato, alunos com diversos tipos de deficiência.

A quarta fase, *integradora*, surge nos finais do século XIX, inícios do século XX. Motivada, segundo Silva[45], pelas consequências físicas e mentais advenientes das grandes guerras mundiais verificadas em inúmeras pessoas, esta fase é marcada por uma necessidade de normalização. O crescimento de pessoas mutiladas e mentalmente fragilizadas ou desequilibradas sensibilizou a sociedade em geral e, na

[44] Correia, L. & Cabral, M. (1999). *Práticas Tradicionais da Colocação do Aluno com Necessidades Educativas Especiais*. *In:* Correia, L. (Ed.), *Alunos com Necessidades Educativas Especiais nas Classes Regulares*. Porto, Porto Editora, pp. 11-16

[45] Silva, M. (2004). Reflectir para (Re)Construir Práticas. *Revista Lusófona de Educação, 4*, pp. 51-60.

educação, assistiu-se a uma tentativa de promover, para os portadores de deficiência, condições semelhantes às dos demais.

Em 1975 é publicada a *Public Law 94 -142*, *Lei da Educação para todas as Crianças Deficientes*, que, segundo Correia[46], permitiu às crianças portadoras de deficiência o mesmo acesso a condições de realização que às restantes.

Em 1978 é publicado em Inglaterra o *Warnok Report Special Education Needs*, outro marco no âmbito da ideologia integradora.

Surgem, então, as primeiras classes especiais, frequentadas por crianças e jovens portadores de deficiência, integradas em escolas regulares, de modo a fomentar a integração social e escolar.

De acordo com Correia[47], a colocação de crianças e jovens com NEE junto a crianças ditas normais conduz a um melhor desenvolvimento social e escolar das primeiras, aumentando os seus progressos e reduzindo o estigma associado à sua educação em ambientes segregados.
A ideologia *inclusiva*, quinta e última fase, é reafirmada com a *Declaração de Salamanca*[48].

A Conferência Mundial sobre Necessidades Educativas Especiais, realizada em Salamanca, no ano de 1994, que originou a *Declaração de Salamanca*, constitui uma referência no que respeita à Educação Especial e à conceção de educação inclusiva, marcando marcou grandemente as práticas, atitudes e políticas em torno da educação especial. Nesta conferência deu-se particular destaque à necessidade de mudanças profundas na esfera educativa, no sentido de acolher todos os alunos tendo em conta as suas necessidades. Como referido na mesma Declaração o princípio fundamental da nova escola *"consiste em que todos os alunos devam*

---

[46] Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais. Um guia para educadores e professores* (2.ª ed.) Porto, Porto Editora.
[47] Correia, L. (1999). *Alunos com necessidades educativas especiais nas classes regulares*. Porto, Porto Editora.
[48] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.* [Em linha]. Disponível em <http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_9.pdf>.

aprender juntos, sempre que possível, independentemente das dificuldades e das diferenças que apresentam."[49]

Como defende Correia[50], a filosofia da inclusão assenta na ideia de que a escola é para todos, possibilitando aos alunos com deficiência frequentarem e permanecerem em turmas regulares, beneficiando dos serviços necessários às suas características.

O mesmo autor refere que estas modificações de atitudes e de comportamento encontram-se associadas a fatores económicos, sociais, culturais, políticos, científicos e judiciais próprios de cada época.

1.1.3 - Educação Inclusiva: Filosofia e Enquadramento

Tendo em conta que vivemos numa sociedade baseada, entre outros, no princípio da igualdade, as escolas apresentam um papel fulcral no assegurar a igualdade de oportunidades de todos os alunos. Para tal, têm de se adaptar, indo ao encontro das especificidades de cada aluno com NEE. Conforme referido *na Declaração de Salamanca*[51], as escolas de ensino regular são "*os meios mais capazes para combater as atitudes discriminatórias, (…), construindo uma comunidade inclusiva e atingindo a educação para todos*"

Assim sendo, é fundamental fomentar e aplicar novas dinâmicas na educação, de modo a garantir maior equidade e igualdade de oportunidades a todos. Desta forma, e

[49] Ibidem
[50] Correia, L. (2003). *Educação especial e inclusão*. Porto, Porto Editora.
[51] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.* [Em linha]. Disponível em <http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_9.pdf>.

porque "*existe o consenso crescente de que as crianças e jovens com necessidades educativas especiais devem ser incluídos nas estruturas educativas destinadas à maioria das crianças*"[52], está-se perante uma escola que procura "*a promoção de valores de aceitação, de pertença, de tolerância, de respeito, de conhecimento, de igualdade de oportunidades, de direitos de cidadania, etc*." [53]

1.1.3.1. Escola e Educação Inclusiva: Emergência de conceitos

A filosofia inclusiva tem vindo a ser reforçado por políticas governamentais e legislação que promove a igualdade de todos os alunos frequentarem uma escola pública obrigatória e gratuita, usufruindo de todas as condições e serviços necessários ao seu desenvolvimento e, paralelamente, ao sucesso académico. De acordo com Sanches[54], a UNESCO tem tido um papel relevante no incremento de conceitos neste campo.

Para a autora, a inclusão é "*fruto duma longa evolução caracterizada por uma história de exclusão / rejeição que passou por diferentes fases: exploração e abandono; proteção caritativa; internamento em instituições de educação; envio para escolas ou classes especiais. Só a partir dos anos 70 se inicia, na maior parte dos países, o processo de aproximação destes alunos às estruturas regulares de ensino, baseado em diferentes conceitos: normalização, integração, igualdade de oportunidades e, finalmente, inclusão."* [55]

Segundo a mesma, só é possível falar de inclusão se esta passar por uma efetiva integração. A integração é, então, um *"processo através do qual as crianças*

[52] Ibidem
[53] Fonseca, V. (2002).*Tendências futuras para a educação inclusiva*. Inclusão, 2, p.21.
[54] Sanches, I. (2005). Compreender, agir, mudar, incluir. Da investigação-acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação, 5*, pp.127-156.
[55] Ibidem p.25.

consideradas com necessidades educativas especiais são apoiadas individualmente, de forma a poderem participar no programa vigente – e inalterado – da escola". Em *comparação, a inclusão é vista como o "empenhamento da escola em receber todas as crianças, restruturando-se de forma a poder dar resposta adequada à diversidade de alunos."*[56]

Para Baptista[57], uma escola inclusiva é *"o caminho, a estratégia mais poderosa para combater o que me parece ser o calcanhar de Aquiles da pedagogia atual: a normalização, ou seja, o mesmo professor; o mesmo programa, o mesmo manual, o mesmo tempo, o mesmo ritmo, o mesmo espaço, todos a fazer a mesma coisa no mesmo momento, numa espécie de clonização mental em que cada aluno é a cópia fiel do outro. A realidade que temos é bem diferente e a escola inclusiva é a escola para a diferença, para a diversidade de públicos, desde os sobredotados aos alunos com deficiência, na maior diversidade de estratégias e de meios."*

Citado por Jesus e Martins[58], Gordon Porter defende que a escola inclusiva é *"um sistema de educação e ensino onde os alunos com necessidades educativas especiais, incluindo os alunos com deficiência, são educados na escola do bairro, em ambientes de salas de aula regulares, apropriados para a sua idade (cronológica), com colegas que não têm deficiências e onde são oferecidos ensino e apoio de acordo com as suas capacidades e necessidades individuais".*

No entanto, até ao estabelecimento de um entendimento relativamente ao conceito de educação inclusiva, foi percorrido um longo caminho, marcado por diversas Conferências, Convenções Internacionais e alterações legislativas, de entre as quais se destacam as seguintes:

- ***Ano Internacional das Pessoas com Deficiência* (1981)**

---

[56] Ibidem p.25.
[57] Baptista, J. A. (1999). O sucesso de todos na escola inclusiva. In Conselho Nacional de Educação (Ed.), *Uma educação.*
[58] Jesus, S. N., Martins, M. M. (2000). *Escola Inclusiva e apoios educativos*. Porto: Edições Asa, p.12.

Ano que marca alterações *"sobre a forma de encarar as pessoas com deficiência, e sobre a forma de encarar a educação das crianças e jovens com deficiência."* [59]

- ***Década das Pessoas com Deficiência*** **(1983 a 1993)**

  Década em que se defende o princípio da igualdade de oportunidades, levando a medidas legais a diversos níveis, de forma a a tornar a sociedade e os diferentes serviços e recursos acessíveis para todos. *"Não se tratava simplesmente de ajudar a pessoa com deficiência a adaptar-se aos requisitos da sociedade, mas de modificar as estruturas sociais de modo a que pudessem responder às necessidades das pessoas com problemas específicos."* [60]

- ***Convenção Sobre os Direitos das Crianças*** **(1989)**

  Convenção adotada pela Assembleia Geral das Nações Unidas e ratificada por mais de 150 países *"veio trazer uma considerável pressão aos diferentes Governos para que observem a situação das crianças à luz dos vários princípios nela consignados, em particular do Artigo 23 que estipula que "uma criança com deficiência mental ou física deverá usufruir uma vida plena e estimulante em condições que lhe assegurem a dignidade, promova a sua auto-confiança, e facilite a sua participação ativa na comunidade... deverá ser prestado o apoio necessário para que a criança tenha um acesso efetivo à educação e ao treino... de modo a permitir que atinja a máxima integração social e o máximo desenvolvimento individual que for possível"* [61].

- ***Conferência Mundial sobre a Educação para Todos*** **(1990)**

  Conferência que menciona que "*devem ser tomadas medidas de modo a garantir a igualdade de acesso à educação de todas as categorias de pessoas com*

---

[59] Bénard da Costa, Ana Maria (1999). Uma educação inclusiva a partir da escola que temos. In Conselho Nacional de Educação (Ed.), *Uma educação inclusiva a partir da escola que temos (seminários e colóquios).* Lisboa: Ministério da Educação, p.25.

[60] Ibidem p.26.

[61] Ibidem pp.26-27

deficiência como parte integrante do sistema educativo" [62] e onde se aprovou a *Declaração Mundial sobre a Educação para Todos* [63]*;*

- ***Normas sobre Igualdade de Oportunidades para Pessoas com Deficiência* (1993)**

  Aprovada pelas Nações Unidades, de entre as vinte e duas diretivas, constam as que dizem respeito à educação, proclamando que as crianças com deficiência devem *"receber o apoio que precisam dentro das estruturas regulares de educação, saúde, emprego e acção social."* [64]

- ***Conferência Mundial de Salamanca* (1994)**

  Conferência que, contando com participação de 92 governos (entre eles o de Portugal) e de 25 organizações internacionais, é considerada como um marco fundamental na evolução dos princípios e das práticas em relação à educação de crianças com NEE. Nela foi consignado o conceito de *educação inclusiva*, como forma mais completa e efetiva de aplicação do conceito de escola para todos. A *Declaração de Salamanca e Enquadramento da Ação na Área das Necessidades Educativas Especiais* sintetiza as conferências e constitui o ponto de referência na reformulação de programas educativos. Destacam-se, desta Conferência, alguns pontos mais importantes, como "*[o] princípio das escolas inclusivas consiste em todos os alunos aprenderem juntos, sempre que possível, independentemente das dificuldades e das diferenças que apresentam. Estas escolas devem reconhecer e satisfazer as necessidades dos seus alunos, adaptando-se aos vários estilos e ritmos de aprendizagem, de modo a garantir um bom nível de educação para todos, através de currículos adequados, de uma boa organização escolar, de estratégias pedagógicas, de utilização de recursos e de uma cooperação com as respetivas comunidades. É preciso, portanto um conjunto de*

---

[62] Conferência Mundial de Educação para Todos. *Declaração Mundial de Educação para Todos*. Plano de Ação para Satisfazer as Necessidades Básicas de Aprendizagem. UNESCO, 1998.

[63] UNESCO. (1990) *Declaração Mundial sobre Educação para Todos: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem* .

[64] Ibidem p.27

apoios e de serviços para satisfazer o conjunto de necessidades especiais dentro da escola."[65]

- ***Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência*** **(2006)**;
  A Convenção consiste em promover, proteger e garantir o pleno e igual gozo de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais por todas as pessoas com deficiência e promover o respeito pela sua dignidade inerente.

- ***Conferência Internacional de Educação (2008)***
  A Conferência teve como tema central a Educação Inclusiva, defendendo a necessidade de flexibilizar os sistemas educativos de modo a reforçar a inclusão. Foi organizada pelo Bureau International d'Éducation (BIE), agência da UNESCO especializada em desenvolvimento curricular, tendo-se reunido os ministros da educação dos países-membros e especialistas de todo o mundo para debaterem o conceito de Educação Inclusiva, as políticas que estão a ser desenvolvidas, o modo como os sistemas educativos se estruturam e o papel dos professores face à diversidade dos alunos e suas necessidades educativas.

Segundo Aguiar [66], *"A inclusão de alunos portadores de necessidades especiais na escola regular constitui uma perspetiva para o século XXI, cada vez mais firme, nos diferentes sistemas e níveis educativos"*.

Tal referido por Vaz[67], a educação inclusiva deve ser compreendida por dois motivos: *" primeiro, o reconhecimento da educação como um direito, segundo, a diversidade como um valor educativo essencial para a transformação das escolas"*.

Para Serrano[68], a edificação de uma cultura inclusiva implica pressupostos que assentem na e pela diversidade. No seu entender, "*as comunidades escolares*

---

[65] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.* [Em linha]. Disponível em <http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_9.pdf>.
[66] Aguiar, J. (2009). *Educação inclusiva: jogos para o ensino de conceitos*. Campinas, Papirus Editora, p.15.
[67] Vaz, J. (2005). *As Atitudes dos professores do ensino básico face à inclusão de crianças com necessidades educativas especiais*. Tese de Doutoramento, Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho, p.61.
[68] Serrano, J. (2005). *Percursos e práticas para uma escola inclusiva.* Tese de Doutoramento apresentada à Universidade do Minho.

inclusivas são organizadas e geridas através de estruturas colegiais de tomada de decisão"[69].

São vários os estudos [70] em que se defende e aconselha a escola inclusiva, reconhecendo-se no entanto, que são necessárias alterações para que seja possível *"alcançar a educação de qualidade de todas as crianças, independentemente de quem eles são, de onde e como eles vivem, e quais são as suas necessidades ou potenciais habilidades"* .

Para Leitão [71], inclusão é *"um esforço de mudança e melhoria da própria escola, de forma a proporcionar a todos as melhores condições de aprendizagem, sucesso e participação, na base das circunstâncias específicas de cada um. Inclusão é, antes de tudo, uma questão de direitos e valores, é a condição da educação democrática".*

No entender de Stainback e Stainback [72], a escola inclusiva: *" é aquela que educa todos os alunos dentro de um único sistema, com o compromisso de lhes proporcionar programas educativos adequados às suas capacidades e apoio tanto para os professores como para os alunos em função das suas necessidades"*.

Também Correia [73] defende que a escola deve *"considerar a totalidade dos alunos; considerar e respeitar os diferentes estilos de aprendizagem dos alunos; acolher e dirigir a diversidade de interesses, motivações, expectativas, capacidades e ritmos de desenvolvimento de todos os alunos".*

Zabalza[74] defende que a escola inclusiva é aquela que inclui, dando resposta educativa de qualidade a todas as crianças e jovens, desenvolvendo uma filosofia pedagógica que valoriza positivamente a diversidade.

---

[69] Ibidem p.102.
[70] Ainscow, M. & Ferreira, W. (2003). Compreendendo a educação inclusiva: algumas reflexões sobre experiências internacionais. In D. Rodrigues, (org.). *Perspectivas sobre a inclusão: da educação à sociedade*. Porto, Porto Editora, p. 114.
[71] Leitão, F. (2010). *Valores Educativos, Cooperação e Inclusão*. Salamanca, Luso- Española de Ediciones, p.1.
[72] Correia, L. (2003). *Educação especial e inclusão*. Porto, Porto Editora, pp.63. Citando Stainback e Stainback.
[73] Ibidem p.75.
[74] Zabalza, M. (1999). *Diversidade e Currículo.* Lisboa, Ministério da Educação.

Também Fonseca[75] defende que *"a escola inclusiva significa assegurar a todos os estudantes, sem excepção, (…) a igualdade de oportunidades educativas (…)".*

Tal como para os anteriores, para Correia[76]. a filosofia inclusiva *"atender o aluno com necessidades educativas especiais, incluindo aquele com necessidade educativa especial severa, na classe regular com apoio dos serviços de educação especial (…). Isto quer dizer que o princípio da inclusão engloba a prestação de serviços educacionais apropriados para toda a criança com necessidades educativas especiais, incluindo as severas, na classe regular*".

Para a aplicação prática desta filosofia, é necessário que a escola se organize de modo a eliminar barreiras, colmatar dificuldades e adaptar-se aos alunos, tendo em conta as suas diferenças de cada um e as necessidades de cada um, pois *" [n]as escolas inclusivas, os alunos com necessidades educativas especiais devem receber o apoio suplementar de que precisam para assegurar uma educação eficaz."*[77] É através de currículos adequados, de uma organização pedagógica flexível, de uma utilização eficaz de recursos e da articulação apropriada com a comunidade que a escola, enquanto instituição, promove o desenvolvimento harmonioso dos seus alunos.[78]

Para Simões[79] *"o desenvolvimento humano constrói-se em relação com o meio e com os outros. O indivíduo influencia, mas também é influenciado. O ser humano desenvolve-se em interacção social, especialmente através da cooperação entre pares. É nesta perspectiva que todos podem contribuir para melhorar a nossa sociedade e contribuir para a construção de uma sociedade inclusiva, sem preconceitos onde todos têm o direito à sua individualidade"*, pelo que a pedagogia

---

[75] Fonseca, V. (2002).Tendências futuras para a educação inclusiva. *Inclusão, 2*, p. 12.
[76] Correia, L. (1999). *Alunos com necessidades educativas especiais nas classes regulares*. Porto, Porto Editora, p.33.
[77] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais*.p.12.
[78] Ibidem.
[79] Simões, A. (2000). Promover uma Educação Inclusiva. *Revista O Professor, 70 (3)*, p. 17.

inclusiva é a melhor forma de fomentar a solidariedade entre crianças e jovens, independentemente das suas características individuais.

O modelo de escola inclusiva implica a adoção de estratégias de intervenção de forma a educar todas as crianças[77] aceitando as diferenças como normais, sendo o ensino orientado para o aluno como um todo[80].

Baseando-se no *Working Fórum on Inclusive School*, Correia[81] aponta os seguintes pressupostos como sendo os principais para a construção de uma escola inclusiva:

a) Um sentido de comunidade (tendo em conta que a sua filosofia baseia-se no facto de que toda a criança deve ser aceite e apoiada pelos seus pares e pelos adultos que a rodeiam);

b) Liderança (o órgão diretivo assume um papel fulcral no envolvimento e partilha de responsabilidades com todo o corpo docente da escola);

c) Colaboração e cooperação (encorajamento a professores e alunos para a promoção de ambientes de entreajuda que conduzam a um ensino e aprendizagem baseado na cooperação);

d) Serviços e flexibilidade curricular (o currículo deve considerar as necessidades e as características dos alunos de forma a flexibilizar o trabalho);

e) Formação (a boa preparação dos profissionais de educação para o exercício destas funções e responsabilidades exige formação contínua);

f) Apoios educativos (destinando-se a facultar ao aluno com NEE competências que contribuam para a sua inserção na sociedade de modo autónomo e responsável);

---

[80] Correia, L. (2003). Educação especial e inclusão. Porto, Porto Editora; Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais. Um guia para educadores e professores* (2.ª ed.) Porto, Porto Editora; Morgado, J. (2003), *Qualidade, Inclusão e Diferenciação.* Lisboa, Instituto Superior de Psicologia Aplicada.
[81] Ibidem.

g) Serviços e apoios de Educação Especial (dando resposta às necessidades específicas dos alunos e maximizando o seu potencial).

Tal como referido por Fonseca[82], a construção de uma escola inclusiva implica um grande envolvimento por parte dos agentes no processo educativo, sendo da responsabilidade de uma equipa multidisciplinar seguir uma estratégia de trabalho conjunto, pelo que depende de um esforço concertado, não só dos professores e do pessoal escolar, mas também alunos, pais e voluntários[83].

Pelo exposto, e como referido na *Declaração de Salamanca*[84], bem como por Madureira e Leite[85], o sucesso da escola inclusiva implica alterações no currículo, nos diferentes setores educativos, nomeadamente instalações, organização escolar, pedagogia, avaliação, pessoal, ética escolar e atividades extraescolares e também nas práticas pedagógicas dos professores e na gestão escolar, assim sendo, procura-se que as escolas inclusivas tentem responder às necessidades de todos os alunos num contexto flexível, mas devidamente planeado e apoiado, quer recursos humanos necessários, quer pelos materiais pedagógicos adequados.

A este propósito, Correia[86] refere que as responsabilidades do Estado para a implementação da inclusão se encontram ao nível de legislação (que considere as reformas necessárias para a implantação de um sistema inclusivo); financiamento (que assegure os recursos humanos e materiais necessários à inclusão da criança); autonomia (que permita à escola implementar um sistema inclusivo de acordo com a sua realidade); apoio (que permita às instituições de ensino superior considerar alternativas de formação que tenham em conta a filosofia da inclusão); sensibilização (que permita ao público em geral perceber as vantagens de um sistema inclusivo).

---

[82] Fonseca, V. (2002).Tendências futuras para a educação inclusiva. *Inclusão, 2*, pp. 11-32
[83] UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.*
[84] Ibidem.
[85] Madureira, I.; Leite, T. (2003). *Necessidades Educativas Especiais*. Lisboa, Universidade Aberta.
[86] Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais. Um guia para educadores e professores* (2.ª ed.) Porto, Porto Editora.

Ainda segundo o autor, no que respeita à escola cabe-lhe a responsabilidade de elaborar e aplicar planificações adequadas que permitam uma comunicação saudável entre todos os membros da comunidade escolar, de modo a promover o plano de desenvolvimento do aluno. Cabe-lhe ainda a responsabilidade de ser flexível, aceitando que nem todos os alunos atinjam os objetivos curriculares em simultâneo. Além disso, cabe-lhe a responsabilidade de dar formação a todos os envolvidos no processo educativo.

1.1.3.2. Educação Inclusiva em Portugal: Enquadramento

Tal como referido por Bairrão[87], e à semelhança do que acontecera um pouco por todo o mundo, durante um longo período, em Portugal, as pessoas portadoras de deficiência viviam em ambientes segregados e todos os cuidados que lhes eram prestados tinham lugar nas suas próprias casas ou locais em que se encontravam isolados dos restantes.

Como já referido, esta atitude, resultante da crença de que os indivíduos portadores de deficiência eram incapazes de conviver com os outros e de participar num processo educativo regular, aprendendo como os outros, tinha como base duas ideias: a de que o deficiente era um ser estranho e eventualmente prejudicial e a de que as suas necessidades consistiam em ajuda assistencial e/ ou média.

Deste modo, e seguindo a tendência global, no que respeita à educação, paralelamente às instituições de ensino regular, frequentadas por crianças ditas normais, criaram-se estruturas de ensino especial, organizadas por tipo de deficiência, em que decorriam as *classes especiais*.

[87] Bairrão, J., Felgueiras, I., Fontes, P., Pereira, F., Vilhena, C. (1998). *Os alunos com necessidades educativas especiais: subsídios para o sistema de educação*. (1ª edição). Editorial do Ministério da Educação.

Como defende Bautista[88], começou a verificar-se que, além de motivarem a *segregação*, estas classes não apresentavam vantagens suficientes, dada a ausência de professores especializados, bem como de espaços e equipamentos adequados às reais necessidades dos alunos e que o número de alunos era largamente superior ao recomendado. Além disso, e como referido por Bénard da Costa[89], as crianças e jovens incluídas nestas *classes sociais*, estavam privadas da vida em sociedade e das relações humanas naturais.

De acordo com Correia[90], as primeiras experiências de *Educação Integrada* em Portugal, consistiram na formação de *classes especiais*, criadas pelo Instituto Aurélio da Costa Ferreira, em 1944, destinadas a alunos com problemas de aprendizagem e orientadas por docentes especializados pelo instituto, enquanto um *"espaço educativo aberto, diversificado e individualizado, em que cada criança [pode] encontrar resposta à sua individualidade, à sua diferença"*[91].

Foi na década de 60 que surgiram diligências que tendiam a estender o apoio a crianças e jovens com deficiência integrados em escolas regulares. Estas iniciativas consistiram em programas destinados a alunos com deficiência visual que eram integrados em escolas preparatórias e secundárias das principais cidades do país.

Em Portugal, a *Lei de Bases do Sistema Educativo e o Decreto-Lei 319/91*, de 23 de agosto proclama que toda a criança deve ser tratada em pé de igualdade e de imparcialidade em matéria de educação. No entanto, à medida que a qualidade e quantidade dos programas aumentava, foi necessário proceder-se a um conjunto de mudanças legislativas e educacionais que permitissem que os alunos com NEE pudessem usufruir do mesmo tipo de educação que os seus companheiros ditos normais.

---

[88] Bautista, Rafael (coord.). (1997). *Necessidades educativas especiais*. Ana Escoval (trad.). Saber mais (col.). Lisboa: Dinalivro.
[89] Ibidem p.25.
[90] Correia, Luís de Miranda. (1999). *Alunos com Necessidades Educativas Especiais nas Classes Regulares*. Educação Especial (col.). Porto: Porto Editora, p.19.
[91] Ibidem.

Já nos anos 70, o *Ministério da Educação* assumiu progressivamente o setor da *Educação Especial*, criando, em 1972, as *Divisões do Ensino Especial do Ensino Básico e do Ensino Secundário* (DEEB/DEES). Em 1976, cria as *Equipas de Ensino Especial Integrado*, cujo objetivo era *"promover a integração familiar, social e escolar das crianças e jovens com deficiência."* [92]

Salienta-se, neste ponto, o *Dia Internacional da Bengala Branca*, celebrado no dia 15 de outubro, e estabelecido pela Federação Internacional de Cegos, em 1970. A efeméride tem o objetivo de reconhecer a independência das pessoas com deficiência visual e sua plena participação na sociedade. Simbolicamente, a Bengala Branca representa a independência, a liberdade e a confiança.

Apesar da evolução registada ao longo de duas décadas, pode dizer-se que o conceito de NEE só foi realmente adotado em Portugal no final dos anos 80.

Na década de 90, publicou-se o *Decreto-Lei nº. 319/91* que estabelece a obrigatoriedade do cumprimento da escolaridade por parte de todas as crianças, incluindo as portadoras de deficiência, ao nível da escolaridade básica; bem como gratuitidade do ensino. Este Decreto-Lei responsabiliza, ainda, a escola regular por todos os alunos, prevendo, para esse efeito, as respostas educativas a aplicar no interior da escola e as condições para a exclusão de uma criança do ensino regular.

Em 2008, a 7 de Janeiro, é publicado o *Decreto-Lei n.º 3/2008*, legislação em vigor atualmente. Este Decreto-Lei define os alunos abrangidos pela educação especial, enquadrando-os no grupo a que Simeonsson[93] refere de *baixa-frequência e alta-intensidade*.

[92] Ibidem p.26.
[93] Simeonsson, R. J. (1994). *«Towards an epidemiology of developmental, educational, and social problems of childhood»*. In R. J. Simeonsson (Ed), *Risk, resilience & prevention. Promoting the well-being of all children*. Baltimore. P. H. Brookes.

De forma sucinta, pode dizer-se que integram este grupo todos os alunos que precisam de apoios técnicos e especializados para as suas necessidades educativas, tais como os alunos cegos, com baixa visão, surdos, entre outros.

O referido Decreto-Lei veio assim definir as necessidades dos alunos com limitações congénitas ou adquiridas no âmbito do processo de ensino-aprendizagem, especificando e definindo recursos específicos para alunos com NEE.

Salienta que este documento legal, que atualmente regula o sistema de educação especial a nível nacional, refere que "*[a] educação inclusiva visa a equidade educativa, sendo que por esta se entende a garantia de igualdade, quer no acesso quer nos resultados. No quadro da equidade educativa, o sistema e as práticas educativas devem assegurar a gestão da diversidade da qual decorrem diferentes tipos de estratégia que permitam responder às necessidades educativas dos alunos*."[94]

1.2 - A Educação Inclusiva de Alunos Cegos

1.2.1 – A Educação dos Cegos: Etiologia da Educação e Sistema Braille

Tradicionalmente, a linguagem oral consistia no principal veículo de transmissão de conhecimentos. Após o desenvolvimento da imprensa, o acesso à informação passou a fazer-se, essencialmente, pela linguagem escrita. Contudo, a impressão convencional não está ao alcance de todos, sendo que, por exemplo, os indivíduos cegos não têm a ela acesso.

[94] Decreto-Lei n.º 3/2008, publicado em 7 de Janeiro de 2008.

Tendo em conta os períodos históricos já mencionados, é fácil compreender que a escolarização das crianças cegas é relativamente recente, face à escolarização das crianças ditas normais.

Uma das primeiras tentativas de alfabetizar crianças cegas salientável consistiu na fabricação de caracteres móveis em diversos materiais para gravação de letras em madeira. Esta prática, inventada em 1517 por Francisco Lucas de Saragoça, consistia em revestir uma tábua com cera virgem, na qual se gravavam as letras com um estilete.

Outra tentativa teve como ponto de partida experiências com uma espécie de código cifrado, séries de nós dados em cordas, difundido pelo Padre Terzi, que teria aprendido este código com os Incas.

Por volta de 1815, França estava em guerra e as constantes mensagens que circulavam não podiam ser lidas de noite, já que para tal era necessária a luz, o que despertaria a atenção do inimigo. Em 1819, para solucionar uma problemática inerente à leitura noturna de mensagem bélicas, o oficial de Artilharia Charles Barbier de La Serre, criou um processo de escrita em relevo, que consistia um sistema de símbolos formado pela combinação de doze pontos dispostos em duas filas verticais de seis cada, que pudesse ser lido com os dedos sem necessidade de luz. Salienta-se que os símbolos representavam signos fonéticos e não ortográficos..

Na verdade, o ensino dos cegos apenas se iniciou no século XVIII, graças a Valentin Hauy (1745-1822) que *"entendeu que na educação dos cegos o problema essencial consistia em fazer que o visível se tornasse tangível"*[95].

Foi também Valentin Hauy que defendeu o princípio de que a educação dos cegos não deveria ser diferente da dos normovisuais. Neste sentido, e para conseguir atingir

[95] Lages, J. A. & Baptista, S. (2000). *A Invenção do Braille e a sua importância na vida dos cegos*. Lisboa: Comissão de Braille, p.3.

o seu objetivo, este homem ligado à ciência adaptou o alfabeto, traçado-o em relevo, na esperança de que as letras fossem percetíveis pelos dedos dos cegos.

Contudo, foi a invenção do Braikke, em 1829, que melhorou efetivamente a educação dos cegos.

O sistema Braille foi inventado por Luís Braille, nascido a 4 de janeiro de 1809, numa aldeia francesa. Em 1812, Braille, enquanto brincava na marcenaria de seu pai, feriu-se num dos olhos, o qual veio a infetar e a originar a sua cegueira.

Segundo Lages e Batista[96], Luís Braille frequentou a escola da sua aldeia, bem como a escola que Valentin Hauy tinha fundado para a educação de cegos, *a Instituição Real dos Jovens Cegos*, em regime de internato, a partir de 1819. Os mesmos autores referem ainda que o jovem era *"habilidoso, aplicado e inteligente (...), carácter sério, dele também se pode dizer que era a honradez em pessoa. Espírito metódico e apaixonado pela investigação, nele predominava a imaginação criadora e a mentalidade lógica"*.

No mesmo ano em que Braille foi admitido como aluno da *Real Instituição dos Jovens Cegos*, e segundo os mesmos autores, *"o capitão de artilharia Carlos Barbier de la Serre começou a interessar-se pela escrita dos cegos."*[97] Este, tendo em conta a sua experiência militar e após vários aperfeiçoamentos de um sistema de escrita, introduziu pontos em relevo para transmitir mensagens que pudessem ser lidas por oficiais, em plena escuridão. Foi então que lhe ocorreu colocar esta escrita ao *"serviço dos cegos."* [98] A aplicação deste sistema na Real Instituição permitiu, contudo, verificar tratar-se de um sistema confuso e de difícil compreensão para os cegos.

Tendo como ponto de partida os trabalhos de *Barbier de la Serre,* data de 1829 a primeira publicação de Luís Braille, do *Processo para Escrever as Palavras, a Música e o Cantochão por meio de Pontos, para Uso dos Cegos e dispostos para Eles*. A segunda edição haveria de ser publicada em 1837, na qual se "*confirma o alfabeto*",

[96] Ibidem, p.4.
[97] Ibidem, p.5.
[98] Ibidem, p.6.

se "*normaliza a representação de números*" e se "*constitui o núcleo da musicografia braille dos nossos dias.*" [99]

De acordo com Lages e Batista[100] o Braille começou a usar-se nas aulas para a escrita de exercícios a partir de 1830 e, apesar dos vários aspetos positivos deste sistema na educação dos cegos, a *Instituição Real dos Jovens Cegos* demorou 25 anos a aceitá-lo. Apenas em 1854 o Braille é definitivamente implementado em França.

Segundo Lages e Baptista[101], destacam-se no Braille as seguintes características:

- *"É constituído por 64 sinais, obtidos pela combinação sistemática de seis pontos que (...) se agrupam em duas filas verticais e justapostas de três pontos (...)"*.
- *"Cada sinal não excede o campo táctil e pode ser identificado com rapidez, pois (...) adapta-se exatamente à polpa do dedo"*.
- *"Na leitura qualquer letra ou sinal braille é apreendido em todas as suas partes ao mesmo tempo"*.
- Nos leitores experientes, o *"único movimento que se observa é o da esquerda para a direita, ao longo das linhas. (...) Em alguns leitores a mão esquerda avança até mais ou menos metade da linha, proporcionando assim um notável aumento de velocidade na leitura"*.

Assim, para os autores, o Braille é *"…um modelo de lógica, de simplicidade e polivalência, que se tem adaptado a todas as línguas e a toda a espécie de grafias. Com a sua invenção, Luis Braille abriu aos cegos, de par em par, as portas da cultura, arrancando-os à cegueira mental em que viviam e rasgando-lhes horizontes novos na ordem social, moral e espiritual."*[102]

Apesar da relevância deste sistema de escrita, a evolução das novas tecnologias motivou, nos últimos anos, um decréscimo de utilização do Braille, uma vez que

[99] Ibidem, p.8.
[100] Ibidem, p.6.
[101] Ibidem, p.13.
[102] Ibidem, p.3.

passaram a existir muitos livros sonoros; existe pouca bibliografia adequada às necessidades atuais dos leitores; e há falta hábitos de leitura. Note-se, neste ponto, que um leitor que lê pouco Braille, sentirá maiores dificuldade em produzir uma escrita coerente, comparativamente com o cego que lê Braille com frequência.

Tal como é descrito pela DGIDC, cerca de *"180 anos após a sua criação, e não obstante os prodigiosos contributos das novas tecnologias da informação e da comunicação, o Sistema Braille mantém intacto o seu estatuto de recurso indispensável para a alfabetização e educação das crianças cegas"* [103], por isso é fundamental valorizá-lo e tomar algumas precauções para que as Tecnologias de Informação não o tornem apenas uma *ferramenta* adicional no ensino de pessoas cegas. Na verdade, o sistema de escrita Braille deve ser encarado como o sistema de escrita que permite aos alunos cegos ler e escrever na mesma medida em que o fazem os seus colegas de turma.

Assim sendo, e apesar das limitações deste sistema e da sua crescente substituição pelo uso das novas tecnologias, é necessário fomentar a aprendizagem e o uso do Braille, desde que ele seja necessário para a inclusão social, cultural, profissional do indivíduo.

Convém referir que, ao longo dos tempos, surgiram outros sistemas de escrita para cegos, merecendo especial destaque, o Ballu e o Moon.

O Ballu consiste num processo de escrita que permite escrever a letra de imprensa através de pontos, utilizando-se réguas e punções próprios (processo análogo ao da escrita do Braille). Este sistema de escrita, cujo nome deriva do apelido do seu inventor Victor Ballu, discípulo de Luis Braille, que defendia a teoria de que aos cegos deveria ser proporcionado um sistema idêntico ao das pessoas com visão. Este foi imediatamente adotado pelas pessoas cegas como meio de comunicação gráfica com as pessoas normovisuais, havendo mesmo quem o utilize, ainda hoje, em vários países, incluindo em Portugal.

[103] Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Alunos cegos e com baixa visão – Orientações curriculares*. Ministério da Educação, p.32.

No que diz respeito ao sistema Moon, trata-se de um sistema de escrita em relevo, muito laborioso, por meio de pontos que representam os caracteres do alfabeto latino. Este sistema, ainda hoje, é utilizado em Inglaterra, sendo utilizado preferencialmente por pessoas que cegam tardiamente.

Atualmente, em Portugal, não existem quaisquer condicionalismos em relação ao uso do sistema Braille, a nível dos ensinos Básicos e Secundários, sendo do domínio comum, que quer dos alunos cegos, quer dos professores do Ensino Especial. No que respeita ao ensino Superior, a maior parte das provas a serem apreciadas por júri, são geralmente dactilografadas.

A dactilografia, tal como o gravador, surgem como um complemento ao Braille, podendo ser utilizado com colegas, amigos, ou professores do ensino regular que não conheçam o sistema Braille.

1.2.2 – Cegueira: Definições e Conceitos

Para Faye, citado por Martín e Bueno[104], *"os termos défice visual, visão subnormal, baixa visão, visão residual e outros, referem-se a uma redução da acuidade visual central ou a uma perda subtotal do campo visual, devida a um processo patológico ocular ou cerebral"*

Segundo Martins[105], *"as pessoas cegas [são] aquelas que são socialmente identificadas como tal e que, grosso modo, se conflui com as pessoas que não conseguem tirar partido da visão para a execução de qualquer atividade"*.

[104] Martín, M. B., Bueno, T., Deficiente visual e ação educativa, In Bautista, Rafael (coord.). (1997). Necessidades educativas especiais. Ana Escoval (trad.). *Saber mais (col.).* Lisboa: Dinalivro.
[105] Martins, Bruno Sena. (2006). E se eu fosse cego? Narrativas silenciadas da deficiência. *Saber imaginar o social (col.).* Porto: Afrontamento, p.130.

A Organização Nacional dos Cegos de Espanha (ONCE) considera ser cego aquele que *"não consegue ver com nenhum dos olhos a 1/20 da visão normal segundo a escala de Wecker, e quando não consegue contar os dedos das mãos a uma distância de 2,25 metros com correção de lentes"*.

De acordo com Amiralian, citado em Nunes e Lomônaco[106], *"a primeira preocupação com a cegueira foi a da medicina, que a percebia como uma consequência de doenças e procurava minimizar essa deficiência com o objetivo de tornar a pessoa normal novamente"*.

Para os mesmos autores[107], a *"cegueira é uma deficiência visual, ou seja, uma limitação de uma das formas de apreensão de informações do mundo externo – a visão. Há dois tipos de deficiência visual: cegueira e baixa visão"*

A *Organização Mundial de Saúde* (OMS), preocupada com a ausência de critérios que definissem que pessoas poderiam usufruir de determinados apoios sociais, tais como benefícios fiscais, baseou-se em critérios clínicos para definir a deficiência visual. Assim, do ponto de vista clínico, considera-se deficiente visual aquele que apresente significativas limitações ao nível da *acuidade visual*[108] e do *campo visual*[109]. A capacidade visual é avaliada através destas medidas, contudo percebeu-se posteriormente que alguns cegos, com a mesma medida de acuidade visual, apresentavam capacidades visuais distintas. Note-se que algumas pessoas consideradas clinicamente cegas conseguiam, com a pouca visão que tinham, ler braille com os olhos para apreender e conhecer o mundo, o que levou os especialistas a alterar a forma como eram diagnosticados os indivíduos cegos.

---

[106] Nunes, S., Lomônaco, J. F. B. (2010). O aluno cego: preconceitos e potencialidades. In *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional*. Volume 14, número 1 , p.55.
[107] Ibidem.
[108] Medida clínica de nitidez da visão para a discriminação de pormenores a uma distância específica – ver Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Alunos cegos e com baixa visão – Orientações curriculares*. Ministério da Educação, p.11.
[109] Distância angular abrangida quando olhamos um ponto no infinito mantendo estáticos os olhos e a cabeça. A parte central, abrangida simultaneamente por ambos os olhos, corresponde ao campo visual central. O campo periférico refere-se à restante área, de ambos os lados do campo central, só abrangida por um dos olhos – ver ibidem.

Assim, a partir de 1970, começaram a ser avaliadas as formas de perceção dos indivíduos: a forma como estes apreendem o mundo (por meio do tato, do olfato, da cinestesia, da visão, ou outro). Se um individuo apreender, embora tendo limitações da visão e conseguir utilizar o resíduo visual de forma satisfatória, então o seu diagnóstico é de baixa visão.

Tendo em conta o referido por Ladeira e Queirós[110], a medida clínica da acuidade visual (AV) é a relação entre a distância a que a escala de Snellen[111] é colocada e a linha de símbolos mais pequenos que a pessoa é capaz de ver com ambos os olhos. Assim, numa escala de Snellen, o valor de 20/200 significa que a pessoa é capaz de discriminar objetos a 6 m (20 pés10) [112], enquanto uma pessoa com visão normal o faz a 60 m (200 pés).

A tabela que se segue apresenta os equivalentes da notação Snellen no sistema decimal utilizado na Europa.

Decimal	20 pés	6 metros
10/10 visão normal	20/20	6/6
9/10		
8/10	20/25	6/8
7/10	20/30	6/9
6/10		
5/10	20/40	6/12
4/10	20/50	6/16
3/10		
2/10	20/100	6/32
1/10	20/200	6/60

Tabela 1: Equivalentes da notação Snellen no sistema decimal utilizado na Europa (Tabela extraída da DGIDC[113])

[110] Ladeira, F. & Queirós, S. (2002). Compreender a Baixa Visão. *Apoios educativos (col.)*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica.
[111] Nome atribuído em homenagem ao oftalmologista holandês Herman Snellen, que desenvolveu a tabela de cálculo da AV em 1862.
[112] Pé – unidade de medida do sistema americano, equivalente a 30 cm.
[113] Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Alunos cegos e com baixa visão – Orientações curriculares*. Ministério da Educação, p.19.

Quando a acuidade visual está afetada, as imagens são vistas de forma turva e com baixo contraste, o que complica a perceção dos detalhes. Os indivíduos cuja acuidade visual se encontra afetada veem-se confrontados com grandes dificuldades nas atividades que exigem uma visão de detalhe, como ler um livro, entre outras[114].

Quando a área de maior acuidade visual está comprometida, são também as atividades que necessitam de visão de pormenor e de detalhe aquelas que se encontram mais limitadas. As alterações no campo visual podem consistir na existência de escotomas[115] ou na ausência total de visão central.

Por outro lado, caso seja o campo periférico a encontrar-se reduzido, a acuidade visual mantém-se inalterada na zona de maior definição da retina. Aí, as maiores dificuldades centram-se ao nível da mobilidade, pelo que é possível haver necessidade do uso de bengala para a deslocação, mas ser possível ler um livro impresso sem ampliação.

Para a Organização Mundial de Saúde, citada em Ladeira e Queirós[116], *"a deficiência visual está organizada em cinco categorias, sendo a 1 e a 2 relativas a situações de baixa visão, enquanto que a 3, 4 e 5 se referem a situações de cegueira"*[116]:

1 – <u>Moderada</u>: Acuidade Visual (AV) binocular corrigida entre 3/10 e 1/10, com um campo visual de pelo menos 20º.

2 – <u>Grave</u>: AV binocular corrigida entre 1/10 e 1/20.

3 – <u>Profunda</u>: AV binocular corrigida entre 1/20 e 1/50, ou com um campo visual inferior a 10º mas superior a 5º.

---

[114] Ibidem.

[115] Escotomas são áreas da retina com reduzida sensibilidade à luz e que, por isso, funcionam como pontos "cegos".

[116] Ladeira, F.; Queirós, S. (2002). Compreender a Baixa Visão. *Apoios educativos (col.)*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica, pp.19-20.

4 – Quase total: AV binocular inferior a 1/50, com perceção luminosa preservada ou campo visual inferior a 5º.

5 – Total: cegueira absoluta com ausência de perceção luminosa.

Pelo exposto, é possível afirmar que a cegueira se divide em dois grandes grupos:

1 - aquele que abrange indivíduos com deficiência visual que, apesar de uma redução significativa da capacidade visual, possui resíduos que possibilitam ler e escrever a negro e ter êxito total em determinadas tarefas diárias;

2 - aquele que abrange as pessoas que não têm nenhum resíduo visual ou que, apesar de o terem, apenas lhes é possível *"orientar-se em direção à luz, perceber volumes, cores e ler grandes títulos, mas não permite o uso habitual da leitura/escrita, mesmo a negro"*[117].

1.2.3 – Cegueira: Dimensão em Portugal

De acordo com os *Censos de 2001*, o primeiro levantamento censitário em que o tema da deficiência foi observado, acredita-se que haja em Portugal cerca de 166 mil pessoas com algum tipo de deficiência visual.

Existem em Portugal 636 059 pessoas portadoras de deficiência, ou seja 6,1% da população. No que respeita à deficiência visual, esta corresponde a 25,7% do total das deficiências, valor mais significativo que as restantes: a motora 24,6%, a auditiva 13,2%, a mental 11,2%, a paralisia cerebral 2,4% e outras deficiências 23%[118].

[117] Martín, M. B., Bueno, T., Deficiente visual e ação educativa, In Bautista, Rafael (coord.). (1997). Necessidades educativas especiais. Ana Escoval (trad.). *Saber mais (col.).* Lisboa: Dinalivro.
[118] Martins, Bruno Sena. (2006). E se eu fosse cego? Narrativas silenciadas da deficiência. *Saber imaginar o social (col.)*. Porto: Afrontamento.

Apesar da expressividade dos valores apresentados, Martins[36] defende que o projeto *Quanti*, do *Secretariado Nacional de Reabilitação e Integração das Pessoas com Deficiência* (SNRIPD), realizado entre 1993 e 1995, estimava existirem 905 488 pessoas com alguma deficiência, número total muito diferente do estimado pelos *Censos 2001*.

1.3 – Requisitos prévios para o Ensino a Alunos Cegos

1.3.1. Inclusão de alunos cegos: Estratégias de organização e de gestão da sala de aula

Amiralian, citado por Nunes e Lomônaco[119], considera existirem duas conceções de inclusão do deficiente visual:

1 - Por um lado, referem a tentativa de *normalização*, isto é a implementação de programas cujo objetivo assenta em aproximar o aluno cego do normovisual, prática comum nos Estados Unidos e alvo de inúmeras críticas, tendo em conta que esta tentativa de aproximação não tem em conta a identidade do aluno cego nem as especificidades inerentes à sua condição.

2 - Por outro lado, referem a valorização do aluno portador de deficiência visual, enquanto ser individual, mas também como membro de uma comunidade, tendo em conta a sua forma de apreender o mudo que o rodeia, ou seja, tudo o que possa fomentar o seu desenvolvimento.

[119] Nunes, S., Lomônaco, J. F. B. (2010). *O aluno cego: preconceitos e potencialidades*. In *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional*. Volume 14, número 1,pp. 54-60.

Contudo, e de acordo com a DGIDC[120], *"qualquer intervenção educativa requer uma avaliação rigorosa que permita perceber como é que determinado aluno utiliza a visão"* [121]. Esta avaliação deve ser realizada por uma "*equipa pluridisciplinar, que inclua o docente de educação especial, e tem como objetivo perceber o que vê e como vê o aluno, o que pode ser feito para promover a aprendizagem usando a visão*".

No que diz respeito ao ensino, considera-se que é possível aos alunos deficientes visuais acederem à maioria dos objetivos e conteúdos definidos nos programas curriculares comuns, desde que lhes sejam proporcionadas formas diferenciadas e adequadas de acesso ao currículo, processo de diferenciação que cabe aos professores de cada disciplina. Tal como é defendido pela DGIDC[122], "*mais do que eliminar objetivos e conteúdos torna-se necessário, na maioria das situações, expandir o currículo, introduzindo áreas curriculares específicas que permitam responder às necessidades de quem não recebe informação visual e precisa de aprender a realizar tarefas ou atividades nas quais a visão desempenha um papel determinante"*.

A adequação do processo de ensino e de aprendizagem tem como finalidade facilitar o acesso de todos os alunos ao currículo, à participação social e à vida autónoma. Por isso, e segundo Bautista[123], *"[a]s adaptações curriculares são a mais importante estratégia de intervenção na resposta às necessidades educativas especiais (...); podem referir-se tanto a modificações na metodologia como nas atividades de ensino e aprendizagem; na temporalização, com trocas no tempo previsto para alcançar os objetivos, sendo estes os mesmos que os dos outros alunos; na prioridade a determinados objetivos ou conteúdos; na eliminação e/ou introdução de algum objetivo ou conteúdo*".

---

[120] Ibidem.
[121] Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Alunos cegos e com baixa visão – Orientações curriculares*. Ministério da Educação.
[122] Ibidem.
[123] Bautista, Rafael (coord.). (1997). Necessidades educativas especiais. Ana Escoval (trad.). *Saber mais (col.)*. Lisboa: Dinalivro, p.15.

Uma vez mais, segundo a DGIDC[124] o ensino pressupõe adequações assentes nos princípios da diferenciação e da flexibilização ao nível do currículo aos níveis das áreas curriculares e disciplinas; dos objetivos e das competências; dos conteúdos; das metodologias; e das modalidades de avaliação.

No que concerne à intervenção dos professores, esta terá que compreender estratégias de diferenciação pedagógica e uma intervenção especializada, o que implica uma prática diversificada de estratégias, atividades e métodos, tal como referido por Puigdellívol[125] : *"La escuela es una realidad viva. Todo lo que sucede en ella tiene un sentido. El proceso de adecuación curricular consiste en encontrarlo y en hacernos conscientes paulatina y colectivamente de la auténtica intencionalidad de nuestra actividad educativa, de sus resultados, y, a partir de aquí, planificar las acciones más adecuadas y mejorarla."*

Salienta-se que, no caso dos alunos cegos, a necessidade de diferenciação de estratégias e de materiais didáticos a utilizar revela-se fundamental à sua aprendizagem, permitindo ao aluno aceder a informação que, com uso único das estratégias e materiais usuais lhes está vedada.
Deste modo, e seguindo as indicações quer da DGIDC[126], quer de Ladeira e Queirós[127], apresentam-se algumas sugestões que podem ajudar o professor na execução das suas aulas[128], a par das adequações curriculares:

1 - No que respeita ao <u>contexto de sala de aula</u>, e tendo em conta a presença de alunos cegos, deve ter-se em consideração os seguintes aspetos:

[124] Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Alunos cegos e com baixa visão – Orientações curriculares*. Ministério da Educação.
[125] Puigdellívol, Ignasi. (1996). Programación de aula y adecuación curricular – el tratamiento de la diversidad. (2ª edição). *El Lápiz (col.)*. Barcelona: Editorial Grao.
[126] Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Alunos cegos e com baixa visão – Orientações curriculares*. Ministério da Educação, pp.18-19.
[127] Ladeira, F.; Queirós, S. (2002). Compreender a Baixa Visão. *Apoios educativos (col.)*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica, pp.19-20.
[128] As sugestões apresentadas são unicamente linhas orientadoras, podendo nem todos os alunos delas necessitar. Normalmente tal necessidade tem que ver com as características de cada um dos alunos (aluno cego ou aluno amblíope).

- Ajudar o aluno a reconhecer o espaço físico em que se encontra, dando-lhe a conhecer a disposição do mobiliário e equipamentos na sala de aula;
- Ajudar o aluno, sempre que necessário, a deslocar-se na sala de aula, bem como nos momentos de entrada e de saída;
- Alertar o aluno sempre que ocorram alterações na disposição da sala de aula;
- Ter em conta as especificidades do aluno na elaboração da planta da sala de aula;
- Providenciar o material necessário às suas especificidades, tais como mês ou estirador suficientemente grande para acomodar todo o material necessário, máquina Braille, papel, computador, calculadora sonora, entre outros;
- Verbalizar de forma simples, clara e pormenorizada tudo o que ocorre na sala de aula e todos os conteúdos;
- Ler em voz alta enquanto escreve no quadro e falar de forma pausada, assegurando-se de que o aluno acompanha o processo de escrita;
- Ter em conta que o aluno cego não vê o gesto ou outras formas não-verbais de comunicação;
- Recorrer a materiais didáticos adequados à apresentação de novos conceitos;
- Utilizar com normalidade o verbo ver, olhar, observar, excetuando-se situações em que tal impeça a compreensão ou a realização de tarefas;
- Fornecer ao aluno em braille, relevo ou em suporte digital todo o material didático que tenha sido fornecido aos outros alunos da turma;
- Dar ao aluno o tempo necessário para que possa realizar tarefas, consoante o seu ritmo de execução das mesmas.

2 - No que concerne à elaboração de <u>momentos de avaliação</u>, o docente deve ter em consideração:

- O tempo utilizado regularmente pelo aluno na execução de tarefas, não elaborando testes cuja extensão não permita avaliar, efetivamente, a aquisição de conhecimentos;
- Utilizar, sempre que necessário, relevos ou exercícios em que não seja necessário descrever representações e figuras. Caso tal não seja possível, descrever de forma

clara e o mais pormenorizado possível todas as representações e figuras que surjam;

- Providenciar, com a devida antecedência, a transcrição para Braille ou a sua adaptação em suporte digital das respetivas fichas de avaliação;
- Proceder à leitura da ficha de avaliação com o aluno antes do início da realização do mesmo, caso seja necessário.

1.3.2. Inclusão de Alunos Cegos: Recursos pedagógicos adequados

Ao longo da sua escolaridade, o aluno cego precisa de materiais adequados à sua aprendizagem, tendo em conta as limitações inerentes à sua deficiência, isto é, de materiais adaptados para os níveis tátil-cinestésico, auditivo, olfativo e gustativo – com especial destaque para materiais gráficos táteis e para o Braille.

Garantir o acesso à mesma informação que todos os elementos da turma passa, inevitavelmente, pela correta adequação dos materiais. Neste contexto, Lowenfeld citado por Horton[129] classifica os diferentes materiais utilizados pelos deficientes visuais, referindo:

- Materiais que são usados na sua forma original;
- Materiais que necessitam de alguma modificação ou adaptação;
- Materiais que são construídos especificamente para alunos cegos;
- Materiais que permitem experiências de substituição.

Apedar da reconhecida necessidade de acesso a estes materiais, muitas vezes o mesmo dá-se tardiamente. Por um lado, os manuais em Braille, por exemplo, chegam às escolas muito depois do início do ano escolar; por outro lado, a ausência de

[129] Horton, J. Kirk, (2000). *Educação de alunos deficientes visuais em escolas regulares*. Jorge Casimiro (trad.). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, pp.113-117.

formação dos docentes impede, com frequência, que lhes seja possível adaptar corretamente os materiais existentes, procedendo, por exemplo, à transcrição para Braille do manual até que este seja enviado para as escolas. Como resultado destas lacunas "*verificam-se,* [como refere Martins[130]], *não apenas taxas de abandono escolar que tendem a ser elevadas entre as pessoas cegas, mas também carências de aprendizagem, de saberes científicos necessários a quem é cego, sendo que por vezes, devido a algum facilitismo, as competências adquiridas nem sequer correspondem aos níveis de escolaridade obtidos pelos alunos*".

Martins cita ainda um dirigente da ACAPO (*Associação dos Cegos e Amblíopes de Portugal*), Fernando Jorge, ele próprio cego e professor de apoio educativo ligado à deficiência visual, para evidenciar algumas lacunas no que diz respeito aos recursos e materiais disponíveis nas escolas no ensino de alunos cegos: "*É claro que, perante tantas contradições e tantos problemas no apetrechamento das escolas com meios materiais, por vezes é natural que se caia no desânimo. (...) manuais que chegam muitos meses depois de serem precisos, transcrições para Braille feitas com a conhecida máquina Perkins, pouco cuidado com o ensino das Técnicas de Orientação e Mobilidade e com a utilização de meios informáticos. (...) O que tem acontecido com os alunos deficientes visuais, e em especial aqueles que usam Braille, é estarem na completa dependência do Sistema, o qual é claramente ineficaz, tanto ao nível da produção de material adaptado como no âmbito do apoio por pessoal qualificado*"[131].

Assim, e tendo em conta as lacunas referidas, é fundamental, para transmissão da informação em falta, dá grande importância aos restantes sentidos: tato, audição, paladar e olfato, em especial aos primeiros dois.

O avanço das Tecnologias de Informação constitui uma forma de colmatar parcialmente as referidas lacunas, pois é possível facilitar o acesso à informação por parte dos cegos, *"em particular os computadores e os scanners, complementados pelos leitores de ecrã e pelas linhas Braille, [e que inclusivamente] são hoje*

[130] Martins, Bruno Sena. (2006). E se eu fosse cego? Narrativas silenciadas da deficiência. *Saber imaginar o social (col.)*. Porto: Afrontamento, p.141.
[131] Ibidem.

considerados instrumentos fundamentais na comunicação das pessoas portadoras de deficiência visual com os normovisuais"

Contudo, tal como concluídos por Lopes[132], *"[n]o caso das pessoas com deficiência visual o facto de utilizarem sistematicamente o gravador ou o programa de voz, ou seja, terem por base unicamente o método de estudo auditivo, está a ter grandes repercussões ao nível das construções de frases e erros ortográficos, porque a pessoa não tem o contacto direto com a palavra"* pelo que o recurso às tecnologias de informação deve ser devidamente controlado.

Seguem-se alguns recursos disponíveis para alunos cegos:

Máquina Perkins:

Máquina que serve para escrever em sistema em Braille e que permite escrever um máximo de trinta e uma linhas de quarente e dois caracteres. É considerado o recurso fundamental para a aprendizagem de Braille, em especial durante a frequência da escola primária.

Mapas em relevo:

Mapas em material plástico, com relevos dos principais acidentes geográficos e com legendas em braille.

Leitor de ecrã:

O leitor de ecrã (JAWS, ou mesmo o HAL também existente no mercado Português), faz a leitura do ecrã e envia-o para um dispositivo. Esse dispositivo tanto pode ser um sintetizador de fala como pode ser uma linha braille.

[132] Lopes, Carlos. (2009). *Exigência dos cegos portugueses*. Acedido em 13 de maio, 2013, em http://www.pcd.pt/noticias/ver.php?id=7309.

Sintetizadores de voz:

Ligados a um computador, permitem a leitura de informações exibidas num monitor. De entre os diferentes sintetizadores de vozes produzidos noutros países, destaca-se em Portugal o *sistema Daisy* (Digital Accessible Information System), o qual foi originariamente desenvolvido na Suécia em 1994.

Linha Braille:

A Linha Braille, é um hardware diretamente ligado ao computador e que exibe em Braille a informação visível no monitor.

Salienta-se, neste ponto, a frequente ausência destes materiais nas escolas, bem como o seu elevado custo, o que implica, em termos práticos, que nem todos os alunos cegos possam aceder a todos eles.

Salienta-se, ainda, que, desde 2005, são produzidos em Portugal manuais escolares e outros livros em formato *Daisy, isto é,* formato áudio-digital com funcionalidades acrescidas para pessoas cegas ou com baixa visão. Esses livros resultam de uma parceria estabelecida entre o Ministério da Educação e Ciência (MEC), a Fundação Vodafone e a Porto Editora e, segundo a página digital do MEC, apresentam as seguintes vantagens:

- a sincronização entre a informação áudio e a informação escrita que permite simultaneamente ler e ouvir ler ;
- a possibilidade de manipular e ajustar a cada utilizador a velocidade de leitura áudio, o tamanho dos carateres e o contraste entre as cores do texto no ecrã;
- a possibilidade de localizar informação textual, de colocar marcadores no texto que permitem aceder diretamente aos mesmos, de inserir comentário e notas pessoais e de navegar ao longo dos documentos por capítulo, subcapítulo e secções.

Salienta-se, também, que em 2013, o MEC comunicou que os "*enunciados das provas finais de ciclo e dos exames finais nacionais dirigidos a alunos cegos e com baixa visão (...) [seriam], em 2013, apresentados em formato Daisy, ou em documento com Entrelinha 1,5, em formato PDF*", bem como que o sistema *Daisy* é "*uma interessante opção de acesso à leitura no âmbito da realização de atividades na sala de aula*", tendo, para tal, concebido um plano nacional de acompanhamento às escolas, "*no âmbito do qual os profissionais que integram os Centros de Recursos TIC para a Educação Especial (CRTIC) assumem a primeira linha de apoio aos docentes que trabalham diretamente com esses alunos, designadamente, aos professores de educação especial e professores titulares de turma.*"[133]

Estes avanços não constituem a resolução do problema, nem atenuam a falta de formação docente para o ensino de alunos cegos num sistema inclusivo, contudo, representam avanços significativos e fundamentais para o efeito.

[133] Ministério da Educação e Ciência. *Implementação do Sistema Daisy: Plano Nacional de acompanhamento às escolas*. Acedido a 2 de Abril de 2013, em http://www.portugal.gov.pt/pt/os-ministerios/ministerio-da-educacao-e-ciencia/mantenha-se-atualizado/20130103-mec-daisy.aspx.

CAPÍTULO II - A GRAFIA MATEMÁTICA BRAILLE

2.1 - Grafia Braille: Conhecimento Prévio

O conhecimento prévio da grafia matemática Braille (GMB) por parte de qualquer professor é indispensável ao desenvolvimento bem-sucedido de todo o processo de ensino-aprendizagem do aluno cego. No entanto, não é essa a realidade do nosso sistema educativo, num século que se diz inovador e progressivo e em que a formação neste âmbito é praticamente nula.

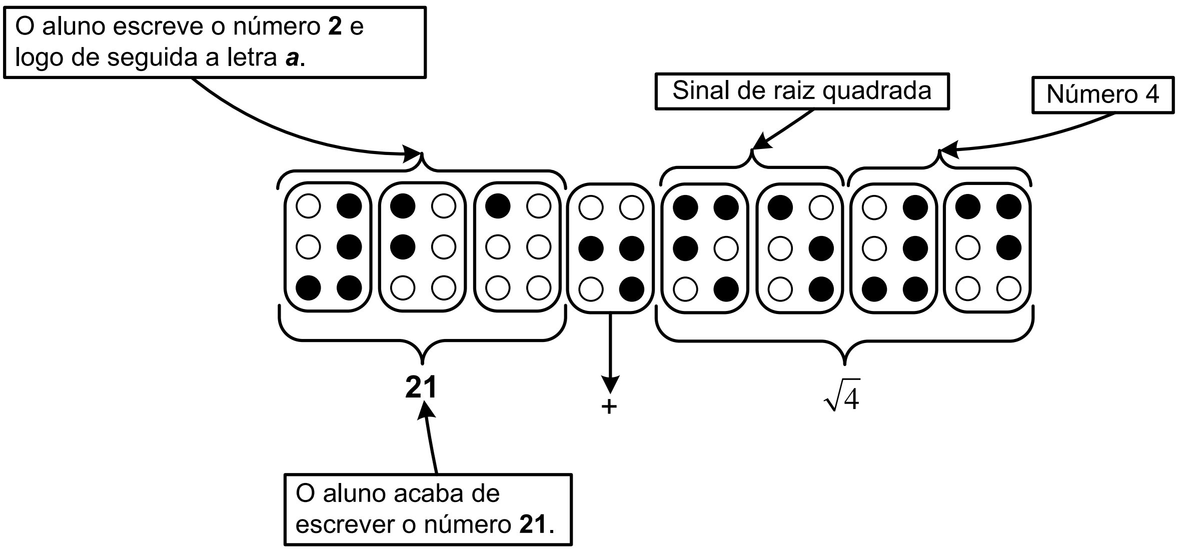
Basta alguma sensibilidade para se perceber que um professor que não possua conhecimentos respeitantes à GMB pouco poderá fazer dentro de uma sala de aula relativamente à aprendizagem dos alunos cegos, uma vez que estes se encontram limitados a ouvir o que o professor diz e, consequentemente, apenas poderão escrever aquilo que ouvem, com a agravante da possibilidade de perda de informação entre o que é dito e o que é posteriormente escrito, pelo que muitas das vezes os alunos nada escrevem ou escrevem algo diferente daquilo que ouviram e cujo significado poderá ter sido completamente alterado. Além disso, o professor que não conhece a GMB não pode acompanhar a resolução das atividades por parte do aluno, perdendo a possibilidade de apoiá-lo e orientá-lo na mesma.

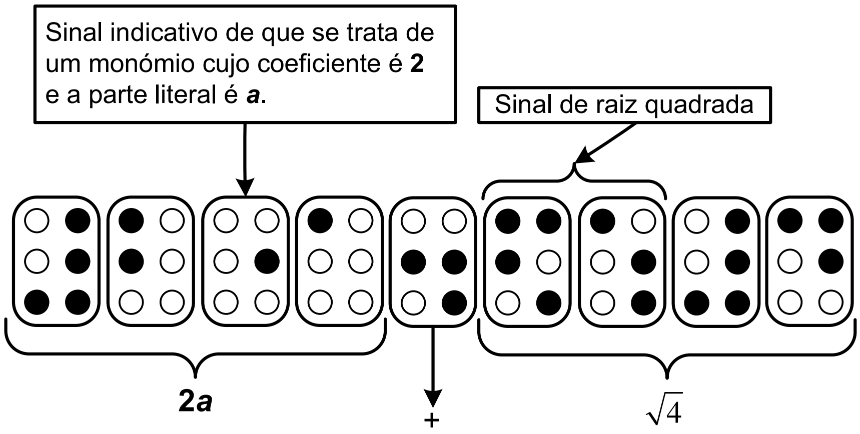
Tal situação é recorrente e poderá ser evidenciada nos exemplos que se seguem:

Num primeiro caso, o professor solicita aos seus alunos que escrevam no seu caderno diário a simples expressão algébrica $2a+\sqrt{4}$. Perante o solicitado, o aluno terá de conhecer o sinal de adição, saber que 2*a* é 2 a multiplicar por *a* e, por último, saber escrever o radical ou símbolo de raiz quadrada.

O conhecimento do sinal de adição não deverá ser problemático nesta fase do processo, consistindo um pré-requisito para o ciclo de ensino em estudo. O mesmo acontece com o símbolo de raiz quadrada, uma vez que basta reconhecer a sua linguagem simbólica. Contudo, é no início do 3.º Ciclo, 7.º ano de escolaridade, que os alunos começam a desenvolver o conceito de *variável* e a convenção de que no produto de um número por uma letra, *variável* ou *incógnita* é possível a eliminação do sinal de multiplicação e, neste aspeto, poderão surgir dificuldades.

Se o aluno não sabe que *2a* corresponde ao produto de 2 por *a* e se o professor não sabe que tal sinal não pode ser eliminado na escrita Braille, pois ao escrever 2*a* o aluno está a escrever o número 21, o professor está inconscientemente a induzir o aluno em erro.





Num segundo caso, o professor requer que os alunos redijam a seguinte expressão: $\frac{x+3}{5}$ e calculem o valor da expressão para x = 7.

A correta leitura de expressões matemáticas é fundamental para todos, sendo ainda mais notória, quando se está perante alunos cegos.

Logo no início da respetiva leitura, o professor terá obrigatoriamente de alertar para o facto de o numerador ser composto por $x + 3$ e o denominador composto por 5, ou então alertar o aluno para a necessidade do uso de parênteses auxiliares para mostrar ao aluno a exata constituição dos termos da fração em questão. Caso contrário, o aluno tendencialmente irá utilizar o sinal de divisão e passará a escrever uma expressão cujo resultado em nada traduz o que lhe foi pedido.

Num terceiro caso, o professor expõe um problema geométrico em que o aluno tem a necessidade de escrever um dado comprimento, como por exemplo 3 centímetros. Perante esta situação, o aluno terá a tendência em escrever 3cm, pelo que o professor deverá alertá-lo para a obrigatoriedade da utilização do ponto 5 entre o número e a unidade de medida, caso contrário o aluno estará a redigir 33m, isto é, 33 metros, alterando, inadvertidamente, o significado do enunciado apresentado.

Assim, como poderá o aluno resolver corretamente questões desta natureza e como poderá o professor, não habilitado para o efeito, desenvolver qualquer espécie de metodologia ou estratégia ao desenvolvimento das competências do aluno? Serão então aulas do “faz de conta”?

2.2 – Grafia Braille: Célula e Alfabeto

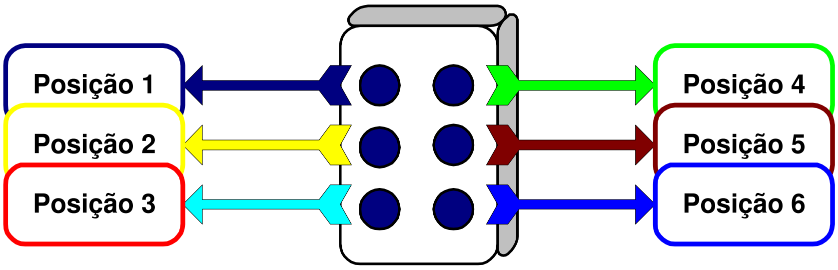
A célula Braille é constituída por 6 pontos de preenchimento, permitindo 63 combinações. Alguns consideram a célula vazia como um símbolo também, totalizando 64 combinações. Assim, podem-se designar combinações de pontos para todas as letras e para a pontuação da maioria dos alfabetos.

Cada ponto da célula recebe um número de identificação de 1 a 6, iniciando no primeiro ponto superior à esquerda, e terminando no último ponto inferior à direita, no sentido vertical.

O Braille é lido da esquerda para a direita, com uma ou ambas as mãos. Vários idiomas usam uma forma abreviada de braille, na qual certas células são usadas no lugar de combinações de letras ou de palavras frequentemente usadas.

Para uma melhor perceção relativamente à composição da célula Braille, observemos o esquema seguinte:

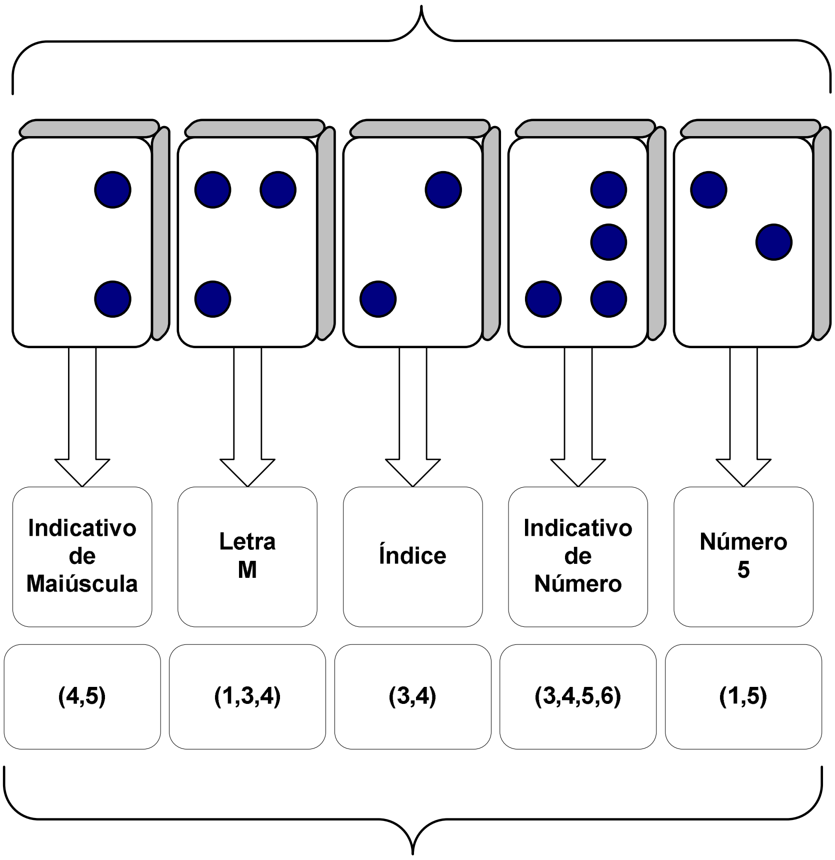
CÉLULA BRAILLE



As diferentes posições permitem orientar o aluno:

Situação: O aluno pretende saber como deverá representar o *Conjunto dos Múltiplos de cinco*.

A representação em Braille será:



Como deve ler-se ao aluno

2.3 – Alfabeto Braille: Estratégia de ensino- aprendizagem

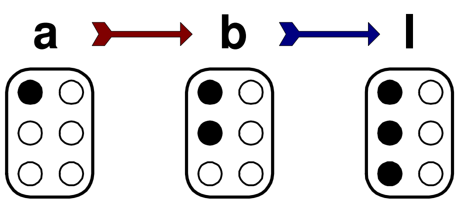
Neste ponto, pretende-se apresentar uma estratégia de ensino/ aprendizagem do alfabeto Braille, tendo em conta a ausência de formação docente nesta área e a possibilidade de os professores se deparem com alunos que, ainda que frequentadores do 3.º Ciclo do Ensino Básico, não dominem este processo de escrita por motivos diversos, como, por exemplo, a perda recente de visão.

A presente estratégia assenta na sequenciação de letras, permitindo uma maior facilidade de aprendizagem do alfabeto.

<u>ENSINO DO ALFABETO BRAILLE</u>

<u>1.ª Sequência de letras:</u>

Letras:

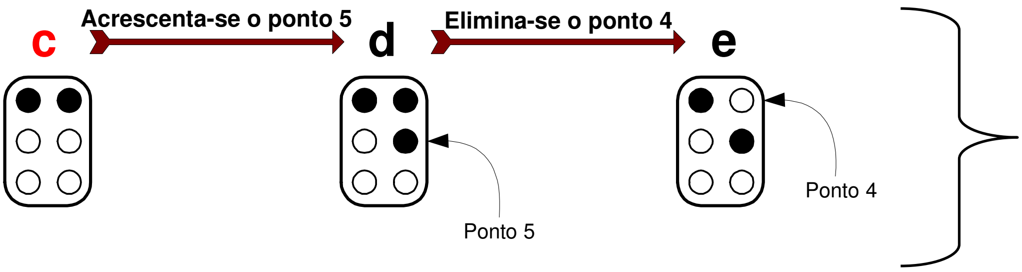


Já sei as letras:
A
B
L

Atenção: *Jogamos apenas com a coluna da esquerda da célula Braille*

2.ª Sequência de letras:

Letra base: **c**



Já sei as letras:

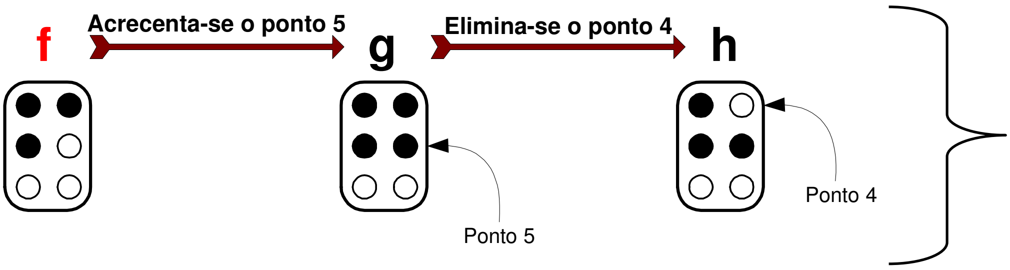
C

D

E

3.ª Sequência de letras:

Letra base: **f**



Já sei as letras:

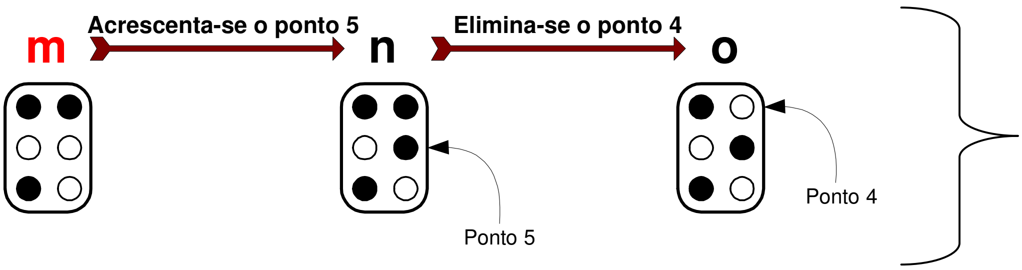
F

G

H

4.ª Sequência de letras:

Letra base: **m**



Já sei as letras:

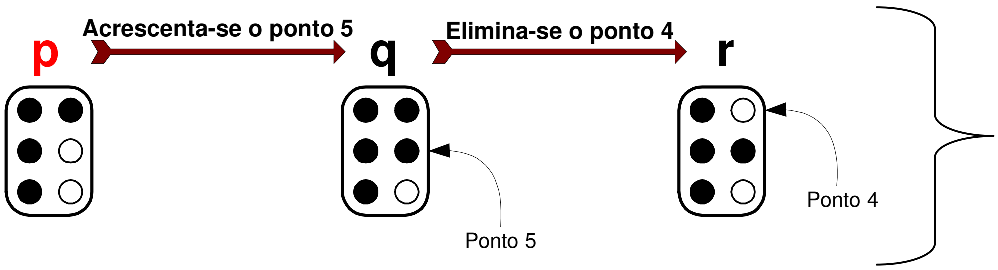
M

N

O

5.ª Sequência de letras:

Letra base: **p**



Já sei as letras:

P

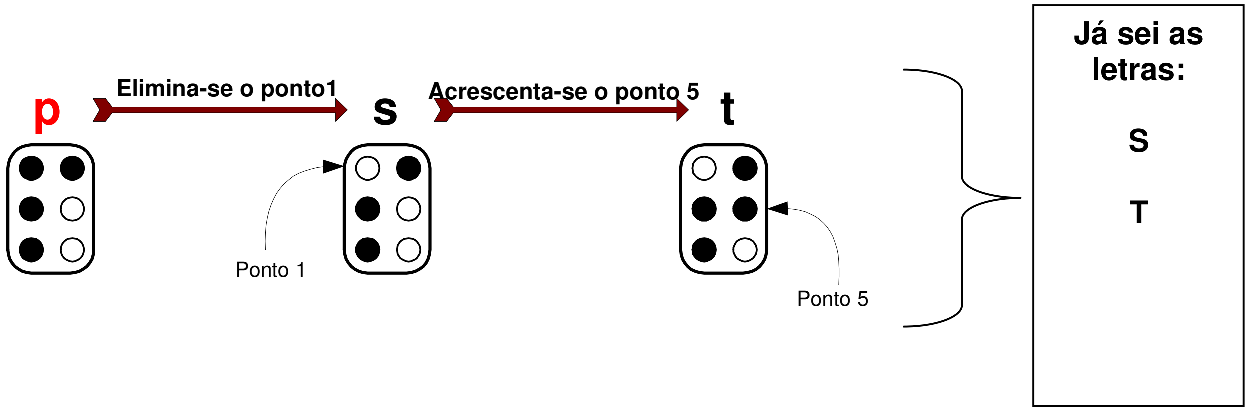
Q

R

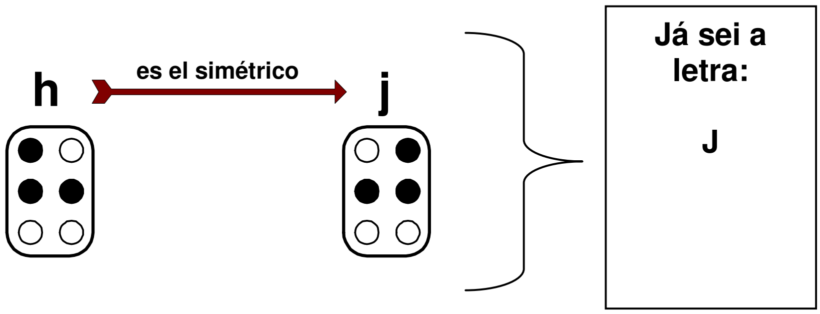
N.I.: Considerando as letras **c**, **f, m**, **p**, como **letras base** consigo saber 12 letras do alfabeto, acrescentando o **ponto 5** e eliminando o **ponto 4**.

6ª Sequência de letras:

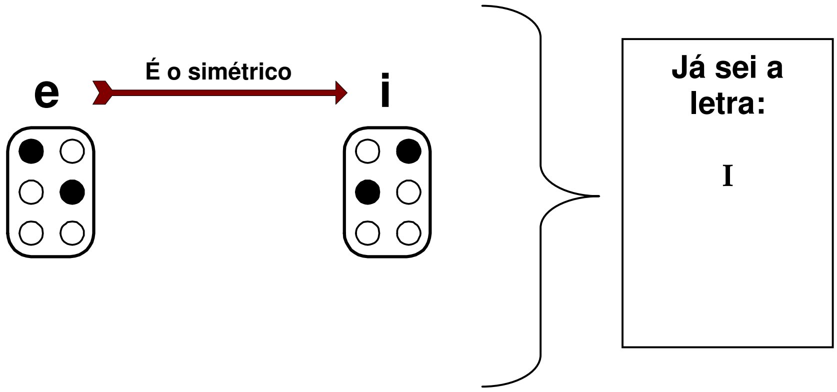
Letra base: **p**



7.ª Sequência de letras:

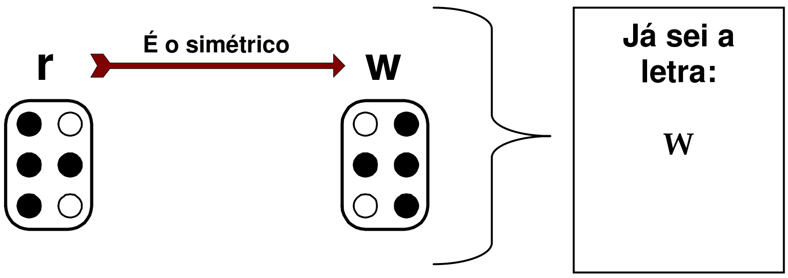


<u>8.ª Sequência de letras:</u>

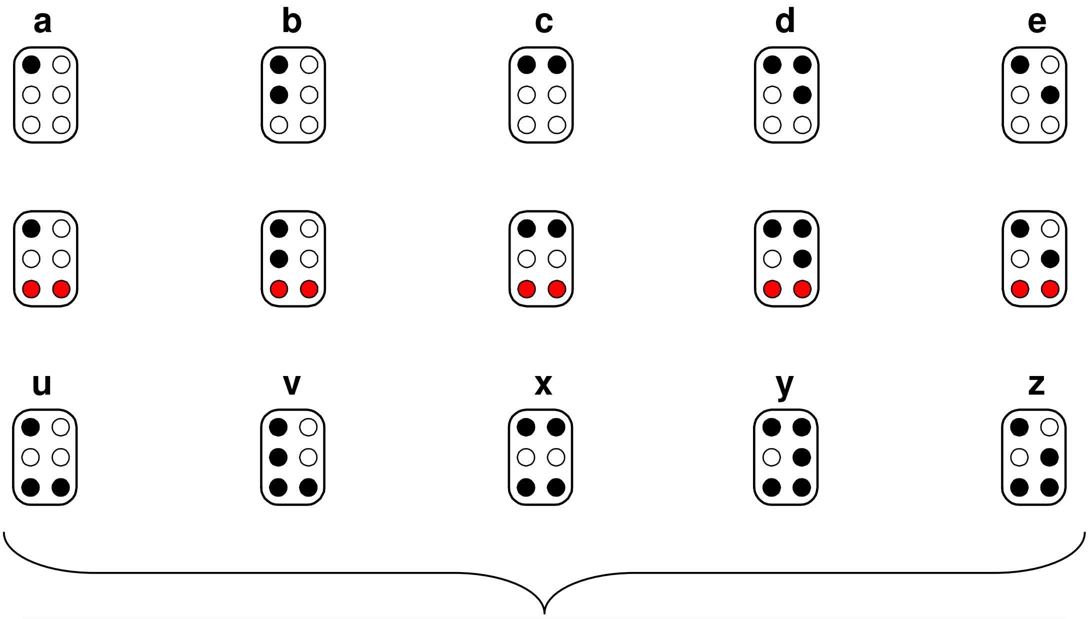


N.I.: As letras ***e*** e ***i*** podem confundir o aluno. Então deveremos recorrer à ordem alfabética, ou seja, a letra ***e*** começa com o ponto 1 e a letra ***i*** começa pelo ponto 2.

<u>9.ª Sequência de letras:</u>



10.ª Sequência de letras:



N.I.: Para se determinar as últimas cinco letras do alfabeto (u, v, x, y , z) acrescenta-se os pontos 3 e 6 às cinco primeiras letras do alfabeto (a,

Já sei as letras:

U - V - X - Y - Z

2.4 - Escrita de expressões algébricas: prefixos alfabéticos

As expressões algébricas constituem uma vertente importante da aprendizagem da Álgebra, nomeadamente no 3.º Ciclo do Ensino Básico. Antigamente, os alunos trabalhavam a simplificação de *expressões algébricas* relativamente complexas, antes de iniciar o estudo de *equações* e *funções*. Hoje em dia, a aprendizagem do trabalho com *expressões algébricas* faz-se concomitantemente com a aprendizagem das *sequências*, das *funções* e das *equações*, procurando-se com esta articulação que estas façam sentido para os alunos. No entanto, seria errado pensar que só por trabalharem com *sequências*, *funções* e *equações*, automaticamente aprendem a lidar com *expressões algébricas*. O trabalho com expressões algébricas, por vezes, precisa de uma atenção específica, de modo a que os alunos percebam com que objeto estão a trabalhar, que operações podem efetuar e que equivalências podem obter.

Em Álgebra é muito frequente aparecerem expressões formais que envolvam números e letras multiplicados. Contudo, é habitual suprimir-se o sinal multiplicativo entre o número e a letra ou letras de um monómio, sendo que ao número chama-se *coeficiente* e à letra ou letras chama-se *parte literal*. Vejamos os seguintes monómios: $5x$, $14\,mn$ e $49\,slb$.

Em Braille escreve-se:

A negro			Em Braille		
Monómio	***Coeficiente***	***Parte literal***	***Monómio***	***Coeficiente***	***Parte literal***
5*x*	5	*x*	⠼⠑⠭	⠼⠑	⠭
14*mn*	14	*mn*	⠼⠁⠙⠍⠝	⠼⠁⠙	⠍⠝
49*slb*	49	*slb*	⠼⠙⠊⠎⠇⠃	⠼⠙⠊	⠎⠇⠃

Muitas vezes as letras representam unidades de medida (metro, litro, grama, etc.) e através de um monómio podemos representar quantidades, tais como “quatro metros”, “oito litros” ou “sessenta e cinco gramas”.

Olhando para os monómios apresentados na tabela acima, constatamos que a letra que aparece imediatamente a seguir ao coeficiente, ou seja a primeira letra da parte literal não é nenhuma das dez primeiras letras do alfabeto, pelo que não haverá lugar a qualquer tipo de confusão com os números. O problema surge em questões básicas como quantidades do sistema métrico decimal, quando a primeira letra da parte literal é uma das dez primeiras do alfabeto, ou seja:

Não existe inconveniente com:

A negro	Em Braille
"quatro metros"	⠼⠙⠍
"oito litros"	⠼⠓⠇

Para o caso da unidade ser o grama, aí teremos de ter muito cuidado, pois já não podemos colocar a letra *g* (grama) imediatamente a seguir ao coeficiente. Também não é conveniente pensar-se em deixar um espaço à direita do coeficiente, ou seja, deixar um espaço entre o coeficiente e a parte literal, na medida em que provocará um bloqueio na leitura tátil em detrimento do sentido de unidade que se pretende dar às expressões matemáticas.

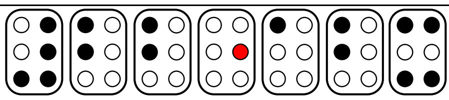
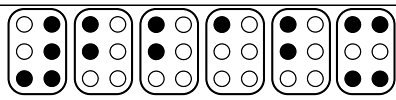
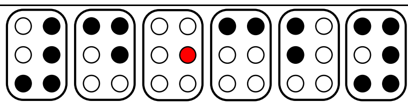
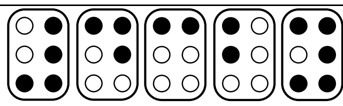
Como forma de resolver esta situação, no caso da primeira letra à direita do coeficiente pertencer a uma das dez primeiras letras do alfabeto, colocaremos o ponto (5), ⠐ , entre o número e a respetiva letra. Por exemplo:

A negro	**Em Braille**			
	Com ponto (5)	Representação	Sem ponto (5)	Representação
"sessenta e cinco gramas"	⠼⠋⠑⠐⠛	65*g*	⠼⠋⠑⠛	657

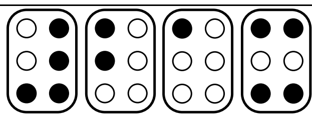
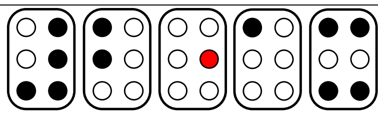
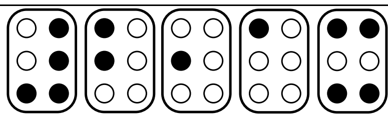
Assim sendo, caso não se coloque o ponto (5), sessenta e cinco gramas passa a representar o número 657, uma vez que a letra ***g*** corresponde ao número 7, precedido, claro está, do indicativo de número.

Todavia poderá aparecer outro tipo de expressões algébricas, em que a primeira letra da parte literal seja a letra ***a*** ou ***c***, por exemplo.

Uma forma de resolução do problema será a mesma, colocando o ponto (5) entre o coeficiente e a parte literal do monómio, note-se os seguintes exemplos:

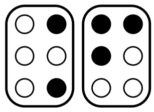
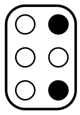
A negro	**Em Braille**			
	Com ponto (5)	Repre-sentação	Sem ponto (5)	Repre-sentação
22 *abx*		22 *abx*		2212*x*
4 *cby*		4 *cby*		432*y*

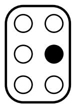
Observem-se os três exemplos seguintes, embora se tratem de expressões bem diferentes as suas representações em Braille são muito idênticas:

A negro	**Em Braille**
21x	
2ax	
2,1x	

´

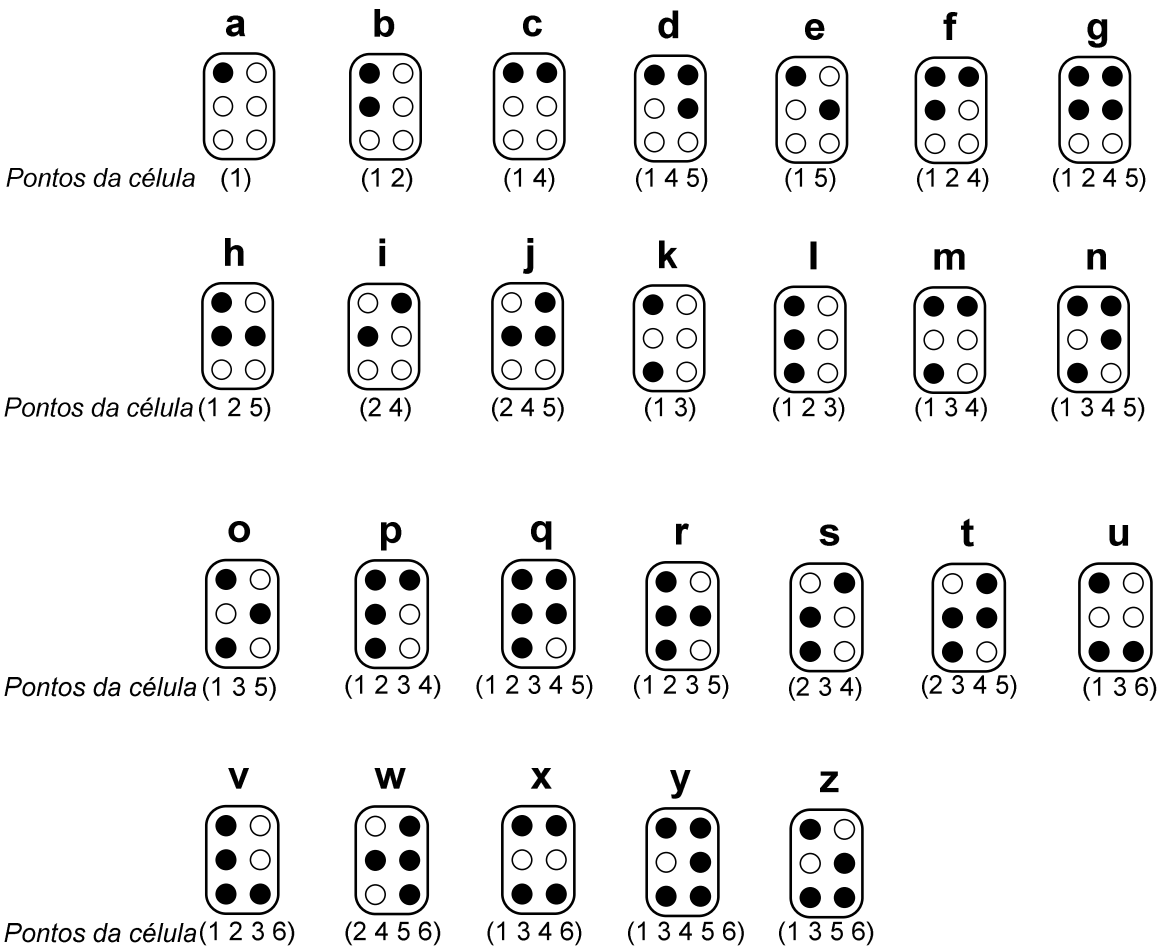
No primeiro exemplo, o coeficiente é 21 e a parte literal é *x*; no segundo exemplo, o coeficiente é 2 e a parte literal é *ax* e no terceiro exemplo, o coeficiente é o número decimal 2,1 e a parte literal é *x*.

Quando nos surge em Braille uma letra  sabemos que estamos perante uma letra “F” maiúscula. O símbolo  caracteriza as letras latinas maiúsculas.

Do mesmo modo, o símbolo , ponto (5) caracteriza as letras latinas minúsculas. A todos estes elementos Braille que se colocam antes de uma letra para identificar o tipo ou o alfabeto a que pertencem denominam-se prefixos alfabéticos.

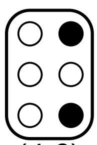
A escrita de expressões algébricas envolve o manuseamento de números e letras, pelo que será de todo conveniente apresentar-se os principais alfabetos utilizados em Matemática.

Representação a Negro e a Braille do Alfabeto Latino (Minúsculas)



Relativamente ao alfabeto latino, nas maiúsculas, todas as letras são precedidas dos pontos (4 6), ou seja:

Indicativo de Maiúscula

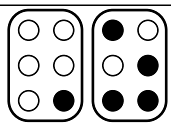
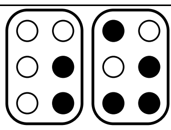


<u>Representação a Negro e a Braille do Alfabeto Grego</u>

Nome	**Minúsculas**			**Maiúsculas**		
	A negro	**Braille**		**A negro**	**Braille**	
		Notação	*Códigos*		*Notação*	*Códigos*
Alfa	α	⠈⠁	(4) (1)	Α	⠘⠁	(45) (1)
Beta	β	⠈⠃	(4) (12)	Β	⠘⠃	(45) (12)
Gama	γ	⠈⠛	(4) (1245)	Γ	⠘⠛	(45) (1245)
Delta	δ	⠈⠙	(4) (145)	Δ	⠘⠙	(45) (145)
Épsilon	ε	⠈⠑	(4) (15)	Ε	⠘⠑	(45) (15)
Zeta	ζ	⠈⠵	(4) (1356)	Ζ	⠘⠵	(45) (1356)
Eta	η	⠈⠱	(4) (156)	Η	⠘⠱	(45) (156)
Teta	θ	⠈⠹	(4) (1456)	Θ	⠘⠹	(45) (1456)
Iota	ι	⠈⠊	(4) (25)	Ι	⠘⠊	(45) (25)
Capa	κ	⠈⠅	(4) (13)	Κ	⠘⠅	(45) (13)
Lambda	λ	⠈⠇	(4) (123)	Λ	⠘⠇	(45) (123)

Miu	μ	⠈⠍	(4) (134)	Μ	⠘⠍	(45) (134)
Niu	ν	⠈⠝	(4) (1345)	Ν	⠘⠝	(45) (1345)
Csi	ξ	⠈⠭	(4) (1346)	Ξ	⠘⠭	(45) (1346)
Omicron	ο	⠈⠕	(4) (135)	Ο	⠘⠕	(45) (135)
Pi	π	⠈⠏	(4) (1234)	Π	⠘⠏	(45) (1234)
Ró	ρ	⠈⠗	(4) (1235)	Ρ	⠘⠗	(45) (1235)
Sigma	σ	⠈⠎	(4) (234)	Σ	⠘⠎	(45) (234)
Tau	τ	⠈⠞	(4) (2345)	Τ	⠘⠞	(45) (2345)
Upsilon	υ	⠈⠥	(4) (136)	Υ	⠘⠥	(45) (136)
Fi	φ	⠈⠋	(4) (124)	Φ	⠘⠋	(45) (124)
Qui	χ	⠈⠯	(4) (12346)	Χ	⠘⠯	(45) (12346)
Psi	ψ	⠈⠽	(4) (13456)	Ψ	⠘⠽	(45) (13456)
Ómega	ω	⠈⠺	(4) (2456)	Ω	⠘⠺	(45) (2456)

Representação a Negro e a Braille do Alfabeto Gótico ou outras variantes tipográficas

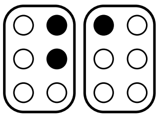
Nome	Góticas / Outras variantes tipográficas		
	A negro	**Braille**	
		Notação	*Códigos*
Minúsculas	z		(6) (1356)
Maiúsculas	Z		(56) (1356)

O uso do ponto (5) como prefixo alfabético está enquadrado numa disposição mais geral, a qual estabelece que os alfabetos latino e grego se caracterizam com dois prefixos alfabéticos cada um: um destina-se às letras maiúsculas e o outro às letras minúsculas. Todavia, existem outros dois prefixos alfabéticos que se utilizam para identificar as letras maiúsculas e minúsculas de outros alfabetos ou tipos especiais de letras, tais como, as letras cursivas ou o alfabeto gótico.

Em jeito de conclusão, resume-se num só quadro, os prefixos a utilizar nos diferentes alfabetos e considerando como letra base (Z):

Prefixos Alfabéticos		
Alfabetos	***Minúsculas***	***Maiúsculas***
Latino	z **(5)** (1356)	Z **(46)** (1356)
Grego	z **(4)** (1356)	Z **(45)** (1356)
Gótico ou outras variantes tipográficas	z **(6)** (1356)	Z **(56)** (1356)

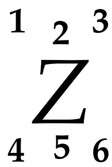
É de realçar, que o único prefixo alfabético que se pode eliminar é o correspondente às letras latinas minúsculas, ou seja, ponto (5); este prefixo alfabético elimina-se em todos os casos à exceção daqueles onde possa geram confusão. Todos os outros prefixos, em caso algum, poder-se-ão eliminar. Tanto é que o prefixo e a respetiva letra formam um objeto único.

Dá-se como exemplo, a letra grega “alfa” maiúscula que se representa em Braille da seguinte forma: .

Neste caso, se pensarmos em suprimir o prefixo alfabético, em vez de se obter a letra grega “alfa” maiúscula passa-se a ter a letra **a** latina minúscula.

2.5 - Índices e Marcas

Os índices são letras, números, marcas ou expressões escritas em tamanho reduzido e acoplados ao símbolo principal numa ou mais das seis posições constantes do gráfico seguinte:



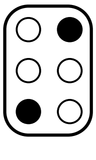
Assim sendo, existem índices superiores à esquerda (posição 1), índices superiores à direita (posição 3), índices inferiores à esquerda (posição 4), índices inferiores à direita (posição 6), índices escritos diretamente por cima (posição 2) e índices escritos diretamente por baixo (posição 5).

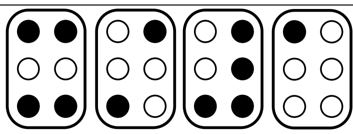
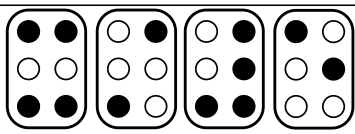
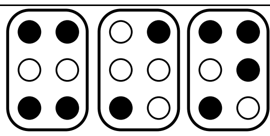
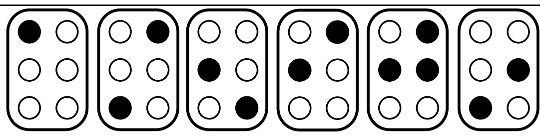
Deve ter-se em conta, que na transcrição de índices numéricos e literais, estes são sempre precedidos de um símbolo Braille que expressa a respetiva posição e colocados posteriormente à letra principal.

Em Álgebra elementar, a escrita de índices superiores à direita corresponde aos expoentes de potências Contudo, podem deter outro significado, como por exemplo, o caso das combinações, cuja temática é estudada apenas no 12.º ano de escolaridade.

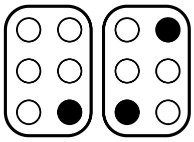
Em Braille, devemos utilizar para os índices inferiores um símbolo muito próximo do utilizado aquando da escrita de expoentes.

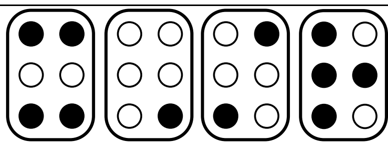
Os índices aparecem com muita frequência no 3.º Ciclo, por exemplo, no estudo da potenciação:

Símbolo de índice inferior à direita: , ponto (34).

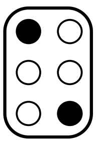
<table>
<tr><th colspan="3">Índices inferiores à direita</th></tr>
<tr><th rowspan="2">A negro</th><th colspan="2">Em Braille</th></tr>
<tr><th>Representação</th><th>Códigos</th></tr>
<tr><td>x_1</td><td></td><td>(1346) (34) (3456) (1)</td></tr>
<tr><td>x_5</td><td></td><td>(1346) (34) (3456) (15)</td></tr>
<tr><td>x_n</td><td></td><td>(1346) (34) (1345)</td></tr>
<tr><td>a_{ij}</td><td></td><td>(1) (34) (26) (24) (245) (35)</td></tr>
</table>

No último exemplo, repare-se que houve a necessidade de utilizar parênteses auxiliares devido ao índice ser composto por mais do que um termo, o mesmo aconteceria se o índice fosse constituído por uma expressão matemática. Quando assim é, ter-se-á de colocar parênteses auxiliares, sinalizando deste modo, tudo aquilo que pretendemos que seja o índice, evitando qualquer espécie de confusão, caso contrário, poderia levar o aluno a pensar que estava perante o produto de a_i por j, por exemplo.

Símbolo de índice inferior à esquerda: , ponto (6) (34).

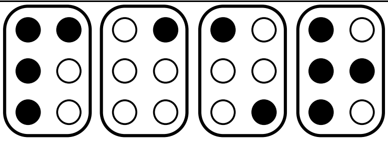
Índices inferiores à esquerda		
A negro	**Em Braille**	
	Representação	*Códigos*
${}_{r}x$		(1346) (6) (34) (1235)

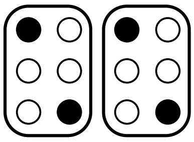
Para a representação de índices inferiores à esquerda existe a necessidade de acrescentar um novo ponto, ponto (6), antes do símbolo de índice inferior, ponto (34).

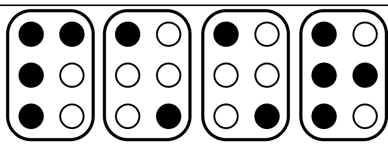
Símbolo de expoente / índice superior à direita: , ponto (16).

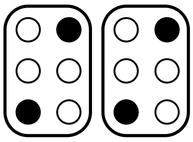
Expoentes e Índices superiores à direita		
A negro	**Em Braille**	
	Representação	*Códigos*
x^2	⠭⠡⠼⠃	(1346) (16) (3456) (12)
9^x	⠼⠊⠡⠭	(3456) (24) (16) (1346)
9^2	⠼⠊⠡⠼⠃	(3456) (24) (16) (3456) (12)
x^n	⠭⠡⠝	(1346) (16) (1345)
$(x+y)^2$	⠣⠭⠖⠽⠜⠡⠼⠃	(126) (1346) (235) (13456) (345) (16) (3456) (12)
y^{-1}	⠽⠡⠤⠼⠁	(13456) (16) (36) (3456) (1)
$x^{\frac{1}{2}}$	⠭⠡⠼⠂⠃	(1346) (16) (3456) (2) (12)
$y^{-\frac{3}{2}}$	⠽⠡⠤⠼⠒⠃	(13456) (16) (36) (3456) (25) (12)

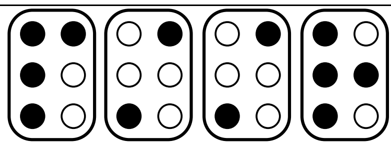
Símbolo de índice superior à esquerda: ⠈⠡, ponto (4) (16).

Índices superiores à esquerda		
A negro	**Em Braille**	
	Representação	*Códigos*
${}^{r}p$		(1234) (4) (16) (1235)

Símbolo de índice escrito diretamente por cima: , ponto (16) (16).

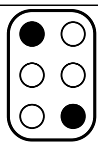
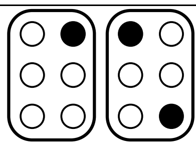
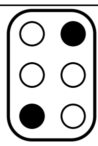
Índices escritos diretamente por cima		
A negro	**Em Braille**	
	Representação	Códigos
$\overset{r}{p}$		(1234) (16) (16) (1235)

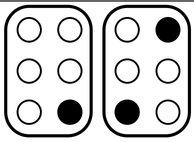
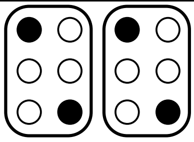
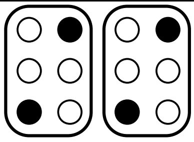
Símbolo de índice escrito diretamente por baixo: , ponto (34) (34).

Índices escritos diretamente por cima		
A negro	**Em Braille**	
	Representação	*Códigos*
$\overset{r}{p}$		(1234) (34) (34) (1235)

É de referir que este dois últimos tipos de índices, escrito diretamente por cima e escrito diretamente por baixo, não são utilizados no 3.º ciclo do ensino básico.

Apresenta-se em seguida um quadro síntese de todos os símbolos correspondentes às seis posições:

Símbolos respetivos de todas as posições			
A negro	**Em Braille**		**Posição**
Tipo de índice	*Representação*	*Códigos*	${}^{1}{}_{}^{2}{}^{3}$ Z ${}_{4\ 5\ 6}$
Índice superior à direita		(16)	3
Índice superior à esquerda		(4) (16)	1
Índice inferior à direita		(34)	6

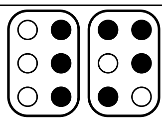
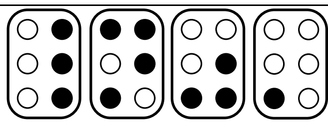
Índice inferior à esquerda		(6) (34)	4
Índice escrito diretamente por cima		(16) (16)	2
Índice escrito diretamente por baixo		(34) (34)	5

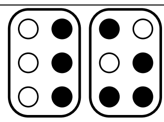
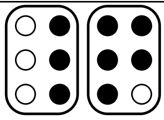
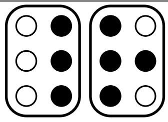
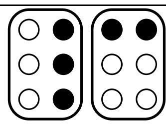
No entanto, devido à sua frequência, algumas marcas têm um papel relevante, especialmente as situadas nas posições superior direita e superior centro.

Em Braille, as marcas à direita em índice superior, os símbolos são escritos imediatamente a seguir à letra principal, seguida do ponto (3).

Ao nível do 3.º Ciclo, a aplicabilidade das marcas incide essencial na representação de conjuntos numéricos e no estudo das probabilidades. Contudo, será pertinente abordar os conjuntos numéricos, uma vez que serão mencionados aquando da lecionação das *inequações do primeiro grau*.

Seguem-se então, alguns exemplos:

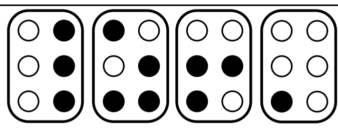
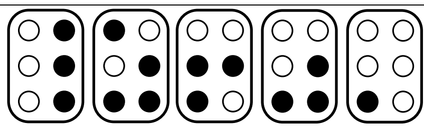
Conjuntos Numéricos		
A negro	**Em Braille**	
	Representação	*Códigos*
IN – Conjunto dos números naturais		(456) (1345)
IN_0 – Conjunto dos números naturais, incluindo o zero		(456) (1345) (356) (3)

Z – Conjunto dos números inteiros		(456) (1356)
Q – Conjunto dos números racionais		(456) (12345)
IR – Conjunto dos números reais		(456) (1235)
C – Conjunto dos números complexos		(456) (14)

Olhando a representação dos conjuntos numéricos, apenas um utiliza marca, $\boldsymbol{IN_0}$, conjunto dos números naturais incluindo o zero.

Em Braille, a escrita de qualquer conjunto numérico é feito através da letra correspondente ao conjunto numérico que se pretende escrever, precedida da célula composta pelos pontos (456), como forma de indicar que estamos perante um conjunto numérico e não apenas de uma letra.

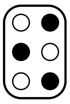
É de salientar que, o conjunto *C*, conjunto dos números complexos só é abordado no final do ensino secundário, pelo que no 3.º Ciclo, trabalha-se até ao conjunto dos números reais, *IR*.

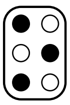
Subconjuntos Numéricos		
A negro	**Em Braille**	
	Representação	*Códigos*
Z^+ ***- Subconjunto dos números inteiros positivos***		
Z_0^+ ***- Subconjunto dos números inteiros não negativos***		

Z^{-} **- *Subconjunto dos números inteiros negativos***	⠸⠵⠤⠄	
Z_0^{-} **- *Subconjunto dos números inteiros não positivos***	⠸⠵⠤⠴⠄	
Q^{+} **- *Subconjunto dos números racionais positivos***	⠸⠟⠖⠄	
Q_0^{+} **- *Subconjunto dos números racionais não negativos***	⠸⠟⠖⠴⠄	
Q^{-} **- *Subconjunto dos números racionais negativos***	⠸⠟⠤⠄	
Q_0^{-} **- *Subconjunto dos números racionais não positivos***	⠸⠟⠤⠴⠄	
IR^{+} **- *Subconjunto dos números reais positivos***	⠸⠗⠖⠄	
IR_0^{+} **- *Subconjunto dos números reais não negativos***	⠸⠗⠖⠴⠄	
IR^{-} **- *Subconjunto dos números reais negativos***	⠸⠗⠤⠄	
IR_0^{-} **- *Subconjunto dos números reais não positivos***	⠸⠗⠤⠴⠄	

2.6 - Relações numéricas elementares

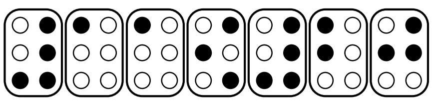
No âmbito da aprendizagem do tópico *Inequações do 1.º grau* é de todo pertinente abordar-se as relações de desigualdade. Assim sendo:

 - Significa " É menor do que", corresponde aos pontos (246)

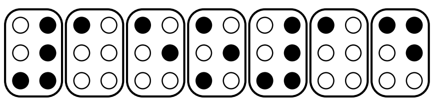
 - Significa " É maior do que", corresponde aos pontos (135)

<u>Exemplos práticos</u>:

11 < 20 , em Braille ficará:

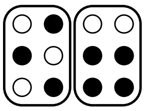


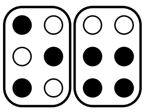
15 > 14, em Braille ficará:



Chama-se a atenção, para o facto, da relação “maior do que”, em Braille corresponder à letra minúscula “o”. Como vimos anteriormente, aquando dos prefixos alfabéticos, caso surja numa expressão matemática, simultaneamente a relação “é maior do que” e a letra “o”, é obrigatório a utilização do prefixo alfabético correspondente à letra “o”. Todavia, se olharmos para a escrita Braille das relações “és maior do que” e “és menor do que” é muito idêntica à escrita a negro.

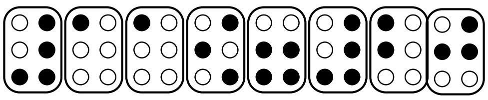
Para o caso da relação “é menor ou igual a”:

 - “é menor ou igual a”, corresponde aos pontos (246)(2356)

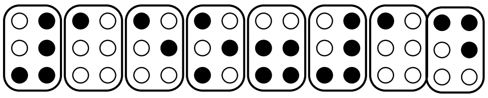
 - “é maior ou igual a”, corresponde aos pontos (135)(2356)

<u>Exemplos práticos</u>:

11 ≤ 20 , em Braille ficará:



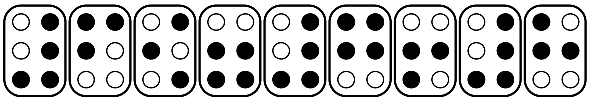
15 ≥ 14, em Braille ficará:



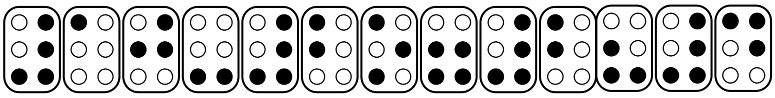
Para a relação “ maior ou igual a”, aplica-se a mesma observação feita anteriormente no que se refere à utilização obrigatória do prefixo alfabético.

Exemplos práticos:

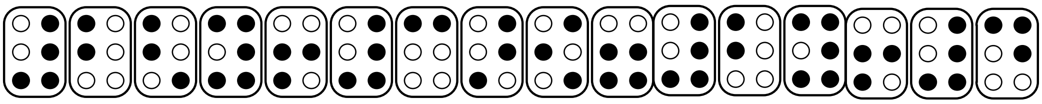
$6 \leq 7 + 8$ em Braille ficará:



$10 - 2 \geq 2 \times 4$ em Braille ficará:

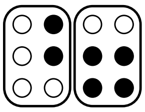


$2(y + 3) \leq 2y + 4$ em Braille ficará:



Convém ainda referir, o *sinal de diferente (≠),* também muito utilizado nas expressões algébricas. Trata-se de uma relação de negação, e na escrita a negro, a sua representação é feita através de um traço oblíquo por cima do sinal em questão.

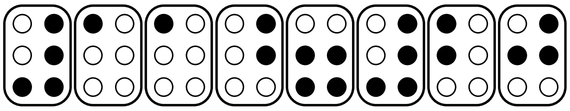
Em Braille, se queremos escrever um sinal que está traçado, utiliza-se os pontos (45) imediatamente antes do sinal que se pretende traçar.



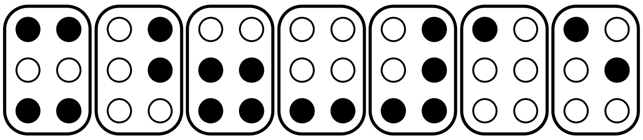
- "diferente de", corresponde aos pontos (45)(2356)

Exemplos práticos:

11 ≠ 20 , em Braille ficará:



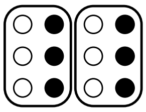
x ≠ -15, em Braille ficará:



2.7 - Outras notações relevantes

Existem, ainda, outras notações muito utilizadas no ensino da Álgebra, que se pretendem apresentar:

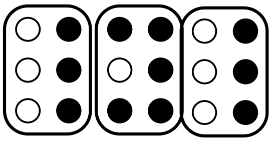
Valor Absoluto ou Módulo de um número

A negro, a representação de valor absoluto ou módulo de um número, faz-se colocando-o entre duas barras verticais, o mesmo acontece na escrita a Braille, , pontos (456) (456), devendo estar presente as regras inerentes à aplicação do sinal Braille de barra vertical. A regra de aplicação das barras verticais passa por deixar um semi-espaço em branco entre as barras e o argumento (o que pretendemos colocar entre elas). Caso não seja possível deixar esse semi-espaço, terá de se deixar uma célula em branco.

Assim sendo apresenta-se alguns exemplos de modo a clarificar esta regra:

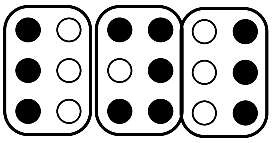
<u>Exemplo 1</u>: Pretende-se escrever o módulo de y, $|y|$.

Neste caso, não podemos escrever de uma forma linear, ou seja,

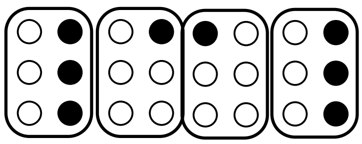
.

Se se reparar, não se está a obedecer à regra de aplicação das barras verticais, pois tem que se ter pelo menos um semi-espaço em branco entre a barra e o argumento, tanto à esquerda como à direita. Aqui, efetivamente, observa-se um semi-espaço entre o argumento e a segunda barra, mas não relativamente à primeira barra e o argumento.

Deste modo, é necessário deixar uma célula em branco entre a primeira barra e o argumento. Em Braille ficará:



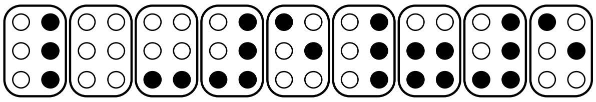
<u>Exemplo 2</u>: Pretende-se escrever o módulo de α, $|\alpha|$.

Neste caso, já é possível escrever linearmente, ou seja, .

Observe-se que existe um semi-espaço entre a primeira barra vertical e o argumento, e dois semi-espaços entre o argumento e a segunda barra vertical.

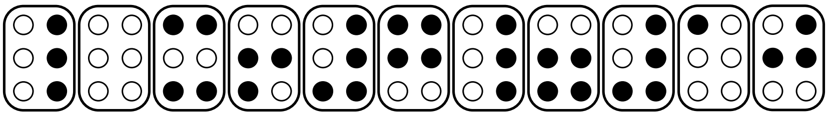
<u>Exemplo 3</u>: Quer-se escrever o módulo de |-5| = 5.

Em Braille, ficaria:



<u>Exemplo 4</u>: Pretende-se escrever o módulo de |x+7| = 10.

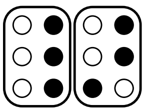
Em Braille, ficaria:



Reunião ou União de Conjuntos

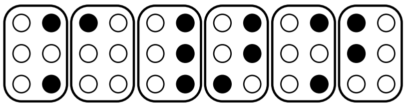
Quando se pretende representar a negro a reunião ou união entre dois conjuntos, utiliza-se o símbolo $\cup$.

Em Braille, este símbolo de união, representa-se da seguinte forma:

.

Exemplo: Pretende-se escrever “A reunião de A com B”, $A \cup B$.

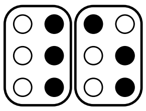
Em Braille, ficaria:



Interseção de conjuntos

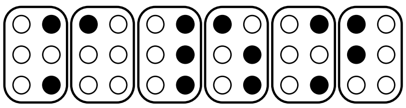
Quando se pretende representar a negro a interseção de dois conjuntos, utiliza-se o símbolo $\cap$.

Em Braille, este símbolo de interseção, representa-se da seguinte forma:

.

Exemplo: Para escrever “A interseção de A com B”, $A \cap B$.

Em Braille, ficará:



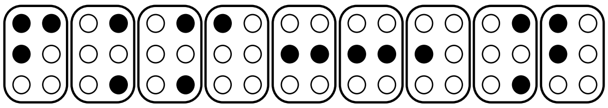
Funções

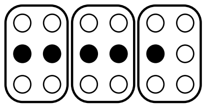
Quando se pretende representar uma função de domínio A e contradomínio B, a negro existem diversas notações, pelo que se apresentam as mais utilizadas no sistema Braille:

Notação 1:

$f : A \to B$

Em Braille, ficará:

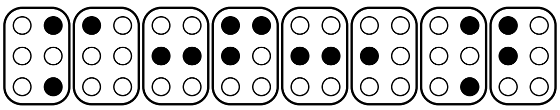


Em Braille, o símbolo  , pontos (25) (25) (2) representam a seta.

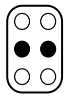
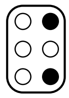
Notação 2:

$A \xrightarrow{f} B$

Em Braille, ficará:



Neste caso, o ***f*** aparece em cima da seta, pelo que deverá ser colocado entre os dois elementos (25) correspondentes à seta. É por este motivo que a seta se escreve com uma duplicação dos pontos (25), para que nesta situação se consiga colocar a letra entre eles.

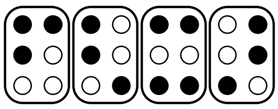
Por último, é de referir que, na notação 1, os dois pontos (:) encontram-se excecionalmente escritos de forma diferente. Recorde-se que, em situação normal, os dois pontos escrevem-se da seguinte forma: ,pontos (25). Quando se está na presença de funções, é escrito do seguinte modo: , pontos (46).

Na representação a Braille de uma função explicitando uma ou mais variáveis, escreve-se linearmente, não existindo nenhuma regra específica.

Passa-se a descrever alguns exemplos:

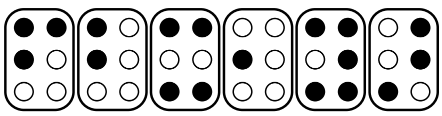
<u>Exemplo1</u>: Queremos escrever $f(x)$, função de variável x.

Em Braille, ficaria:



<u>Exemplo 2</u>: Queremos escrever $f(x,y)$, função de variáveis x e y.

Em Braille, ficaria:



CAPÍTULO III – ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

3.1 – Introdução

Apresenta-se como ideia comum que só com um conhecimento da globalidade do currículo prescrito, alicerçado num conhecimento científico aprofundado dos temas matemáticos que ele apresenta, possibilitará ao professor uma gestão curricular tendo por base as conexões matemáticas.

A *Álgebra* é uma das grandes áreas da Matemática. A visão tradicional da *Álgebra* associa-a à manipulação de símbolos, a um conjunto de regras operatórias aplicadas a expressões com variáveis e números e a um conjunto de processos de resolução de condições. Esta visão não se restringia à realidade portuguesa. James Kaput, investigador americano, citado por Canavarro[134] escrevia: "*A Álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desligados quer dos outros conteúdos matemáticos, quer do mundo real dos alunos*". Para Canavarro e Ponte[135], esta é uma visão muito redutora da *Álgebra*, pois deixa de fora, por exemplo, a resolução de problemas, e uma diversidade de situações que envolvem, relações, regularidades, generalização, variação e modelação. Os

[134] Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In *Quadrante 16* (pp. 81-118).
[135] Ponte, J. P. (2006). *Números e Álgebra no currículo escolar*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro, *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

elementos centrais da *Álgebra* devem ser, segundo Kaput, mais uma vez citado em Canavarro[136]:

1. O estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e estabelecimento de relações, incluindo os que surgem na *Aritmética* (*Álgebra* como *Aritmética* generalizada) ou no raciocínio quantitativo;

2. *Álgebra* como o estudo das funções, relações e (co)variação;

3. *Álgebra* como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto no domínio da Matemática, como no seu exterior.

Segundo Canavarro[137], estes últimos dois aspetos referem-se ao pensamento funcional.

As *Normas para a Álgebra*[138] afirmam que os programas de ensino "*deverão habilitar todos os alunos para:*

- *Compreender padrões, relações e funções;*
- *Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;*
- *Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;*
- *Analisar a variação em diversos contextos*".

Estes aspetos são retomados nas normas para os diversos anos de escolaridade. Regista-se assim, na tabela seguinte, os objetivos relativos ao 3.º Ciclo do Ensino Básico:

[136] Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In *Quadrante 16* (pp. 81-118).
[137] Ibidem.
[138] NCTM. (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

Compreender padrões, relações e funções
• Representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões, através de tabelas, gráficos, palavras e, sempre que possível, expressões simbólicas; • Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação; • Identificar funções como lineares ou não lineares e diferenciar as suas propriedades, a partir de tabelas, gráficos ou equações.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos
• Desenvolver uma primeira compreensão conceptual das diferentes utilizações das variáveis; • Explorar relações entre expressões algébricas e gráficos de linhas, dando particular atenção ao significado de interseção e declive; • Usar a *Álgebra* simbólica para representar situações e resolver problemas, sobretudo aqueles que envolvam relações lineares; • Reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões algébricas simples, e resolver equações lineares.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas
• Modelar e resolver problemas inseridos num contexto, utilizando diversas representações, como gráficos, tabelas e equações.
Analisar a variação em diversos contextos
• Usar gráficos para analisar a natureza das variações de quantidades em relações lineares .

Tabela 2: Objetivos relativos ao terceiro ciclo do ensino básico

Extraído das *Normas* (NCTM, 2008, p. 262)

Na linha do referido, a *Álgebra* deixou de ser apenas um conjunto de procedimentos envolvendo símbolos, passando a ser vista como uma forma de pensamento e raciocínio. Deste modo, o grande objetivo do estudo da *Álgebra* no Ensino Básico, é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos[139].

Para Blanton e Kaput[140], o pensamento algébrico caracteriza-se como o "*processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade*".

O NCTM[141] considera que, o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, com equações e com funções, mas também com a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e de usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos. Contribuiu para *ver* a *Álgebra* não apenas como um conjunto de regras de manipulação simbólica, pois envolve uma forma de pensamento.

Um dos aspetos que distingue o pensamento algébrico da visão tradicional da *Álgebra* é a utilização simbólica com significado. Esta capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, assim como o é o *sentido de símbolo*, que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas. Não desvalorizando a importância da utilização da linguagem algébrica e, reconhecendo-lhe grande capacidade na tradução de ideias gerais, esta surge num contexto de raciocínios com compreensão, em que por exemplo, a letra tem um significado para o aluno, na situação que este está a explorar.

---

[139] Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85* , pp. 36-42.
[140] Citado em Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In *Quadrante 16*, p. 87.
[141] NCTM. (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

Os autores da brochura *Álgebra no Ensino Básico*[142] identificaram as três vertentes fundamentais do pensamento algébrico: *representar,* em que o aluno deverá ser capaz de utilizar diferentes sistemas de representação; *raciocinar*, onde o aluno deverá raciocinar dedutivamente e indutivamente e onde é realçada a capacidade de relacionar e generalizar; e *resolver problemas e modelar situações*, utilizando as ferramentas algébricas.

Vertentes fundamentais do pensamento algébrico	
Representar	•Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; •Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; •Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	•Relacionar (em particular, analisar propriedades); •Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; •Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	•Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Figura 2: Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Extraído da Brochura da *Álgebra* (Ponte et al., 2009a, p. 11)

[142] Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009a). *Álgebra no ensino básico.* Obtido em 5 de Junho de 2011, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/ 003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf

Tornar o pensamento algébrico uma orientação transversal do currículo significa, como sugerem Kaput e Blanton[143]:

- Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível;

- Tratar os números e as operações algebricamente – prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objetos formais para o pensamento algébrico;

- Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1.º Ciclo.

Realça-se a importância do estudo dos padrões como uma via para a promoção do pensamento algébrico. Vale, Pimentel, Barbosa, Fonseca, Santos e Canavarro[144] defendem que, quando se trabalha com padrões, está-se a fornecer aos alunos um ambiente de aprendizagem próximo das suas vivências e experiências, permitindo-lhes "*descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões*". Ponte[145] afirma que, visto no pensamento algébrico se valorizar tanto os objetos como as relações entre eles e defende também o estudo dos padrões e regularidades como um contexto privilegiado para a representação e generalização dessas relações.

Segundo Vlassis e Demonty[146], o ensino das primeiras noções algébricas pode ser visto em duas perspetivas: por um lado, uma mais formal, a nível dos procedimentos, com manipulação de expressões algébricas e resolução de equações, e outra, a um nível funcional, com a generalização de relações matemáticas, com a resolução de problemas e com as demonstrações. Salientam que "*a função da Álgebra é posta em*

[143] Citado em, Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85* , pp. 36-42.
[144] Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L., & Canavarro, P. (2006). *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
[145] Ponte, J. P. (2005b). *Gestão curricular em Matemática.* In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular.* , pp. 11-34. Lisboa: APM.
[146] Vlassis, J., & Demonty, I. (2008). *A Álgebra ensinada por situações-problemas.* Lisboa: Instituto Piaget (Obra original publicada em 2002).

evidência colocando as manipulações [algébricas] em contextos que justificam a sua utilização".

Assim sendo, poderá contribuir para o reconhecimento, por parte dos alunos, na relevância do estudo deste tema.

A *Álgebra* é uma das áreas em que os alunos revelam maiores dificuldades de aprendizagem. De acordo com a investigação, uma das razões que justifica o insucesso prende-se com o uso da simbologia, sem lhe ser atribuída significado e com o uso de regras sem compreensão. A transição do raciocínio aritmético para o raciocínio algébrico traz consigo bastantes obstáculos, justificando alguns dos erros mais comuns. Os alunos têm dificuldade em compreender os diferentes significados que são atribuídos aos símbolos, por exemplo, a letra surge como *número generalizado*, como *incógnita* e como *variável*. Também não compreenderem a mudança de significado dos símbolos da *Aritmética* para a *Álgebra*, por exemplo, do sinal de igualdade[147].

3.2 - Definição do Conceito de Álgebra

Tal como referido no ponto anterior, todos os indivíduos que trabalhem na construção e desenvolvimento de um currículo de Álgebra devem de ter, inevitavelmente, uma conceção do que é a Matemática e do que é a Álgebra. Ao pesquisar o significado da palavra Álgebra num dicionário, esta surge definida como "*ciência que generaliza questões numéricas*"[148]. No entanto, esta definição associa a Álgebra a uma Aritmética generalizada, que utiliza uma linguagem própria, associada a letras.

---

[147] Ponte, J. P. (2005a). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85* , pp. 36-42.
[148] Silva, A. M. (1992). *Novo dicionário Compacto da Língua Portuguesa*. Editorial Confluência, p.142.

Segundo o NCTM[149], a Álgebra possui a sua fundação histórica no estudo de métodos gerais para resolver equações. A Álgebra estuda a relação entre quantidades, incluindo funções e formas de representar relações matemáticas. Assim, atualmente, os métodos e as ideias da Álgebra suportam o trabalho matemático em várias áreas, como por exemplo, leis físicas, modelos populacionais e resultados estatísticos.

Assude[150] questionou, em vários contextos de formação, "*O que é a Álgebra?*". Algumas dessas respostas estão sintetizadas na tabela seguinte.

Definições de Álgebra, de Acordo com Vários Contextos de Formação	
1	"É o conjunto de ferramentas (símbolos, operações, conceitos) que permite transpor para uma linguagem própria da Matemática os problemas inerentes a esta ciência."
2	"É a parte da Matemática que se auxilia de termos algébricos (letras) para solucionar problemas advindos de alguma situação. Eu diria é enxertar uma letra num problema que poderia na maioria das vezes ser solucionado de maneira aritmética."
3	"Álgebra é a parte da Matemática responsável pelo estudo das relações existentes entre números e incógnitas. A álgebra estuda funções que permitem, dado um certo problema, chegar a uma solução a partir da sua expressão matemática."
4	"Área da Matemática que abrange a representação de situações por meio de equações, inequações, funções, etc., utilizando-se símbolos previamente estabelecidos (A, B, =, x, $f(x)$). Envolve conceitos como equação, incógnita, variável, inequação, etc."
5	"A álgebra é um saber cujo objetivo consiste em trabalhar com generalizações mediante um sistema formal axiomático por meio de manipulações simbólicas. Este saber relaciona-se com a geometria e a aritmética à medida que ocorrem em certos contextos necessidades de aplicações. É o meu modo de ver este assunto."

Tabela 3: *Definições de Álgebra, de Acordo com Vários Contextos de Formação*

De acordo com estas definições, existem várias associações que se podem fazer à Álgebra: aritmética generalizada, sistema de representações, conjunto de regras,

[149] NCTM (2000). *Principles and Sandards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
[150] Assude, T. (2003). Estudo do currículo de matemática: abordagem ecológica e alguns resultados. In *Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 29-44. Lisboa: APM.

envolve generalizações e a resolução de problemas. Todavia, a Álgebra está, também, relacionada com estruturas abstratas e com a utilização dessas estruturas na resolução de problemas.

O NCTM[150] evidencia uma perspetiva interessante, nas normas do ensino da Álgebra, que são estabelecidas para os alunos desde o pré-escolar até ao final do Ensino Secundário. Neste documento estabelecem-se as metas a atingir com o ensino da Álgebra em cada um dos níveis definidos, assumindo uma posição essencial, desde a idade mais precoce da criança.

Quando os alunos encontram o número que devem pôr no espaço em branco, para além de perceberem, implicitamente, um conjunto de regras, estão a evidenciar um *pensamento algébrico*. Por esse motivo, talvez seja importante discutir e analisar duas opções pedagógicas no ensino da Álgebra, a partir das quais se poderão esclarecer alguns pressupostos e posturas praticados.

A primeira opção associa à Álgebra as suas noções fundamentais, tal como se fosse um tipo de Aritmética generalizada. Simultaneamente, a Álgebra é considerada como uma manipulação de símbolos. E isto acontece, provavelmente, porque é o que se ensina nos ensinos básico e secundário, é o que sai nos testes de avaliação e nos exames finais de ano e é aquilo que, muitas vezes, os professores demoram mais tempo a ensinar. E até os alunos que sabem manipular esses símbolos, normalmente, possuem boas classificações matemáticas. Assim, a Álgebra básica é estruturada tendo em conta a teoria dos conjuntos numéricos, no que diz respeito às suas operações e propriedades. Para esta opção, é fundamental que o aluno saiba Aritmética para, só depois, aprender Álgebra, através da generalização desses procedimentos aritméticos. Visto que, nesta situação, o aluno trabalha com letras em vez de números, a Álgebra é entendida como uma parte da Matemática que utiliza uma linguagem mais sofisticada da Aritmética, se bem que com os mesmos problemas e procedimentos.

A segunda opção caracteriza a Álgebra como um certo modo de pensar e resolver problemas desta disciplina, é o *fazer Matemática*, associado ao *pensamento* *algébrico*. Desta forma, a Álgebra permite caracterizar e abordar um conjunto de assuntos da Matemática. Esta opção enquadra múltiplas e distintas formas de agir na Álgebra. O aluno está a desenvolver o seu pensamento algébrico quando está envolvido numa atividade relacionada, por exemplo, com equações, ou de uma forma mais geral, quando está envolvido numa atividade que envolva a manipulação de entes algébricos. Nesta opção, a aprendizagem da Álgebra envolve outros processos de pensamento além dos aritméticos e diversos ramos da Matemática.

A aprendizagem da Álgebra relaciona-se mais com esta segunda opção. Um aluno *faz* ou *aplica* Álgebra quando é desafiado num problema de geometria, de contagem, de padrões e regularidades, de proporcionalidade, entre outros. O *fazer* Álgebra não está, apenas, presente em todas estas situações, como lhes é essencial.

Por se confundir frequentemente a Álgebra com a Aritmética, parece ser oportuno refletir, de uma forma breve, acerca destes dois tópicos de Matemática, para se esclarecer quais as semelhanças e as diferenças entre eles. Bodin e Capponi[151] fazem uma abordagem a esta temática e afirmam que a Aritmética relaciona-se com a resolução de problemas numéricos e, essencialmente, utiliza números naturais e números decimais positivos, sendo desenvolvido neste processo um conjunto de ferramentas com o objetivo de codificar os cálculos que se pretendem levar a cabo. Relativamente à Álgebra, os autores esclarecem que também é um campo cujos cálculos são feitos através de um conjunto de números, mas utiliza representações simbólicas para expressar variáveis e possibilita realizar vários cálculos envolvendo expressões básicas representadas simbolicamente. Para além de trabalhar com quantidades, permite expressar a relação entre essas quantidades, quer sejam conhecidas ou desconhecidas. Daqui, depreende-se que a Aritmética constitui uma ferramenta importante, dando-se ênfase ao cálculo numérico. A Álgebra, por seu lado, permite codificar situações, através de representações simbólicas, operadas por meio de cálculos algébricos. Assim, a Álgebra permite traduzir situações que o cálculo aritmético, por si só, não é capaz. Por isso, a Álgebra torna-se indispensável a situações que atingiram um dado grau de complexidade.

[151] Bodin, A., Capponi, B (1996). Junior Secundary School Pratices. In *Internacional Handbook of Mathematics Education. Part one*, pp. 565-614. Kluwer Academic Press.

Aliás, o NCTM[150] defende que apesar de a Álgebra estar associada às extensivas experiências numéricas dos alunos, não pode deixar de ser utilizada igualmente na Geometria e na análise de dados. Ou seja, a Álgebra que se ensina contém o número, a palavra, a letra, a figura, entre outros aspetos.

Ao nível do Ensino Básico, cabe ao professor saber introduzir a Álgebra, de forma gradual, não como uma aritmética mais sofisticada, mas sim como um ramo estrutural da Matemática, que permite resolver problemas. Souza e Diniz[152] definem a Álgebra como uma área da Matemática que possui uma linguagem própria e adequada para expressar factos genéricos. Indicam quatro funções distintas da sua utilização: generalização da aritmética, estudo de processos para a resolução de problemas, expressão da variação de grandeza e estudos de estrutura matemática. Essa categorização das funções da álgebra está relacionada com os diversos usos das variáveis, envolvendo aspetos do processo de ensino-aprendizagem.

Ainda segundo Maria Augusta Neves[153] "*a Álgebra tem como função comunicar ideias gerais envolvendo possíveis valores numéricos*". E a comunicação matemática não é uma capacidade transversal do Novo Programa da disciplina de Matemática? Se a Álgebra permite comunicar ideias, então justifica-se plenamente o seu ensino. A mesma autora defende que a importância da Álgebra depende da forma de vê-la e senti-la. Se a Álgebra for simplesmente considerada como um conjunto de regras e técnicas, então este tema terá pouca importância. Se a Álgebra for vista, também, como um meio de resolver certos problemas, de relacionar variáveis, de estabelecer generalizações, então constitui o centro da Matemática.

---

[152] Souza, E. R., Diniz, M. I. (1994). *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo:IME-USP.
[153] Neves, M. A. (1999). *Aprendizagem em Álgebra*. Tese de Doutoramento. Universidade Portucalense Infante D. Henrique.

3.3 - A Álgebra no Programa de Matemática do Ensino Básico em Portugal

No antigo PMEB, a *Álgebra* não constituía um tema autónomo, trabalhando-se conceitos algébricos nos *Números* e *Cálculo* e existia o tópico das *Funções*. A conceção de *Álgebra* que está presente no PMEB, vai ao encontro das tendências curriculares e da investigação neste domínio. Ela surge revalorizada, relativamente ao currículo anterior, constituindo um dos quatro grandes temas matemáticos a ser trabalhado ao longo dos três ciclos de escolaridade do ensino básico. Surge a ideia de *pensamento algébrico*, logo no início do documento, em que os autores do programa a apresentam como um dos quatro eixos, a par do "trabalho com os números e operações, (…) [d]o pensamento geométrico e [d]o trabalho com dados", em torno dos quais o programa se desenvolve. Aos professores, a *Álgebra* aparece nesse documento "como forma de pensamento matemático".

Segundo Oliveira[154], as diferenças significativas relativamente aos programas anteriores, assentam nas seguintes ideias:

1) os alunos podem começar a pensar algebricamente mais cedo no seu percurso escolar;

2) a capacidade de generalização é um aspeto central na *Álgebra* e na Matemática, em geral, que ganha em ser promovida desde as etapas iniciais do ensino básico;

[154] Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática* , pp. 83-86.

3) a utilização de simbolismo algébrico deve ser progressiva, sendo que as múltiplas representações têm um papel importante nesse contexto;

4) deve existir uma forte articulação e continuidade entre os vários tópicos da Álgebra.

Na globalidade destes aspetos, identifica-se uma especial atenção dada à articulação vertical dos conceitos ao longo da escolaridade, e nos últimos dois aspetos referidos, verifica-se que sobressaem as conexões entre diferentes representações e noções matemáticas.

No caso do 1.º Ciclo, a *Álgebra* não constitui um tema autónomo, mas há "objetivos de cunho algébrico em outros temas deste ciclo", como se pode ler no PMEB[155]. No tema *Números e operações*, as ideias algébricas começam a ser trabalhadas com o estudo de sequências numéricas e padrões geométricos. O trabalho com regularidades, que podem ser generalizáveis através de regras formuladas pelos alunos, contribuirá para o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme anteriormente referido.

Nos 2.º e 3.º Ciclos, a *Álgebra* surge como tema autónomo. A tabela seguinte inclui um extrato das indicações metodológicas no tema dos *Números e Operações* do 1.º Ciclo, onde fazem referência ao desenvolvimento do pensamento algébrico, apresentam o propósito principal de ensino e os objetivos gerais, ligados aos tópicos envolvidos no estudo, no tema da *Álgebra*. Nela pode ler-se que, no 2.º Ciclo é propósito principal de ensino que os alunos consigam representar através de símbolos, enquanto no ciclo de escolaridade seguinte já é pedido que utilizem a linguagem e procedimentos algébricos, surgindo a modelação matemática. No 3.º Ciclo surge a noção de função.

[155] PMEB – *Programa de Matemática do Ensino Básico*.

1.º Ciclo	
Números e Operações (p. 14)	
Indicações metodológicas	A exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números é importante neste ciclo. Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a *Aritmética*. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico
2.º Ciclo	
Álgebra (p. 40)	
Propósito principal de ensino	Desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos
Objetivos gerais de aprendizagem	• ser capazes de explorar, investigar regularidades •compreender a noção de proporcionalidade direta e usar o raciocínio proporcional •ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas
3.º Ciclo	
Álgebra (p. 55)	
Propósito principal de ensino	Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos
Objetivos gerais de aprendizagem	• ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos • compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade direta • ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos

Tabela 4: Propósito principal de ensino e objetivos gerais

Os tópicos *Sequências e regularidades*, *Funções, Equações e Inequações* surgiam nos programas anteriores sem aparente conexão. No PMEB, segundo Oliveira[156], a "ideia de relação" parece surgir como um fio condutor. Nas sequências surge a letra como variável, a qual, por um lado, é fundamental no desenvolvimento do "pensamento funcional", e por outro constitui um contexto para o trabalho com expressões algébricas, quer seja, na compreensão da sua equivalência, quer nas regras de simplificação. Oliveira[157] destaca que a noção de proporcionalidade direta percorre toda a escolaridade, começando por ser vista como uma relação, sendo explicitada no 2.º Ciclo, surgindo como função no 3.º Ciclo, mas mantendo a sua identidade de relação.

De seguida apresenta-se uma compilação da informação sobre os tópicos algébricos *Sequências e regularidades*, *Funções, Equações e Inequações*, tal como são apresentados no PMEB. Esta sistematização evidencia a organização em espiral dos conceitos, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica.

3.3.1 - Sequências e regularidades

O estudo de sequências, sejam elas numéricas ou geométricas, é essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico pois envolvem processos fundamentais para a compreensão da *Álgebra*. O estudo de padrões contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico pois envolve a generalização e a modelação e constitui uma componente poderosa no estabelecimento de conexões.

[156] Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática* , pp. 83-86.
[157] Ibidem.

Vale e Pimentel[158] afirmam que, o que os matemáticos fazem melhor é descobrir e revelar padrões escondidos, sendo o próprio objetivo da Matemática, de certo modo, "*descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão*".

O tópico *Sequências e regularidades* 'percorre' todo o ensino básico. No 1.º Ciclo, este tópico integra o tema *Números e operações*, envolvendo a exploração de regularidades numéricas em sequências e em tabelas de números. Os alunos devem identificar a lei de formação de uma dada sequência e expressarem-na por palavras suas. Nos 2.º e 3.º Ciclos, este tópico está incluído no tema da *Álgebra*, envolvendo a exploração de sequências, o uso da linguagem simbólica para as representar e a utilização de diferentes representações de uma relação. Surge a utilização da letra como número generalizado. No 2.º Ciclo, os alunos contactam, pela primeira vez, com os conceitos de *termo* e *ordem*. No 3.º Ciclo, usa-se a linguagem algébrica para expressar generalizações, nomeadamente para representar o *termo geral* de uma sequência. O aluno é solicitado a compreender e simplificar expressões algébricas. Pede-se ainda que compreenda os diferentes papéis dos símbolos utilizados em *Álgebra*.

De seguida, apresenta-se uma tabela onde se listam tópicos, objetivos específicos e notas para o professor, com informação extraída do PMEB. Pretende-se, assim, fornecer a globalidade do que se perspetiva do ensino das *Sequências e regularidades*, no Ensino Básico.

[158] Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L., & Canavarro, P. (2006). *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

1.º Ciclo		
1.º e 2.º anos (p. 17)		
Tópicos	**Objetivos específicos**	**Notas**
Regularidades • Sequências	• Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números.	• Exemplos: - 2, 4, 6, 8, 10... (números pares); - 1, 4, 7, 10, 13... (começar com 1 e adicionar 3 sucessivamente); - 2, 5, 11, 23... (duplicar o número e adicionar 1). • Colocar questões do tipo: *Numa tabela de números até 100 marcar números de 5 em 5, começando no 3. Qual é o padrão representado pelos algarismos das unidades?*
3.º e 4.º anos (p. 18)		
Regularidades • Sequências	• Investigar regularidades numéricas.	• Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos.
2.º Ciclo (p. 41)		
Tópicos	**Objetivos específicos**	**Notas**
• **Sequências e regularidades**	• Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas. • Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. • Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. • Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica. • Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente. • Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.	• Usar a calculadora na exploração de regularidades numéricas.

3.º Ciclo (p.56)		
Tópicos	**Objetivos específicos**	**Notas**
Sequências e regularidades • Termo geral de uma sequência numérica • Representação • Expressões algébricas	• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados. • Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral. • Compreender os diferentes papéis dos símbolos em *Álgebra*. • Simplificar expressões algébricas.	• Propor a representação de sequências de frações em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples (por exemplo, $\frac{\mathbf{2}n}{n+\mathbf{1}}$, $\frac{n+\mathbf{1}}{n+\mathbf{3}}$) • Os alunos devem distinguir “variável” de “constante” e de “parâmetro”. • Propor a simplificação de expressões como: $x-(\mathbf{4}-\mathbf{2}x) \quad e \quad -x^2-x+\mathbf{3}x^2$

Tabela 5: Sequências e regularidades ao longo da escolaridade básica

3.3.2 - Funções

A noção de *função* é apenas introduzida no 3.º Ciclo de escolaridade. Conforme anteriormente referido, a noção de proporcionalidade surge logo no 1.º Ciclo e evolui até ser proposta, no 3.º Ciclo, como uma função de proporcionalidade direta. O quadro seguinte sintetiza a presença dessa noção ao longo da escolaridade.

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">1.º Ciclo (p. 18)</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">3.º e 4.º anos – Números e Operações</td></tr>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetivos específicos</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Regularidades

• Sequências</td><td>• Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional.</td><td>Usar tabelas na resolução de problemas que envolvam raciocínio proporcional.
<table>
<tr><td>N.º de bolas</td><td>2</td><td>4</td><td>40</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Custo das bolas</td><td>30</td><td>60</td><td>600</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

		Por exemplo: *Duas bolas custam 30 €. Quanto custam 40 bolas? E 400 bolas*
	2.º Ciclo – Álgebra (p. 41)	
Tópicos	**Objetivos específicos**	**Notas**
Relações e regularidades • Proporcionalidade direta	•Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade. •Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões. •Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta.	• Distinguir situações em que não existe proporcionalidade de situações em que existe, solicitando, neste caso, a constante de proporcionalidade. • Usar situações que envolvam percentagens e escalas, e a análise de tabelas e gráficos. • Propor situações que permitam verificar a propriedade fundamental das proporções.
	3.º Ciclo - Álgebra (p. 56)	
Tópicos	**Objetivos específicos**	**Notas**
Funções • Conceito de função e de gráfico de uma função • Proporcionalidade direta e inversa como funções • Funções linear e afim • Funções do tipo $y = ax^2$	• Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações. • Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano. • Analisar uma função a partir das suas representações. • Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante. • Analisar situações de proporcionalidade direta e inversa como funções do tipo $y = kx$ e $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) respetivamente. • Representar algebricamente situações de proporcionalidade direta e inversa. • Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim. • Relacionar as funções linear e afim. • Relacionar a função linear com a proporcionalidade direta. • Representar graficamente funções	• Dar destaque ao conceito de função como relação entre variáveis. • Na análise de uma função, os alunos devem identificar o domínio, o contradomínio e determinar imagens de objetos quando a função é dada por uma tabela, por um gráfico e por uma expressão algébrica. • Propor a análise de gráficos que traduzam casos de proporcionalidade direta e inversa em contextos da vida real. • A partir da representação gráfica de uma função linear ou afim, identificar a imagem dado o objeto e o objeto dada a imagem. • Os alunos devem compreender a influência da variação dos parâmetros *a* e *b* (na expressão $y = ax + b$) no gráfico da função. • Propor a representação

	do tipo $y = ax^2$. • Relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas. • Resolver e formular problemas, e modelar situações utilizando funções.	algébrica de uma: – função linear sendo dado um objeto não nulo e a sua imagem; – função afim sendo dados dois objetos e as suas imagens. • Na representação gráfica de funções quadráticas utilizar valores inteiros de *a* (positivos e negativos). Os alunos devem compreender a influência da variação do parâmetro *a* no gráfico da função.

Tabela 6**:** Funções ao longo da escolaridade básica

3.3.3 – Equações e Inequações

As *equações* constituem-se como objeto de trabalho apenas no 3.º Ciclo, mas a noção deverá ser trabalhada logo a partir dos primeiros anos, onde deverão aparecer equações muito simples e em que o objetivo é desenvolver o significado da relação de igualdade, das propriedades das operações e como cada uma das operações se relaciona com a sua inversa[159].

3.º Ciclo – Álgebra (p.57)		
Tópicos	**Objetivos específicos**	**Notas**
Equações • Equações do 1.º grau a uma incógnita	• Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes.	• Os alunos devem relacionar os significados de “membro” e “termo”, e de “incógnita” e “solução” de uma equação. • Distinguir “expressão

[159] Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009a). *Álgebra no ensino básico.* Obtido em 5 de junho de 2011, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/ 003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf

• Equações literais • Operações com Polinómios	• Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução. • Resolver equações literais em ordem a uma das letras. • Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação. • Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios.	algébrica", "equação" e "fórmula". • Propor a resolução de equações simples antes da utilização de regras. • Na resolução de equações do 1.º grau, incluir casos em que: – a incógnita está presente num ou em ambos os membros da equação; – é necessário desembaraçar previamente de parênteses. • Quando os coeficientes são fracionários tratar casos como $\frac{2}{3}x+5=2x$ ou $-\frac{1}{3}x+3=\frac{5}{2}x$. • Propor a resolução de equações literais como $F=\frac{9}{5}C+32$ em ordem a C. • Propor a adição algébrica e a multiplicação de polinómios como i) $2x - 1$ e $3x + 2$ ii) $x + 2$ e $x2 - 3x + 2$. • Os alunos devem utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios tanto no cálculo numérico como na factorização de polinómios. Por exemplo, $87^2 = (80 + 7)^2 = 80^2 + 2 \times 80 \times 7 + 7^2$ $(x + 3)^2 - 4 = (x + 3)^2 - 2^2 = (x + 5)(x + 1)$
• Equações do 2.º grau a uma incógnita	• Resolver equações do 2.º grau a uma incógnita.	• Começar a resolução de equações do 2.º grau pelas

• Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas	• Resolver sistemas de equações pelo método de substituição. • Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações. • Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações.	equações incompletas. Utilizara noção de raiz quadrada, a decomposição em fatores e lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente. O estudo deste tema é uma boa oportunidade para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrarem algebricamente a fórmula resolvente. • Na interpretação gráfica de sistemas de equações, tratar os casos de sistemas possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis.
Inequações • Inequações do 1.º grau a uma incógnita	• Compreender as noções de inequação e de solução de uma inequação. • Resolver inequações do 1.º grau utilizando as regras de resolução. • Resolver e formular problemas envolvendo inequações.	• Propor a resolução de inequações simples antes da utilização de regras. • Propor situações em que se use a transitividade das relações de ordem em ***R*** assim como a equivalência entre a<b e b>a. • O conjunto-solução de uma inequação deve ser representado graficamente e na forma de intervalo de números reais. • Salientar a necessidade de escolher soluções de uma inequação tendo em conta o contexto da situação.

Tabela 7**:** Equações e Inequações ao longo da escolaridade básica

3.4 – A Álgebra e Álgebra escolar: Conceções

Para Fiorentini et al.[160], o desenvolvimento da Álgebra assenta no contributo cultural dado por vários povos, para a construção desta área do saber. Assim sendo, os autores mencionam a possibilidade de referência às álgebras egípcias, babilónica, grega, chinesa, hindu, arábica, entre outras; afirmando, no entanto, que "*este tipo de leitura não costuma identificar um momento histórico específico do surgimento da Álgebra*"[161], evidenciando apenas alguns aspetos característicos do pensamento algébrico de cada cultura, produzidos de forma autónoma ou através de interações culturais.

No que respeita à evolução histórica da Álgebra, Struik[162] apresenta duas fases, distinguindo-as em termos cronológicos e em termos concetuais: I) *a Álgebra antiga ou elementar* e II) a *Álgebra moderna ou abstrata*.

Segundo Fiorentini et al.[160], esta distinção concetual determina uma mudança qualitativa da natureza do objeto em estudo, a qual assenta em duas visões diferentes de encarar a Álgebra: I) *Aritmética generalizada* e II) *sistema simbólico postulacional*.

A perspetiva da Álgebra como generalização da Aritmética vigorou até princípios do século XIX e é aqui, devido à necessidade de encontrar soluções para as equações, com recurso a diversos métodos, que se desenvolve gradualmente a notação

[160] Fiorentini, D., Miorim, A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. In *Pro-posições, 4(1)*, pp.78-90.
[161] Ibidem, p 79.
[162] Struik, J. D. (1989). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

algébrica. Como refere Ribeiro[163], contribui também, de forma significativa para o alargamento de novas perspetivas no domínio da Álgebra, o estudo rigoroso de equações algébricas, chegando estas ao estudo de estruturas algébricas abstratas. É então que nasce, com a *Teoria dos Grupos*, defendida por Gauss e Galois, o conceito de *Álgebra moderna.* O objeto fundamental do estudo da Álgebra centra-se, nos finais do século XIX, nas estruturas algébricas abstratas, surgindo deste modo "*a teoria dos corpos, devida a Kjummer; e a noção de ideal de um anel, devida a Dedekind.*"[164]

De acordo com Fiorentini et al. [165], esta mudança "*considera como referência o momento em que se teve a clara perceção de que o objeto de investigação desse campo do conhecimento matemático ultrapassava o domínio exclusivo do estudo das equações e das operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas, para centrar-se no estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em termos quantitativos; isto é, sobre estruturas matemáticas como grupos, anéis, corpos, etc.*"

Em termos históricos, salienta-se que o simbolismo e o desenvolvimento progressivo da notação algébrica surge na procura de soluções para as equações, tendo sido um processo moroso o de chegar à Álgebra simbólica que se conhece atualmente.
Kieran[166] defende que o desenvolvimento do simbolismo algébrico assenta em três etapas: I) a *retórica*; II) a *sincopada* e III) a *simbólica*. A etapa I), *retórica*, é anterior a Diofanto (250 a.c.) e caracteriza-se, no processo de resolução de problemas particulares, pelo uso de descrições em linguagem corrente, bem como por uma total ausência de símbolos. A etapa II), *sincopada*, tem início com Diofanto e decorre entre os séculos III e XVI, introduzindo-se letras como forma de representação de quantidades desconhecidas. Nessa época, a principal preocupação dos algebristas consistia em descobrir a identidade para as letras mais do que uma forma de

---

[163] Ribeiro, A. J. (2007). *Equação e seus multisignificados no ensino da Matemática: Contribuições de um estudo epistemológico*. São Paulo.
[164] Telles, R. A. M. (2004). A aritmética e a álgebra na matemática escolar. *Educação Matemática em Revista, 11(16)*, pp.8-15.
[165] Fiorentini, D., Miorim, A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. *In Pro-posições, 4(1)*, pp.78-90.
[166] Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* pp. 390-419. NewYork: Macmillan.

representar o geral. A etapa III), *simbólica*, surge, na continuidade do trabalho realizado por Diofanto e tendo como principal impulsionador Viéte (1540-1603). Nesta etapa, predomina a utilização de letras para as quantidades conhecidas e para as incógnitas, bem como a formulação de regras para relações numéricas.

Segundo Moura e Sousa[167], a Álgebra simbólica "*representa a síntese de um longo processo histórico humano que busca romper com o imutável, com o acabado, com o absoluto*", uma vez que a utilização de simbolismo proporciona o desembaraço de informação irrelevante e permite criar novos conceitos matemáticos, como por exemplo o conceito de função

Assim sendo, o ensino e a aprendizagem da Álgebra está diretamente relacionado com as diversas conceções da Álgebra e com a evolução do simbolismo algébrico. Usiskin[168], refletindo sobre a problemática "*o que é a Álgebra escolar?*", aponta para a relação deste tema com a compreensão da significação atribuída às incógnitas e respetivas operações, considerando ainda é quando existe a primeira abordagem à noção de variável que os alunos iniciam o estudo da Álgebra. Segundo Caraça[169], o conceito de variável apresenta-se como algo de antonímico, tratando-se de um símbolo representativo de qualquer um dos elementos de um conjunto que, sem coincidir individualmente com nenhum deles "*é suscetível de os representar a todos; (…) a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto*".

Küchemann[170], tendo como ponto de partida um estudo levado a cabo por Collis, identifica e exemplifica, seis interpretações distintas para as letras, que ocorrem com frequência em situações de Álgebra escolar:

I) *letra avaliada* – letra à qual se atribui um valor numérico, sem se operar com ela enquanto incógnita.

[167] Moura, A. R. L., & Sousa, M. C. (2005). O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: Dois olhares diferentes. *Zetetiké*, *13 (24)*, pp.11-45.

[168] Usiskin, Z. (1988) - *Conceptions of School Algebra and Uses os Variable.* In: A. F. Coxford & A.P. Schulte (Eds.), *The Idea of Algebra, K–12*, pp. 8–19. Reston, VA: NCTM

[169] Caraça, B. J. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Sá da Costa.

[170] Küchemann, D. (1978). Children´s understanding of numerical variable. *Mathematics in School, 7(4)*, pp.23-28.

II) *letra não utilizada* – a letra é ignorada ou então é reconhecida, mas não lhe é atribuído um significado.

III) *letra como objeto* – a letra é vista como um nome para um objeto, ou como um objeto em si mesmo.

IV) *letra como incógnita* – a letra é encarada como número específico mas desconhecido, sendo possível operar com ela diretamente.

V) *letra como número generalizado* – a letra é vista como representante, podendo assumir vários valores numéricos e ser substituída por mais do que um valor.

VI) *letra como variável* – a letra representa um conjunto de valores e a alteração desses valores produz uma variação noutro conjunto de valores relacionados com os primeiros.

Küchemann[171] defende ainda que esta catalogação se apresenta por ordem crescente de grau de complexidade e que um aluno só terá apreendido totalmente o uso das letras em Álgebra quando identificar a letra como variável.

Por sua vez, Usiskin[172] identifica cinco igualdades com a mesma forma, defendendo que em cada expressão, o produto de dois números é igual a um terceiro. O mesmo autor salienta ainda que depende do papel representado e da a utilização das variáveis em estudo a denominação própria atribuída a cada uma. Para além de referir cinco formas de utilizar o conceito de variável, refere que a noção de variável não se limita apenas à concretização de cálculos e operações, mas também implica compreender quer as razões que as levam a funcionar e o objetivo dos procedimentos adotados, bem como relacionar os diferentes papéis assumidos pela variável. Constata ainda que, se a Álgebra se limitar ao estudo das variáveis, não é possível

[171] Ibidem.
[172] Usiskin, Z. (1988) - Conceptions of School Algebra and Uses os Variable. In: A. F. Coxford & A.P. Schulte (Eds.), *The Idea of Algebra, K–12,* pp. 8–19. Reston, VA: NCTM

definir em concreto o que é a Álgebra escolar. Apesar das limitações encontradas, o autor defende que os objetivos traçados para o ensino da Álgebra e as conceções sobre a Álgebra escolar estão intimamente ligadas "com a diferente importância relativa atribuída às várias utilizações das variáveis", identificando, desta forma, quatro conceções da Álgebra:

I) a *Álgebra como Aritmética generalizada* – em que as variáveis são vistas como generalizadoras de modelos ou de padrões numéricos. Neste caso, apesar dos alunos não dominarem ainda o conceito de incógnita, espera-se que as utilizem como generalizações construídas indutivamente na Aritmética.

II) *a Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas* – em que se acentua a importância dos procedimentos tomados aquando da resolução de diferentes situações problemáticas. Neste caso, espera-se que o aluno comece por traduzir em linguagem simbólica da Matemática o enunciado do problema, depois o resolva e, fnalmente simplifique a expressão obtida, tratando-se normalmente de uma equação. As variáveis são agora utilizadas quer como incógnitas quer como constantes.

III) *a Álgebra como estudo de relações entre quantidades* – em que a variável é percecionada como um argumento (valor do domínio da função), ou como um parâmetro (número do qual dependem outros números). Surgem, deste modo, as noções de variável independente, de variável dependente e de função. Realçam-se as capacidades de relacionar grandezas e de as representar graficamente.

IV) *a Álgebra como estudo de estruturas* –em que a variável é pouco mais do que um símbolo arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades: não é um argumento, não se comporta como uma incógnita e não se trata de generalizar qualquer modelo aritmético. Neste caso, a tónica das atividades encontra-se na manipulação algébrica e na justificação, sendo esperado que "os alunos tenham em mente os referenciais, geralmente números reais, quando utilizam as variáveis e, ao mesmo tempo, que sejam capazes de operar com as variáveis sem ter que voltar sempre ao nível desse referencial".

Finalmente, o autor alerta para o carácter abrangente da Álgebra, defendendo que as perspetivas apresentadas devem ser encaradas como partes do todo, não podendo a Álgebra reduzir-se a qualquer uma delas individualmente, uma vez que além de constituir uma forma de generalização da Aritmética, pode constituir um instrumento para a resolução de problemas, um modo privilegiado de descrição e de análise de relações funcionais e ser fundamental para a compreensão de estruturas matemáticas.

3.5 – Álgebra escolar e suas implicações: Correntes

O ensino e aprendizagem da Álgebra têm sido alvo, ao longo dos tempos, de diversas investigações, tendo os investigadores manifestado interesses diversos, consoante as várias aceções do conceito de *Álgebra escolar*.

Kieran[173], refletindo sobre esta situação, refere que as investigações realizadas na primeira metade do século XX assentavam nas dificuldades dos alunos na resolução dos vários tipos de equações do 1.º grau, no papel da prática de procedimentos e nos erros realizados na aplicação de algoritmos. Nas décadas de cinquenta e sessenta, as investigações "*foram realizadas principalmente por psicólogos de orientação behaviorista e serviam de veículo para estudar questões gerais relacionadas com o desenvolvimento de competências e com a memória, entre outras*". Na década de setenta, os temas em análise centraram-se, essencialmente, no significado da Álgebra para os alunos e na importância da aprendizagem significativa. Referindo-se às últimas três décadas, Kieran identifica três grupos temáticos, nos quais enquadra as principais linhas de investigação da didática da Álgebra: 1) Transição da Aritmética para a Álgebra, variáveis e incógnitas, equações e sua resolução, e *word problems*; 2)

[173] Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Utilização de ferramentas tecnológicas e foco na múltipla representação e generalização; 3) Pensamento algébrico dos alunos do ensino básico, enfoque no binómio professor/ensino da álgebra, e modelos de situações físicas e outros ambientes dinâmicos da álgebra.

O primeiro grupo temático, entre o qual se enquadram os estudos realizados por Van Ameron[174], Hoch e Dreyfus[175], Stacey e MacGregor[176], entre outros, centra-se na transição da Aritmética para a Álgebra, referindo que os alunos, no trabalho realizado no âmbito da Álgebra, utilizam as regras aprendidas na Aritmética, mas revelam resistência ao distanciamento das mesmas. O construtivismo, inspirado em Piaget, encontrava-se ligado à ideia de que o conhecimento é ativamente construído pelo aluno e promoveu uma alteração do enfoque dos investigadores que, na década de oitenta, focaram a sua atenção nos erros cometidos pelos alunos, para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos[177]. Além disso, reconheceu-se a utilidade das novas tecnologias na aprendizagem da Álgebra, permitindo o estabelecimento de uma ligação mais estreita entre estas e as funções, o que fomentou um entendimento fundamental das conexões entre as equações e os gráficos para o desenvolvimento do significado das várias representações algébricas. Deste modo, criou-se uma maior amplitude do domínio a Álgebra, a qual não se limita apenas ao estudo e à resolução de equações, mas abrindo portas ao estudo das funções e suas diferentes representações, bem como situações de contexto real e *word problems*.

O segundo grupo temático investiga o impacto das novas tecnologias na aprendizagem da Álgebra, tendo concluído que estas tornaram os alunos mais participativos em contexto de sala de aula. Sendo que grande parte da investigação realizada neste âmbito se baseia na resolução de *word problems*, envolvendo

[174] Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54, 1*, pp.63-75.
[175] Hoch, M., e Dreyfus, T. (2009). Developing Katy's algebraic structure sense. *Proceedings of the 6th Conference for European Research in Mathematics Education*. Lyon.
[176] Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The journal of Mathematic Behavior, 18(2)*, pp.149-167.
[177] Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* , pp. 707-762. NCTM

essencialmente o estudo das funções em relação com situações de contexto real, verificou-se que o uso das novas tecnologias permitiu uma maior clareza no binómio Álgebra-funções.

O terceiro grupo temático surge no decurso da década de noventa, onde a investigação é ampliada ao pensamento algébrico dos alunos. Uma vez que a Álgebra havia já sido aplicada ao estudo de funções e a modelos de situações em contexto real, estabeleceu-se a acessibilidade da Álgebra a um universo maior de alunos, , incluindo os do ensino elementar. Por outro lado, estudo anteriores, feitos com alunos do ensino secundário, revelavam que o seu foco era o cálculo, o que demonstrava uma ausência de análise relacional entre operações, o que implicava que, com esta nova visão, era necessário reajustar o ensino, nomeadamente pela introdução, no ensino básico, de explorações algébricas na escolaridade básica, o que originou uma nova linha investigativa, a *early álgebra*. Note-se que, segundo Kieran[178], é o recurso a tarefas que manipulem símbolos e letras algébricas que permite o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico. No entanto, as referidas tarefas podem também ser abordadas sem se recorrer a qualquer tipo de simbolismo, nomeadamente através do uso de relações entre quantidades, análise de regularidades, estudos de variação, generalizações, resolução de problemas, modelação, justificação, demonstração e conjetura. Assim sendo, a *early álgebra* estabelece pela primeira vez uma relação entre a aprendizagem da Álgebra a nível elementar e secundário.

Ainda na mesma década, e segundo a mesma autora[179], o trabalho desenvolvido pelos professores e o próprio ensino da Álgebra passaram a constituir o centro das investigações. Quer a prática docente, quer a evolução de novas teorias de aprendizagem da Álgebra foram influenciadas pelo desenvolvimento das novas tecnologias. Neste âmbito decorreram investigações relativas ao conhecimento dos

[178] Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? .*The Mathematics Educator, 8(1)*, pp.139-151.

[179] Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education:Past, present and future* , pp. 11-49. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

professores acerca das formas de pensamentos dos alunos e as várias influências das práticas docentes, tendo concluído, por exemplo, que os docentes não tinham preparação prévia, nem material adequado aos objetivos propostos e que esta corrente se centrava essencialmente nos professores, em detrimento dos alunos. Outros estudos centraram-se em atividades de modelação que envolviam artefactos físicos ou ferramentas de modelação tecnológicas, os quais sugerem também que existe uma relação entre gestos e palavras que levam os alunos a atribuir sentido às expressões algébricas[180]. Desta forma, apareceram novas perspetivas teóricas, nas quais a experiência física e corporal assume um papel determinante na criação de significados para objetos algébricos, gerados por ambientes dinâmicos.

Os estudos realizados concluíram, portanto, que o estudo da Álgebra constitui um percurso em espiral, a ser desenvolvido ao longo da escolaridade. Tendo em conta a perspetiva pela qual o processo de ensino-aprendizagem é analisado, as questões levantadas serão retomadas, analisadas e reestruturadas. Concomitantemente, surgem novas problemáticas.

3.6 – Atividade algébrica e fontes de significado em Álgebra

De acordo com Lins e Gimenez[181], a contextualização dos problemas em Álgebra não é determinante para a sua resolução. A atividade algébrica pode, então, ser entendida como “fazer ou usar álgebra” e ser caracterizada “*pela presença de certos processos aplicados a certos conteúdos*”, tornando-se, deste modo, essencial investigar a significação gerada no seio dessa atividade.

[180] Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., e Cerulli, M. (2004). The sensual and the conceptual: Artefact-mediated Kinesthetic actions and semiotic activity. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,4*, pp. 73-88.
[181] Lins, R. C., e Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.

Para Meira[182], as diversas situações de ensino-aprendizagem promovem a produção de significados. A atividade algébrica implica ações que englobam obrigatoriamente mas não em exclusivo, o objetivo de aplicar saberes algébricos na resolução de problemas ou na comunicação de resultados matemáticos. Para o autor, um aluno encontra-se inserido numa atividade algébrica sempre que produz significados para a Álgebra e utiliza a linguagem algébrica para resolver um problema, dado que partilha com outros sujeitos "*uma forma específica e socialmente reconhecida de resolver problemas*", mesmo que cometa erros na utilização dessa linguagem. Além disso, defende que "*a ideia de atividade algébrica pode ser comparada ao uso que o bebé entre os 12 e os 18 meses faz da língua materna nas fases iniciais de desenvolvimento da fala, quando ele já pode construir algumas palavras e sentenças que são incorretas, mas muito ricas do ponto de vista dos seus objetivos de comunicar algo*".

Sfard[183] considera ser possível construir e produzir significados para a maioria dos conceitos matemáticos, segundo duas visões que assentam na possibilidade de identificar a mesma expressão algébrica como processo e como objeto: I) a *visão operacional* (centrada nos processos numéricos); II) a *visão estrutural de pensamento* (centrada nas operações efetuadas sobre expressões algébricas e não numéricas, enquanto entidades matemáticas como objetos reais). Segundo a autora, a aquisição de um conceito matemático faz-se, num momento inicial, através da operacionalização, sendo que a passagem para a sua forma estrutural assenta em três fases: a *interiorização*, a *condensação* e a *reificação*.

A primeira fase - *interiorização* – pressupõe uma familiarização por parte do aluno com os procedimentos que possivelmente darão origem à aquisição de um novo conceito e à concretização de operações com objetos matemáticos familiares. Considera-se que um processo se encontra interiorizado quando este for passível de realização através de operações efetuadas mentalmente. A segunda fase - *condensação* - pressupõe a criação de entidades autónomas e facilmente

[182] Meira, L. (2003). Significados e modelagem na actividade algébrica. *Boletim GEPEM (42)*, pp.37-45.
[183] Sfard, A. (1991). On dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, pp. 1-36

manipuláveis, através da compilação de processos anteriores . Segundo a autora, este constitui o momento *oficial* de criação de um novo do conceito. Quando o aluno adquire a capacidade de combinar facilmente um processo com outros já conhecidos, estabelecendo comparações, generalizações e alternâncias entre diferentes representações de um conceito, o primeiro evolui. A terceira fase – *reificação* - pressupõe uma "*capacidade de ver algo familiar numa perspetiva completamente nova*", alargando-se, deste modo, a compreensão matemática e a capacidade de operacionalização através do manuseamento de expressões algébricas. Quando o aluno concebe a nova entidade matemática como um objeto no seu todo, autónomo e com características próprias, independentemente dos processos que lhe deram origem, o conceito diz-se reificado.

A autora defende também que as perspetivas histórica e psicológica do desenvolvimento da Álgebra apontam para esta dualidade processo-objeto, enquanto fundamental e inerente à aprendizagem matemática, pelo que esta deve ser trabalhada por meio de conexões entre ao binómio Álgebra/Aritmética, fomentando nos alunos, de acordo com as tarefas a realizar, a capacidade de recorrerem à conceção operacional e estrutural.

A autora considera que o pensamento algébrico se faz através de um alinhamento de procedimentos que vão da conceção operacional para a estrutural, pelo que os conceitos reificados se apresentam como os pontos de partida para uma conceção operacional elevada. Será então passível o início de um novo ciclo que permita a criação de um novo objeto, sempre que existir apropriação prévia de um objeto matemático.

A reificação apresenta-se para a autora como sendo um patamar difícil de atingir, na medida em que o ciclo existente nesse processo é vicioso: "*por um lado, sem uma tentativa de interiorização de nível mais elevado, a reificação não ocorrerá, por outro, a existência de objetos sobre os quais são realizados processos de nível mais elevado, parece indispensável para a interiorização.*"[184]

[184] Ibidem, p.3

Já para Sfard e Linchevski[185] o significado dado a uma expressão algébrica depende do contexto da situação ou problema em que esta surge e do que somos capazes ou do que estamos preparados para compreender. As autoras investigaram a aplicação da teoria da reificação à Álgebra, tendo concluído que mesmo os alunos com bom desempenho escolar que utilizavam com frequência a *functional approach* não estavam ainda preparados para compreender a dualidade processo-objeto nem mesmo para interiorizar uma visão funcional. No que respeita concretamente às expressões algébricas, os estudos apontam para que estas representem para os alunos meras cadeias simbólicas às quais aplicam procedimentos habituais e cujo significado assenta apenas na manipulação algébrica. Assim sendo, para as autoras é necessário rever a ordem pela qual os conceitos algébricos fundamentais são expostos aos alunos e usufruir da tendência natural destes para a visão operacional, iniciando-se pelos processos e não pelos objetos matemáticos já construídos. Apesar das limitações, as autoras reconhecem que uma abordagem funcional pode ser eficaz, se for acompanhada de trabalho com calculadoras gráficas e de algumas alterações nas práticas dos docentes, mas manifestam, ainda assim, alguma preocupação com o facto de um excesso de apoio da tecnologia poder levar os alunos a formarem conceções pseudo-estruturais, pelo que consideram que o importante é motivar os alunos a empenharem-se ativamente na procura de significado, em cada fase da aprendizagem.

Hershkowits, Scharwz e Dreyfus[186] defendem um modelo de abstração. Neste, a abstração é vista como "*uma atividade de reorganização vertical da matemática previamente construída numa nova estrutura matemática*", a qual, implicando uma atividade mental, não é passível de ser observável. Segundo os autores, o contexto tem de ocupar um papel preponderante no processo de abstração e, numa atividade, pode recorrer-se a processos anteriores de abstração, uma vez que esta se tem início numa forma inicial de abstração ainda não concluída, pelo que o processo se assume

[185] Sfard, A., e Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, pp.191-228.
[186] Hershkowitz, R., Scharwz, B., e Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32 (2)*, pp. 195-222.

como sendo recursivo. Assim, são necessárias conexões diversas para a construção numa nova estrutura matemática.

Radford[187], tal como outros investigadores, apoiou-se na semiótica para tratar a questão do significado. Para o autor, o significado algébrico tem origem em três fontes principais: I) a estrutura algébrica em si mesma; II) o contexto do problema; III) as causas externas ao contexto do problema.

Kieran[188] sustenta que o significado adveniente de múltiplas representações destacadas na Álgebra escolar poderia ser aditado à classificação elaborada por Radford, apresentando da seguinte forma as fontes de significado em Álgebra:

1. Significado intrínseco à Matemática:
   (a). Significado da própria estrutura algébrica, envolvendo a letra como símbolo.
   (b). Significado de múltiplas representações.
2. Significado do contexto do problema.
3. Significado derivado do que é exterior à matemática/ contexto do problema.

Booth[189] defendia que a habilidade de manusear eficazmente símbolos algébricos obriga à compreensão das propriedades estruturais das operações matemáticas, aspetos semânticos da Álgebra: " *a aquisição de significado surge com a capacidade de 'ver' as ideias abstratas escondidas atrás dos símbolos*"[190]. Kieran[191], parafraseando o autor, refere-se ao significado proveniente da própria estrutura algébrica, envolvendo a letra como símbolo. Para a autora, esta fonte estrutural do

---

187 Radford, L. (2004). *Syntax and meaning*. In M. J. Hoines, e A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* , pp. 161-166. Norway.

188 Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* .p.6. NCTM

189 Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.). *The ideas of algebra*, K-12, pp.20-32. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

190 Sfard, A., e Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, p.224.

191 Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* .p.6. NCTM

significado permite o estabelecimento de relações entre as representações simbólicas literais e as representações numéricas iniciais, pelo que é fundamental para a aprendizagem da Álgebra, mesmo que a natureza do significado para os alunos possa ser pouco sólida.

De acordo com Kieran[192], o nascimento e a evolução do raciocínio algébrico assentam essencialmente na resolução de situações problemáticas contextualizadas. Defende ainda que
uma semântica exterior à Álgebra contribui para que o aluno possa "*fundir símbolos e notações com eventos e situações, criando, assim, um significado externo para certos objetos e processos algébricos*". Contudo, a Álgebra contempla metodologias que permitem solucionar todo o tipo de problemas, pelo que a autora considera que "problemas reais" originam um tipo de atividade que integra a utilização de artefactos físicos ou de ferramentas tecnológicas. Logo, a criação de significados resulta também de fatores exteriores à Matemática e ao contexto problemático, pelo que é fundamental considerar outros fatores, tais como "gestos, movimentos corporais, palavras, metáforas e artefactos que se entrelaçam durante a atividade matemática".

Esta linha de pensamento havia já sido defendida por Radford[193] . Este autor verificou que no processo de aprendizagem existia uma disparidade entre o suporte efetivo manifestado pelos alunos e o suporte que se acreditava existir, o que levou a uma tendência das investigações para o estudo das influências de outros fatores, tais como a linguagem, a linguagem corporal e a experiências dos alunos, como fontes de significado.

Para Kieran[194], o conceito de Álgebra como atividade promotora de significados teve como ponte de partida os resultados de uma investigação onde se estudou a resposta de vários indivíduos ligados à matemática relativamente à questão "O que é a

---

192 Ibidem, p.712.

193 Radford, L. (2000). Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, pp. 237-268.

194 Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* .p.6. NCTM.

Álgebra", tendo obtido respostas muito diversificadas, mas que, para Kieran[195], tiveram como elemento comum o seu reconhecimento como "atividade". Segundo a autora, esta perspetiva mais ampla integra e amplia diversas conceções da Álgebra, nomeadamente a de Usiskin[196].

Tendo em conta esta nova conceção, Kieran[197] apresentou um modelo de concetualização da atividade algébrica que contempla três tipos de atividades em álgebra escolar: I) generalização, II) transformação/ de regras básicas e III) global/ grau superior, modelo novamente referido pela autora como modelo GTG[194].

Segundo a autora, as atividades de generalização compreendem a escrita de expressões e de equações, objeto da Álgebra. É durante a execução deste tipo de atividades que ocorre a significação dos objetos algébricos. A concretização dessas atividades tem como base a escrita simbólica ou um conjunto de representações, destacando-se os polinómios e as equações ou as funções, de acordo com a abordagem algébrica vivenciada pelos alunos. Assim, considera-se que a abordagem usada é basilar e propicia aos alunos "uma conceção transversal única, para os três tipos de atividade algébrica"[198] .

Por outro lado, segundo Kieran[199], as atividades de transformação ou atividades de regras básicas "relacionam-se fundamentalmente com a mudança da forma simbólica de uma expressão ou equação", possibilitando a aquisição dos significados de equivalência e de propriedades e axiomas no tratamento de expressões algébricas. Neste tipo de atividade, inserem-se aspetos ligados ao reconhecimento de termos semelhantes, à simplificação de expressões, à substituição de uma expressão por outra equivalente, à factorização, à adição e multiplicação de expressões polinomiais e à resolução de equações e de inequações.

---

[195] Ibidem, p.713.
[196] Usiskin, Z. (1988) - Conceptions of School Algebra and Uses os Variable. In: A. F. Coxford & A.P. Schulte (Eds.), *The Idea of Algebra, K–12* (pp. 8–19). Reston, VA: NCTM
[197] Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (1998). *Eighth International Congress on Mathematical Education: Selected lecture*s. Sevilha: S.A.E.M. Thales, pp. 271-290.
[198] Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* .p.714. NCTM.
[199] Ibidem.

No mesmo contexto, a autora[200] menciona refere a fragilidade relativa à relação existente entre as atividades de generalização e transformação e os aspetos conceptuais da álgebra e as competências desenvolvidas no tratamento de expressões algébricas, referindo as atividades de manipulação excedem das capacidades que lhe são inerentes. A autora defende ainda que qualquer tarefa relacionada com uma atividade de transformação pode promover, em simultâneo, uma atividade de generalização, quando leva a uma evolução nas conceções dos alunos sobre os objetos da álgebra. Para além disso, refere que no decurso de atividades de transformação, aparece a relação existente entre álgebra e aritmética, elemento do controlo teórico do conhecimento dos alunos .

As dificuldades inerentes à identificação das propriedades usadas na transformação de expressões numéricas e algébricas foram já alvo de diversos estudos.

Neste âmbito, uma investigação realizada por Kirshner e Awtry[201] sugere que alguns dos erros cometidos pelos alunos em atividades de transformação estão relacionados com equívocos relativamente à forma, mais do que com questões de controlo teórico, pelo que consideram, que a saliência visual é fundamental no que respeita à aprendizagem inicial da Álgebra. Assim sendo, para os autores, as regras visualmente salientes têm uma coerência visual que permitem que dois membros de uma igualdade apareçam naturalmente relacionados.

Além disso, para Kieran[202], as atividades de nível global/ grau superior, por se tratarem processos matemáticos e atividades de âmbito mais geral, como resolução de problemas, conjetura e observação de relações ou de estruturas, constituem atividades matemáticas em que se utiliza a Álgebra como instrumento e que podem ser tratadas sem se recorrer à escrita algébrica simbólica. Salienta-se, no entanto, que estas atividades são "*essenciais noutras atividades algébricas*", pelo que não

[200] Ibidem.
[201] Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35(4).*
[202] Ibidem.

podem ser separadas da Álgebra. Por serem atividades cujo caráter é mais abrangente, podem constituir uma base para o pensamento algébrico, o qual permite o início do trabalho simbólico no ensino básico.

O caráter abrangente e multifacetado das atividades de nível global/ grau superior explicam a sua importância no processo relacionado com a produção de significados e a sua relevância no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Pode considerar-se, assim, que a crescente relevância atribuída à aquisição de significados na aprendizagem em Álgebra se relaciona com o seu entendimento como modo de pensar e ler o mundo e não apenas como instrumento teórico-formal de resolução de situações problemáticas.

Segundo Arcavi[203], o pensamento algébrico possui a capacidade de significação dos símbolos e operações, bem como a existência de *sentido do símbolo*, que envolve a capacidade de interpretação e de uso criativo de símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas.

Além disso, para Fiorentini, Miorim & Miguel[204], existe "*uma relação de natureza*" entre pensamento algébrico e linguagem, sendo que o pensamento algébrico pode ser caracterizado pelos seguintes componentes: "*perceção de regularidades; perceção de aspetos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização*". É segundo esta perspetiva que os autores apresentam uma nova conceção da educação algébrica assente na execução de três etapas evolutivas:I) exploração de situações abertas e formalização de situações aritméticas ou geométricas, visando a obtenção de generalizações; II) atribuição de significado às expressões algébricas; e III) manipulação formal.

---

203 Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

204 Fiorentini, D., Miorim, A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. In *Pro-posições, 4(1)*, pp.85-87.

Lins e Gimenez[205] também defendem que dar significação a dadas situações é uma forma de se pensar algebricamente e destacam duas finalidades no processo de ensino-aprendizagem da Álgebra: possibilitar que os alunos criem significado para a Álgebra e que desenvolvam o seu pensamento algébrico.

Para o efeito, consideram que as tarefas a realizar pelos alunos devem ter em conta os campos conceptuais já adquiridos e facultar o desenvolvimento progressivo de novos conceitos.

Pelo exposto, e como defende Kieran[206], o pensamento algébrico é desenvolvido "na encruzilhada de diversos sistemas semióticos, matemáticos e não matemáticos". Radford[207], aparece estreitamente relacionado com a atividade algébrica, sendo que esta se revela de extrema relevância no alinhamento gradual entre significados criados pelos alunos e os significados algébricos da matemática em contexto de ensino-aprendizagem.

3.7 - Erros e Dificuldades na Aprendizagem da Álgebra

Como já referido, a não compreensão do significado de expressões algébricas ou das condições da sua equivalência resultam em erros na utilização de expressões algébricas, os quais constituem as principais dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução de equações. As dificuldades mencionadas derivam da tendência para o recurso à concetualização da Aritmética em Álgebra. Verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica

[205] Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.
[206] Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). NCTM
[207] Radford, L. (2004). Syntax and meaning. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1. Norway, p.163..

Ao longo dos últimos anos, foram várias as investigações que procuraram compreender as dificuldades e os erros mais comuns cometidos pelos alunos na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações de 1.º grau.

Partindo da síntese elaborada por Ponte *et al.*[208], apresenta-se um quadro que sintetiza os principais erros e dificuldades analisados e catalogados nesta área ao longo dos últimos anos.

Autor(es)	**Erro / Dificuldade**	**Exemplo**
Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey,1997	Adição de termos que não são semelhantes; Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma ação	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$
Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996	Uso de parênteses	$3(x+2)=7x \Leftrightarrow 3x+2=7x$
Kieran, 1985	Decisão sobre começar a resolver uma equação	
Kieran, 1985	Desrespeito pela convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número	
Kieran, 2006	Adição incorreta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$
Kieran, 1985	Adição incorreta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$
Kieran, 1985, 1992	Transposição incorreta de termos	$16x-215=265 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 16x=265-215$ $30=x+7 \Leftrightarrow 30+7=x$ $3x+5=2x \Leftrightarrow 3x=2x+5$ $7x=x+8 \Leftrightarrow 7-8=x+x$
Kieran, 1992	Redistribuição *(Redistribution)*	$-2x+5=8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2x+5-5=8+5$

[208] Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério de Educação. DGIDC.

Kieran, 1992	Eliminação	3x –3 = 2x – 4 x = 2x-4
Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis	Conclusão incorreta da resolução da equação	$6x = 24 \Leftrightarrow 6 + x = 24$ $11x = 9x = \frac{11}{9}$ $2x = 4 \Leftrightarrow$ $i) \quad x = 4 - 2$ $ii) \quad x = \frac{4}{-2}$ $iii) \quad x = \frac{2}{4}$ $-x = -17 \Leftrightarrow ???$ $-x = 4 \Leftrightarrow ???$

Tabela 8 - Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º Grau.
(adaptado de Ponte *et al.*, 2007)

Estes erros advém, frequentemente, do facto de os alunos, sobretudo quando confrontados com regras que não compreendem, optarem por criar as suas próprias regras, segundo o que acreditam ter compreendido, o que os induz, naturalmente, em erro. Nestas situações, o professor tem um papel preponderante na colmatação dessas e outras falhas e, consequentemente, na procura de estratégias que melhorem a aprendizagem.

Booth[209] identifica três áreas principais em que os alunos apresentam dificuldades: I) a interpretação das letras; II) a formalização dos métodos utilizados e III) a compreensão de notações e convenções, sendo estas mesmas dificuldades referidas noutros estudos.

Por um lado, refere que os alunos, tendencialmente, veem as letras como forma de representar certos números, ou seja, incógnitas. Nesta situação, a dificuldade emerge na interpretação das letras de uma forma globalizante, ou então da sua visão a letra como variável. Outra dificuldade assenta na compreensão dos valores atribuídos a letras diferentes, sendo que esta tendência para interpretar letras como incógnitas

[209] Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFERNELSON.

pode ter sido gerada aquando da Aritmética, em que o centro do trabalho desenvolvido assenta na obtenção de uma resposta numérica.

Por outro lado, e como também defendido por Matos[210] os alunos também manifestam dificuldades na formalização do método utilizado, predominando raciocínios informais dependentes da situação em que são desenvolvidos, o que dificulta a formulação de generalizações.

Finalmente, e tal como Matos[211] e Lima[212] referem, existe uma terceira área em que os alunos revelam dificuldades, relacionada com a compreensão de notações e convenções, que se manifesta de diversos modos nos desempenhos dos alunos em estudo.

Nabais[213] refere ainda que "*[a]inda os alunos possam aplicar cegamente regras de manipulação ou procedimentos que julgam ter compreendido, a ocorrência de raciocínios erróneos revela ausência de compreensão do significado matemático de equação. Cabe ao professor identificar situações em tal acontece, e procurar estratégias de ensino que favoreçam o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa para os alunos e uma melhoria das suas práticas de ensino*".

Também Hall[214] procurou analisar e catalogar alguns erros cometidos na resolução de equações de 1.º grau a uma incógnita. O quadro que se segue apresenta os principais erros apontados pelo autor.

Tipo de erro	**Exemplo**
Supressão	$3x-3+2=12-3 \Leftrightarrow x+2=9$

[210] Matos, A. (2007). *Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Tese de mestrado (Universidade de Lisboa).
[211] Ibidem.
[212] Lima, R. (2007). *Equações algébricas no ensino médio: Uma Jornada por diferentes mundos da Matemática.* Tese de Doutoramento. São Paulo: PUC/SP.
[213] Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.ºano*. Tese de Mestrado, p.60. (Universidade de Lisboa).
[214] Hall, R. (2002). *An analysis of errors made in the solution of simple linear equations*. Retirado em 28 de setembro de 2014 de http://www.people.exeter.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf

Troca de operação inversa (Other Inverse Error)	$4x = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 4$
Redistribuição	$x + 37 = 150 \Leftrightarrow x + 37 - 10 = 150 + 10$
Troca de membros (switching addends)	$x + 37 = 150 \Leftrightarrow x = 37 + 150$
Transposição	$\frac{x}{2} + 3 = 5 \Leftrightarrow x + 3 = 10$
Omissão	$5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 6x + 2 - 2 = 3x + 12$
Divisão	$3x = 10 \Leftrightarrow x = 3,1$
Ausência de estrutura	$5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 3 + 2 = 3x - 8$

Tabela 9 - Erros na resolução de equações lineares (adaptado de Nabais, 2010, p. 60)

As dificuldades relacionadas com a utilização da notação algébrica estendem-se também ao uso de parênteses. Segundo Booth[215] , os alunos não sentem necessidade de os usar, dado:

I) a crença de que o contexto do problema determina a ordem pela qual as operações devem ser efetuadas;

II) o entendimento de que, na ausência de um contexto específico, a ordem das operações é feita naturalmente, da esquerda para a direita;

III) a ideia de que será sempre obtido o mesmo valor, independentemente da ordem pela qual sejam feitas as operações.

Também Pesquita[216] procurou compreender quais os processos de raciocínio usados por alunos de 8.º ano de escolaridade aquando de situações que requeiram pensar algebricamente, bem como as dificuldades e os erros mais frequentes por estes apresentadas neste âmbito. Para o efeito, utilizou duas perspetivas distintas, já assinaladas por Kieran, a *processual* (em que não se procede à transformação de expressões algébricas, mas à substituição de variáveis por números, realizando depois as correspondentes operações aritméticas) e a *estrutural* (conjunto diferente de operações, realizadas com expressões algébricas e não com números), tendo concluído que o desempenho dos alunos pode variar consoante a perspetiva utilizada.

---

215 Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFERNELSON.

216 Pesquita, I., & Ponte, J. P. (2006). *Dificuldades dos alunos do 8.º Ano no trabalho em Álgebra*. Retirado em 10 de outubro de 2014 de http://www.eselx.ipl.pt/eselx/downloads/SIEM/C05.pdf

CAPÍTULO IV – O ENSINO DA ARITMÉTICA NO SISTEMA BRAILLE

4.1 - Escrita de números e a sua aprendizagem em Braille

O sistema Braille, também conhecido por sistema de escrita em relevo, é composto por 64 sinais ($\mathbf{2^6} = \mathbf{64}$) formados por 6 pontos (incluindo o espaço em branco), agrupados em duas filas verticais de três pontos cada, a que se dá o nome de *sinal fundamental*, sendo que o espaço por ele ocupado se designa por *Célula Braille*.

Muitas vezes, existe necessidade de se recorrer a prefixos que confiram um significado diferente à célula, tal como acontece quando se pretende obter letras maiúsculas, em que tem de se fazer anteceder o prefixo de maiúscula ⠨ (pontos 46); ou na obtenção dos algarismos arábicos no sistema Braille, em que se trabalha com as dez primeiras letras do abecedário Braille, **a** - **j**, precedidas do prefixo de número ⠼ (pontos 3456).

Na tabela abaixo, podemos visualizar a representação dos algarismos arábicos a negro, a Braille e como se deverá fazer a respetiva leitura.

A negro	Representação em BRAILLE	Códigos (como se lê para um aluno cego)
1	⠼⠁	**(3456), (1)**
2	⠼⠃	**(3456), (12)**
3	⠼⠉	**(3456), (14)**
4	⠼⠙	**(3456), (145)**
5	⠼⠑	**(3456), (15)**
6	⠼⠋	**(3456), (124)**
7	⠼⠛	**(3456), (1245)**
8	⠼⠓	**(3456), (125)**
9	⠼⠊	**(3456), (24)**
0	⠼⠚	**(3456), (245)**

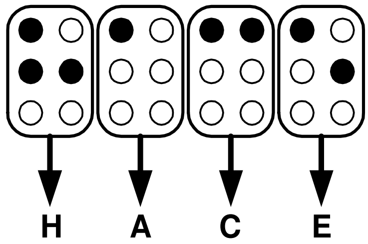
Tabela 10: Os algarismos em Braille

Para se representar o algarismo ***um*** na escrita a Braille, utiliza-se a letra ***a*** e o prefixo de número ⠼ (pontos 3456). A letra ***a,*** por ser a primeira do alfabeto, e o ***prefixo de número*** para a respetiva conversão numérica. Se quiséssemos representar o algarismo ***sete*** teríamos de utilizar a letra ***g,*** por ser a sétima letra do abecedário, e o respetivo ***prefixo de número*** que confere o grau de número, e assim sucessivamente até à letra ***j*** que corresponde ao algarismo zero.

Na escrita de números, a utilização do prefixo é imprescindível, uma vez que a sua omissão daria outro significado, como se pode verificar através de situações concretas:

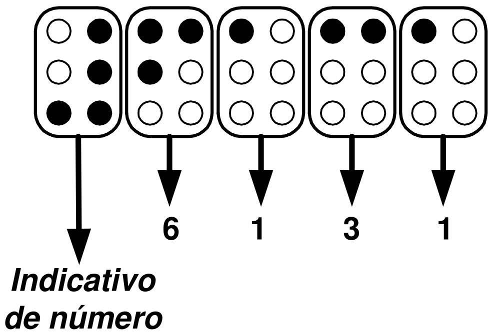
<u>Exemplo 1:</u>

Numa primeira situação, em Braille, se escrevermos **8135** sem prefixo, obtemos a palavra ***hace*** e não o número **8135** como desejaríamos.



.
<u>Exemplo 2</u>:

Numa segunda situação, em Braille, se escrevermos a palavra ***faca*** e colocarmos o ***prefixo de número*** obtemos o número ***6131*** e não a palavra ***faca***.



A caneta e o papel estão para o aluno normovisual como a Máquina *Perkins Brailler* está para o aluno cego e, como tal, o professor deverá ser conhecedor da funcionalidade da Máquina Perkins Brailler para posterior controlo do posicionamento dos dedos do aluno, para ler o que o aluno está a escrever e para proceder a algumas correções, caso seja necessário.

Para uma melhor compreensão na sua utilização, passa-se a descrever o significado das teclas da Máquina *Perkins Braille*.

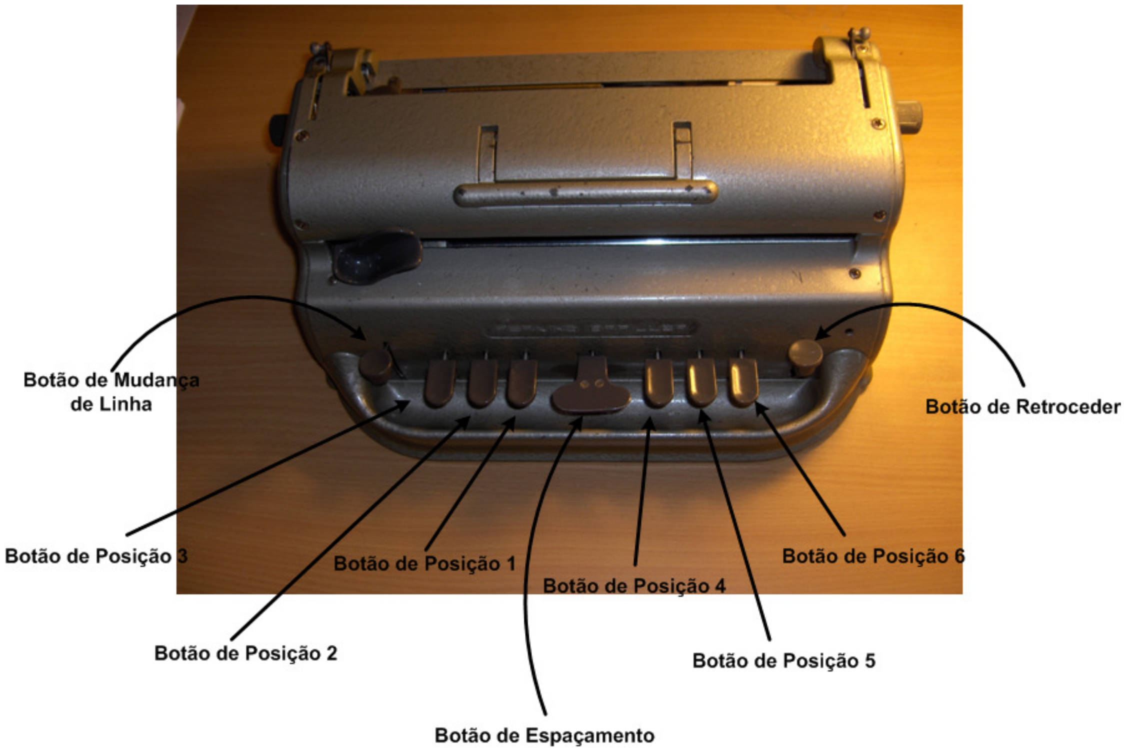


Figura 3: Elementos constituintes da Máquina *Perkins Braille*

Na escrita de números, é necessário utilizar sempre o indicativo de número para que se saiba que se está na presença de um número e não de uma letra

Assim sendo, passa-se a descrever os quatro primeiros algarismos na máquina *Perkins Braille*:

Escrita do Indicativo de número:

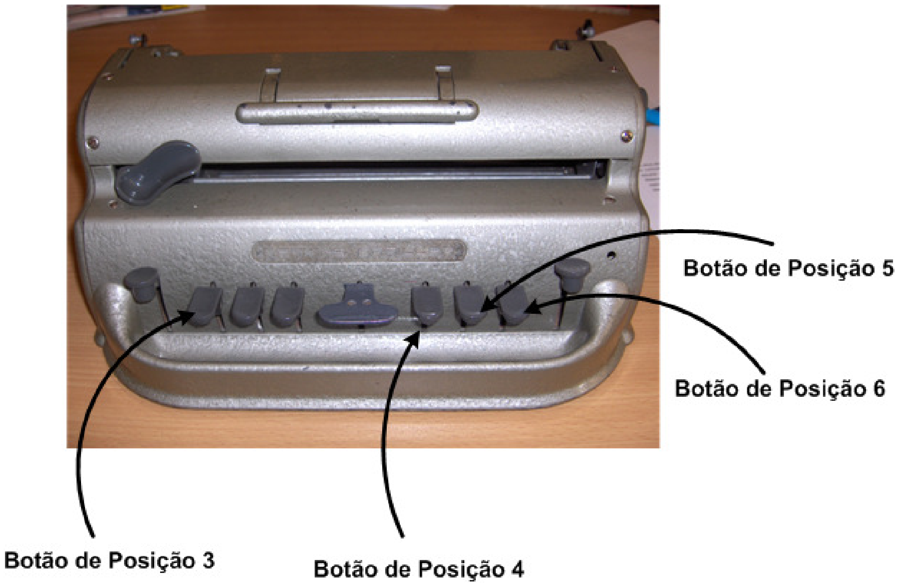
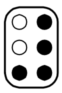


Figura 4: Escrita do indicativo de número na Máquina Perkins Braille

O professor, ao ditar qualquer que seja o número ao aluno, o aluno começará por escrever o respetivo indicativo de número, posicionando os seus dedos, tal como está indicado na figura acima e obterá na respetiva folha a célula:

.

Passa a descrever-se, a título exemplificativo, a escrita dos algarismos de 1 a 4 na máquina Perkins:

<u>Escrita do Algarismo 1</u>:

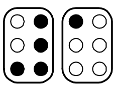
O algarismo **<u>um</u>** corresponderá à letra **<u>a</u>**, precedida do indicativo de número:

***<u>1.º Passo</u>*:** Escrever o indicativo de número.

<u>2º passo:</u> Escrever a letra ***<u>a</u>***.

Botão de Posição 1

Desta forma, obtém-se o algarismo 1 (um) que dever-se-á ler ao aluno (3456), (1) e, na folha, aparecerá, em Braille, da seguinte forma:

.

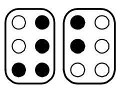
<u>Escrita do Algarismo 2</u>:

O algarismo **<u>dois</u>** corresponderá à letra **<u>b</u>**, precedida do indicativo de número:

<u>1º Passo</u>**:** Escrever o indicativo de número.

<u>2º passo:</u> Escrever a letra ***<u>b</u>***.

Obtém-se, assim, o algarismo 2 (dois) que dever-se-á ler ao aluno (3456), (12) e, na folha em Braille, aparecerá

,

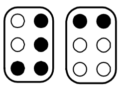
Escrita do Algarismo 3:

O algarismo **<u>três</u>** corresponderá à letra **<u>c</u>**, precedida do indicativo de número:

<u>1º Passo</u>**:** Escrever o indicativo de número.

<u>2º passo:</u> Escrever a letra ***<u>c</u>***.

Obtém-se, desta forma, o algarismo 3 (três), que dever-se-á ler ao aluno (3456), (14) e, em Braille, ficará

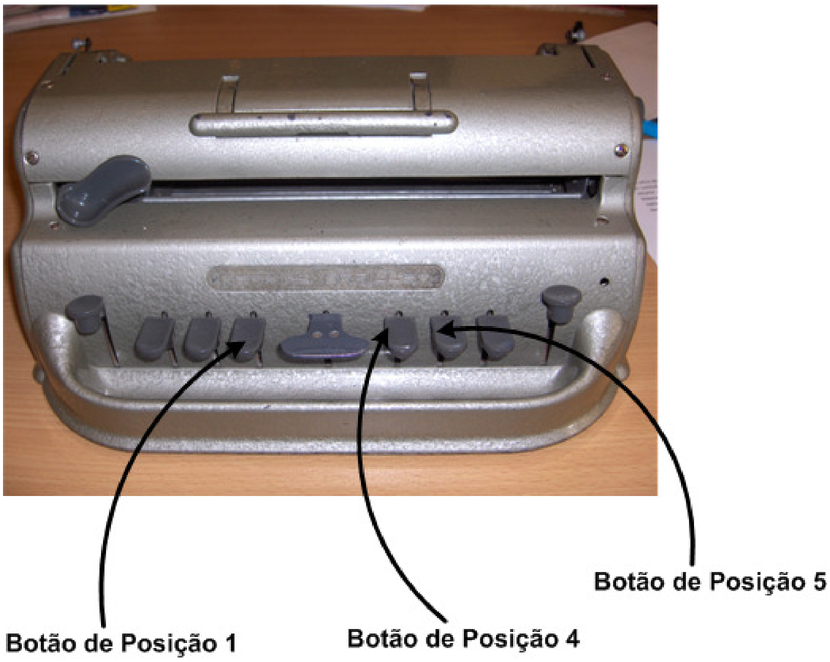


Escrita do Algarismo 4:

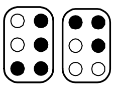
O algarismo **quatro** corresponderá à letra **d**, precedida do indicativo de número:

***1º Passo*:** Escrever o indicativo de número.

2º passo: Escrever a letra ***d***.

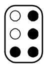


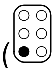
Assim, obtém-se o algarismo 4 (quatro) que dever-se-á ler ao aluno (3456), (145) e em Braille ficará:



4.1.1 - Números Inteiros

Para se fazer a escrita de números inteiros, no sistema Braille, deve ter-se em consideração os seguintes aspetos:

- utiliza-se somente as letras de a - j, precedidas do prefixo  (pontos 3456);

- poder-se-á utilizar o ponto 3 () que substitui a negro o espaço que se usa na separação dos números em classes de três algarismos, embora tal se verifique apenas na divisão de números constituídos por mais de quatro algarismos, tanto para a parte inteira como para a parte decimal (ver tabela 2, duas últimas linhas).

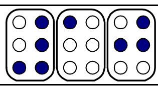
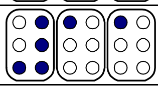
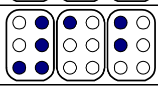
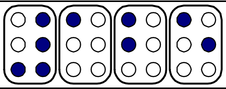
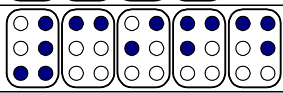
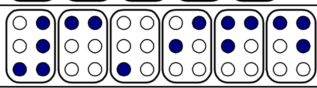
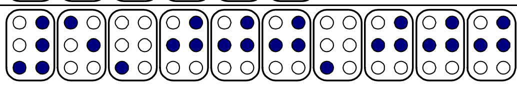
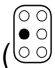
A negro	Representação em BRAILLE	Códigos (como se lê para um aluno cego)
10		(3456), (1), (245)
11		(3456), (1), (1)
12		(3456), (1), (12)
....	....	....
125		(3456), (1), (12), (15)
3964		(3456), (14), (24), (124), (145)
3 964		(3456), (14), (3), (24), (124), (145)
5 000 000		(3456), (15), (3), (245), (245), (245), (3), (245), (245), (245)

Tabela 11: Os Números Inteiros

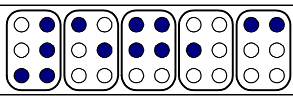
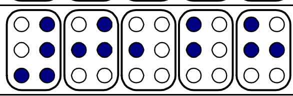
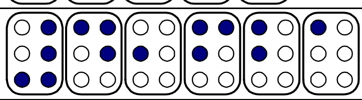
4.1.2. Números Racionais

A representação de um qualquer número racional pode ser feita sob a forma de fração ou razão ou quociente, cujos termos são números inteiros e ainda sob a forma de dízima ou numeral decimal.

4.1.2.1 - Números Decimais

A negro utiliza-se a vírgula para separar a parte inteira da parte decimal, o mesmo acontece no sistema Braille, em que a vírgula é representada pelo ponto 2, ().

No caso das dízimas finitas, que não deixam de ser dízimas infinitas periódicas de período zero, não haverá nenhum inconveniente na GMB, uma vez que só é necessário utilizar o ponto 2 e o aluno saberá que está na presença de uma dízima finita ou numeral decimal. (ver tabela 3)

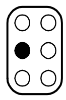
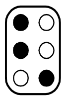
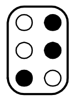
	A negro	Representação em Braille	Códigos (como se lê para um aluno cego)
Dízimas Finitas	57,3		(3456), (15), (1245), (2), (14)
	0,28		(3456), (245), (2), (12), (125)
	4,621		(3456), (145), (2), (124), (12), (1)

(Tabela 12: Os Números Decimais ou Dízimas Finitas)

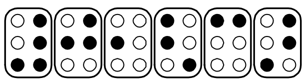
Quanto às dízimas infinitas periódicas, deve-se ter em atenção as diferentes representações existentes, pois poderá induzir o aluno em erro de escrita e até mesmo de compreensão do conceito. Descreve-se, de seguida, três métodos diferentes de representação do mesmo conceito, por ordem preferencial.

<u>1.º Método:</u>

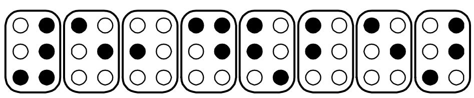
Tomando como exemplo $\frac{1}{3} = 0,(3)$

Trata-se de uma dízima infinita periódica de período 3, na qual o professor deverá optar pela representação a Braille tal como a tinta, pois será mais simples de compreender, o aluno apenas terá de saber que o número que se repete deverá ser colocado entre parênteses. Assim sendo, o aluno cego representará da mesma forma que todos os outros alunos da turma, utilizando o ponto 2 como vírgula , ponto 126 como abertura de parênteses  e o ponto 345 como fecho de parênteses .

A sua representação Braille ficará:

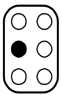
.

Considerando como segundo exemplo a seguinte dízima infinita periódica de período 25, **5,4(25)**, a sua representação Braille será:

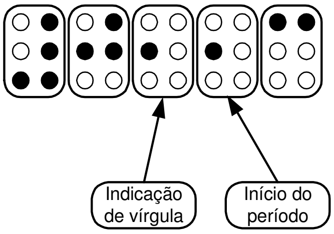


Este método de representação é o mais simples e de fácil compreensão, pois nunca levará o aluno a confundir-se.

2.º Método:

Outro método de representar, considerando o mesmo exemplo, é mais suscetível de confundir o aluno ou de induzi-lo em erro, não deixando contudo de ser uma forma de representação, em que o aluno terá de utilizar duas vezes o mesmo ponto, ponto 2, . Quer isto dizer que o mesmo sinal terá dois significados diferentes, o primeiro ponto 2 indicará a vírgula (separação da parte inteira da parte decimal) e o segundo ponto 2 indicará o início do período propriamente dito, assim o aluno perceberá que o número posterior ao segundo ponto 2 será o período da dízima em questão.

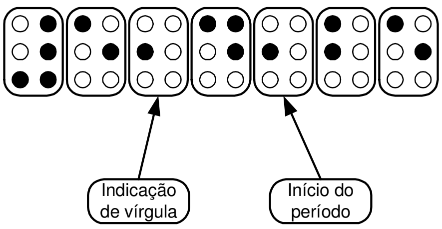
Sendo assim, a sua representação Braille ficará:



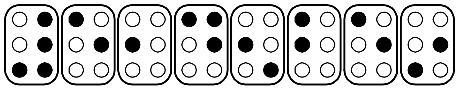
Considerando agora a dízima infinita periódica de período 25, **5,4(25)**, apresenta-se outro exemplo:

O aluno utilizará o primeiro ponto 2, após ao número 5, como indicação de separação da parte inteira da decimal (vírgula) e o segundo ponto 2 só irá colocar depois do 4, uma vez que é aí que irá iniciar o período, neste caso 25.

Em Braille ficará:



<u>3.º Método:</u>

O último método a ser apresentado não se distingue muito do primeiro método referido anteriormente. Neste o aluno apenas terá de trocar os parênteses curvos pelos parênteses auxiliares, utilizados apenas na grafia Braille. A sua representação também é muito simples: .

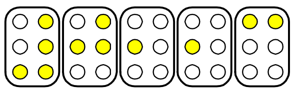
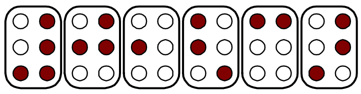
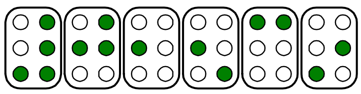
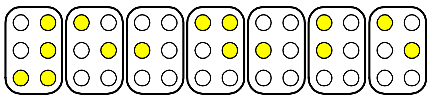
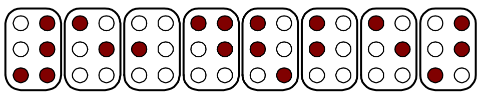
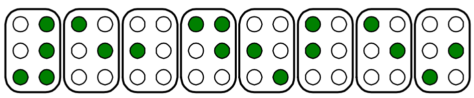
	A negro	Representação em Braille	Códigos (como se lê para um aluno cego)
Dízimas Infinitas Periódicas	0,(3)		(3456), (245), (2), (14)
	0,(3)		(3456), (245), (2), (126), (14), (345)
	0,(3)		(3456), (245), (2), (26), (14), (35)
	5,4(25)		(3456), (15), (2), (145), (2), (12), (15)
	5,4(25)		(3456), (15), (2), (145), (126), (12), (15), (345)
	5,4(25)		(3456), (15), (2), (145), (26), (12), (15), (35)

Tabela 13: Os Números Decimais ou Dízimas Infinitas Periódicas

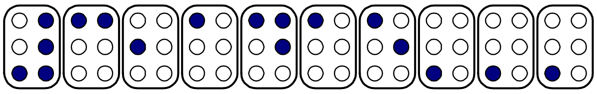
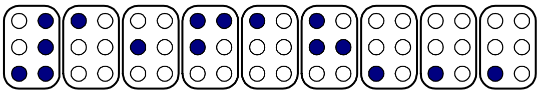
	A negro	Representação em Braille	Códigos (como se lê para um aluno cego)
Dízimas Infinitas Não Periódicas	3,1415…		(3456), (24), (2), (1), (145), (1), (15), (3), (3), (3)
	1,618…		(3456), (1), (2), (124), (1), (125), (3), (3), (3)

Tabela 14: Os Números Decimais ou Dízimas Infinitas Não Periódicas

O fenómeno da polissemia encontra-se bem presente na linguagem simbólica da Matemática a tinta, sendo esta ainda mais notória na transição para a linguagem matemática a Braille. Um dos muitos exemplos que podem evidenciar este fenómeno consiste na existência da a barra vertical (|), simbolizando a relação aritmética “ser divisor de” e, simultaneamente, “valor absoluto ou módulo de um número”.

4.1.2.2. - Números Fracionários

Uma fração é uma representação versátil e muito rica, porque permite expressar diferentes relações. Mas esta multiplicidade de significados pode produzir ambiguidades, sendo fundamental que os professores estejam alertados para dificuldades que irão surgir durante o seu percurso de ensino, mas que, por outro lado, saibam tirar partido dessa mesma diversidade.

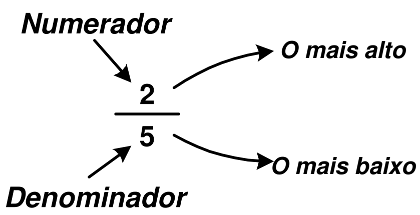
Neste campo, o professor deverá ter a noção da complexidade a que está submetido, uma vez que levará o aluno ao erro com relativa facilidade, como se pode verificar através seguinte exemplo:

Na escrita a negro, um professor, quando inicia o estudo das frações, começa por referir que o termo que está em cima se denomina por ***numerador*** e o termo de baixo por ***denominador***.

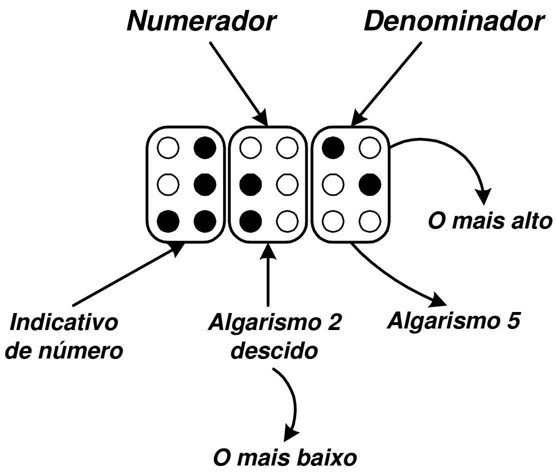
Estas referências são suscetíveis de induzir o aluno em erro, pois na GMB a posição dos dois conceitos acaba por ser exatamente oposta. A fim de evitar possíveis confusões futuras, o professor deverá explicar ao aluno que o numerador numa fração irá surgir ligeiramente descido, enquanto que o denominador aparecerá na mesma posição, pelo que, em termos relativos, será o que aparece mais alto.

A título de exemplo, apresenta-se a seguinte situação:

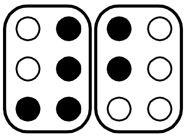
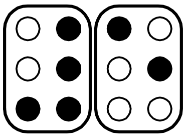
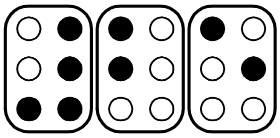
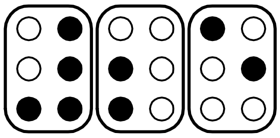
Ao escrever a fração $\frac{2}{5}$, na escrita a negro, temos:

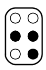


Na escrita a Braille, a representação de $\frac{2}{5}$ é feita do seguinte modo:



Na tabela seguinte, podemos observar o perigo que decorre de uma incorreta escrita matemática, pois, se o aluno não respeitar a "descida" do algarismo ou número que representa o numerador, acabará por representar outro qualquer número. No exemplo concreto, se o aluno não respeitar a "descida" do algarismo 2, obterá o número 25 e não a desejada fração $\frac{2}{5}$.

A negro	**Representação em Braille**	**Códigos (como se lê para um aluno cego)**
2		**(3456), (12)**
5		**(3456), (15)**
25		**(3456), (12), (15)**
$\frac{2}{5}$		**(3456), (23), (15)**

Antes de um aluno aprender a trabalhar com frações, ele utiliza para representar quocientes o símbolo (256), .

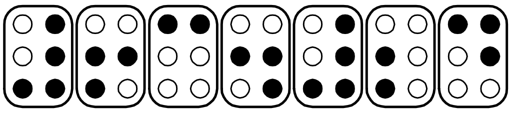
É observável que um aluno que entre no 3º Ciclo do Ensino Básico a representar frações utilizando o símbolo (256) apresenta fortes fragilidades na disciplina de Matemática e, neste caso, o professor terá de tomar medidas de reforço, pois o aluno revela, entre outras, uma falta de compreensão de resolução de expressões numéricas.

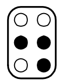
Caso o professor não diagnostique esta lacuna, poderá estar a contribuir grandemente para um bloqueio futuro no que respeita à aquisição de novos conhecimentos matemáticos do aluno.

Para se perceber melhor esta ideia, temos como exemplo a seguinte situação:

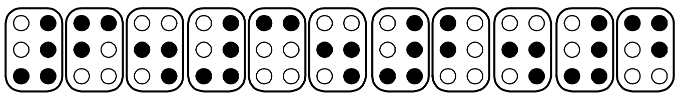
O professor dita ao aluno: “seis terços a dividir por dois quartos”.

A negro surgirá da seguinte forma, $\frac{6}{3} \div \frac{2}{4}$, e a Braille:

.

Um aluno recém-entrado no 3º Ciclo que utilize somente o símbolo (256), , revela não ter noção da escrita de uma fração e tal implicará um grave problema na progressão dos seus estudos em Matemática.

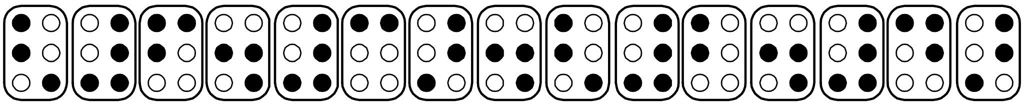
Ao ouvir a referida expressão, um aluno que só utiliza o símbolo (256), escreverá a seguinte expressão:



Para além de ficar uma expressão exaustiva, tal facto conduzirá o aluno a um resultado errado, pois a sua representação não corresponde à expressão ditada pelo professor. Assumindo que o aluno tem um conhecimento concreto das prioridades das operações, ele irá obter o seguinte resultado: $\mathbf{6 \div 3 \div 2 \div 4 = 0{,}25}$, resultado errado em relação ao que foi proposto pelo professor, uma vez que a expressão ditada pelo professor era a seguinte:

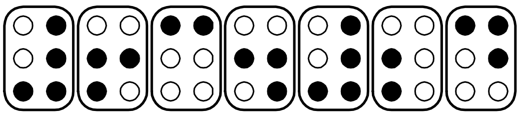
$$\frac{6}{3} \div \frac{2}{4} = \frac{6}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{24}{6} = 4.$$

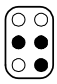
Não quer isto dizer que o aluno não poderá utilizar apenas o símbolo (256) para traduzir corretamente a expressão mencionada pelo professor, contudo, além da expressão ficar muito extensa, fica ainda mais complexa, o que não irá facilitar os cálculos ao aluno e, neste caso, torna-se obrigatória a utilização de parênteses curvos para que a expressão corresponda na integra à desejada pelo professor:



Após a análise desta situação, e tratando-se de uma expressão simples e de fácil resolução, conclui-se que a GMB constitui o pilar de sustentação de um aluno cego, caso contrário, o aluno estará condenado ao insucesso e aqui o professor tem um papel crucial e preponderante no desvio desta condenação.

Um aluno cego que domine a grafia de frações ficará perante uma expressão deveras simplificada:

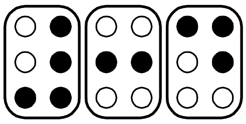
.

Outra situação que merece a máxima atenção do professor é evitar que um aluno, ao utilizar o método descaído, cometa o erro de colocar o sinal de divisão, não tendo consciência, porém, de que ao descair o número estará a evitar usar o sinal de divisão, pois o número descaído corresponderá ao numerador e o que se mantém na posição original corresponderá ao denominador. Situações como a descrita acontecem com muita regularidade, é frequente o aluno utilizar este método e acrescentar o sinal de divisão (256), , estando, desta forma, a dar outro significado e não o verdadeiro.

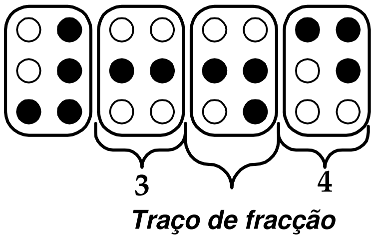
Observe-se a situação seguinte:

Pretende-se que o aluno escreva a fração $\frac{3}{4}$.

Corretamente a Braille ficará:

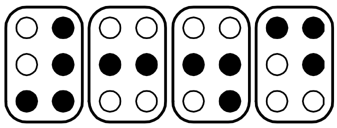


Mas muitos dos alunos têm a tendência para cometerem o seguinte erro:



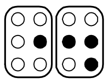
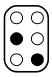
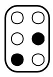
O aluno acaba de escrever uma fração diferente da desejada: ele pretende escrever $\frac{3}{4}$, mas escreve $\frac{34}{4}$ e, muitas vezes, este erro passa impune, uma vez que o aluno memoriza a expressão desejada e poderá fazer corretamente os cálculos seguintes. O erro somente é observado pelo professor quando feita a devida transcrição e, em certos casos, poderá ser altamente penalizador para o aluno, por exemplo em situação de exame nacional, em que os alunos são avaliados por níveis de desempenho. Ora, se o aluno não memorizar a expressão dada, tal situação será ainda mais gravosa, dado que todos os cálculos se afastarão do pretendido.

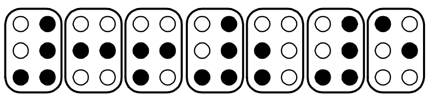
Se repararmos, $\frac{34}{4}$ na escrita a Braille é:

.

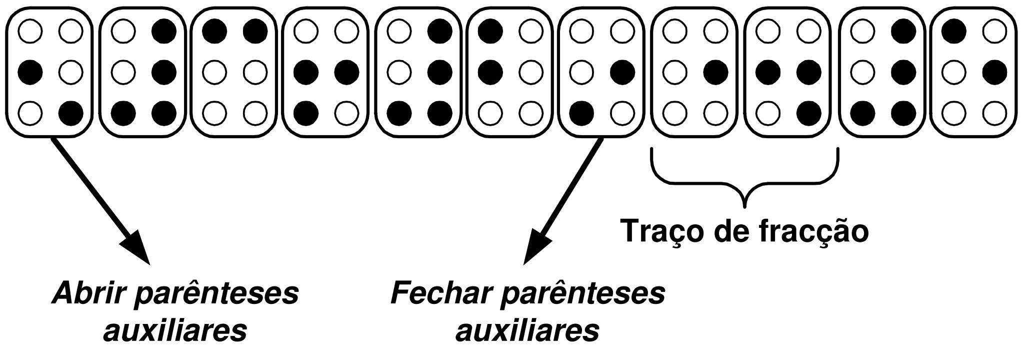
Considerando que o presente trabalho de investigação se centra no 3.º Ciclo do Ensino Básico, poder-se-á pensar que tal situação não deveria aqui ser incluída, contudo, a prática letiva de docentes que trabalham com alunos cegos neste nível de ensino demonstra que, em Portugal, surgem nas salas de aula, alunos cegos que ingressaram no 7ºano de escolaridade sem saberem representar frações, tendo, em muitos casos, obtido classificação satisfatória no ano transato. O que fará este aluno quando confrontado com expressões numéricas mais complexas? E expressões com variáveis? A solução é enquadrar o aluno no Decreto-Lei 3/2008, pois, dessa forma, este terá direito a usufruir de adequações curriculares, o que facilita o sistema educativo e o próprio professor, mas, na verdade, não resolve as dificuldades sentidas pelo aluno, mas sim bloqueia-lhe todo o seu processo ensino e aprendizagem.

Para se sentir a verdadeira complexidade do mundo fracionário para um aluno cego, observe-se uma expressão um pouco mais complexa. Neste exemplo, o professor pede ao aluno para escrever a seguinte expressão: $\frac{3+2}{5}$.

Neste caso, o aluno terá de representar a fração de uma nova forma, utilizando a seguinte simbologia, (5) (256),  e recorrendo ainda a parênteses auxiliares (26), , para abrir e (35),  para fechar. Como já foi mencionado anteriormente, estes parênteses auxiliares só existem no sistema Braille para facilitar a escrita e podem repetir-se indefinidamente, sem causar qualquer equívoco, uma vez que os sinais de fechar parênteses aparecem na ordem inversa às aberturas correspondentes.

Se um aluno pretender continuar a utilizar a linha de pensamento, o que é a tendência geral dos alunos, de que o numerador será o algarismo descaído e o denominador o algarismo na sua posição de origem, verá que obtém uma expressão totalmente diferente da que pretende: ,
o que ele obtém não tem qualquer significado, ele "visualizará" um possível número 36 e um número 2 no numerador e no denominador possivelmente um número 5, expressão esta confusa e sem qualquer significado.

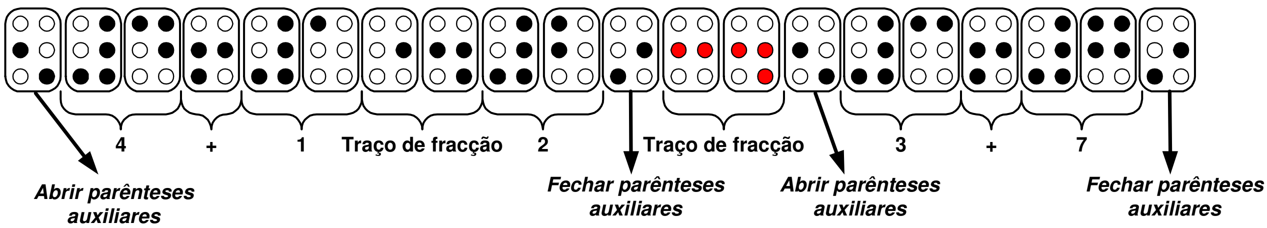
Aqui o aluno terá obrigatoriamente de usar o símbolo (5) (256), em que o ponto (5) lhe dá a noção de que está perante uma fração mais complexa e terá de usar os parênteses auxiliares que lhe indicarão o início e o fim do numerador e o início e o fim do denominador, se for caso disso. Sendo assim, corretamente escrito ficará:



Note-se que há a necessidade do uso de parênteses auxiliares para mostrar a exacta constituição dos termos da fração.

Segue-se outra expressão numérica de maior dificuldade de escrita: $\dfrac{4+\frac{1}{2}}{3+7}$.

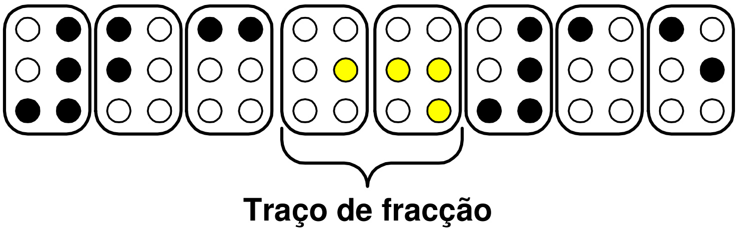
Neste caso, o processo já não é tão linear, uma vez que o aluno, para além do símbolo (5)(256) e dos respetivos parênteses auxiliares, pontos (26) e (35), terá de usar o símbolo (25)(256), que significa traço de fração, na qual um dos termos, pelo menos, é outra fração. A expressão aparecerá do seguinte modo:



É de enorme necessidade e importância o sinal (25),(256) para o aluno cego, uma vez que lhe permite "visualizar" corretamente divisões sucessivas. São diversas as situações em que estas aparecem com regularidade e que aparentemente parecem idênticas, mas que matematicamente são completamente distintas:

1.º Método: Basta usar o sinal (5)(256) ou o método descaído

$\frac{23}{15} \rightarrow$



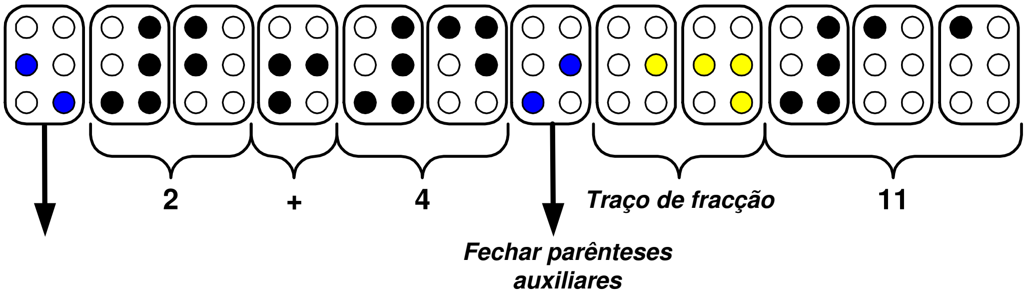
Ou, utilizando o método descaído,

$\frac{23}{15} \rightarrow$

Estas duas formas são as mais indicadas para trabalhar frações simples.

<u>2.º Método:</u> Basta usar parênteses auxiliares e o sinal (5), (256).

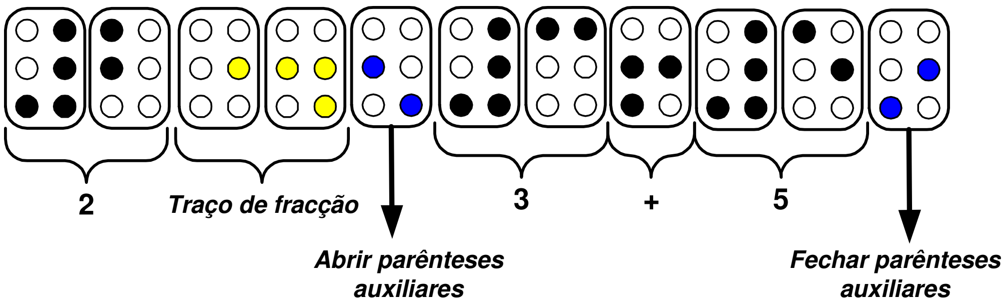
$$\frac{2+4}{11} \rightarrow$$



Os parênteses auxiliares indicam, neste caso, o início e o fim do numerador, dividendo ou antecedente.

<u>3.º Método:</u> Basta usar parênteses auxiliares e o sinal (5), (256).

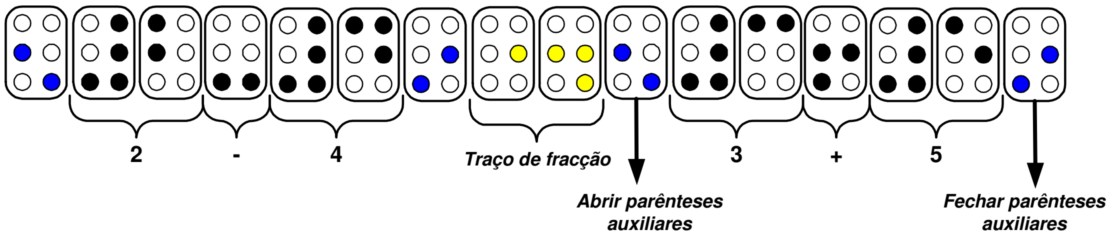
$$\frac{2}{3+5} \rightarrow$$



Para este caso, os parênteses auxiliares indicam o início e o fim do denominador, divisor ou consequente.

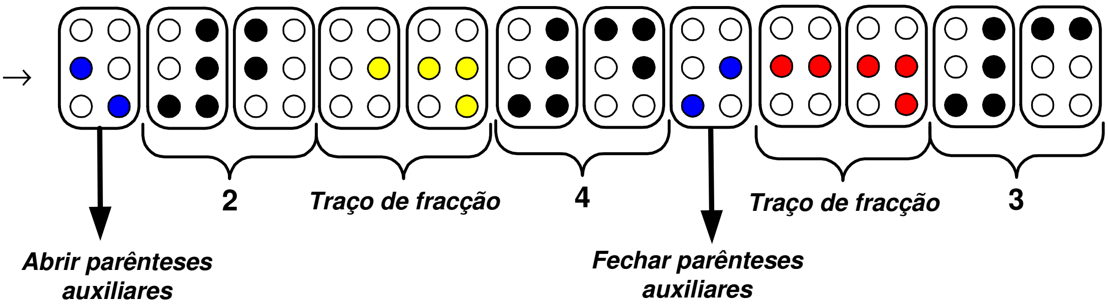
4.º Método: Basta usar parênteses auxiliares e o sinal (5), (256).

$$\frac{2-4}{3+5} \rightarrow$$



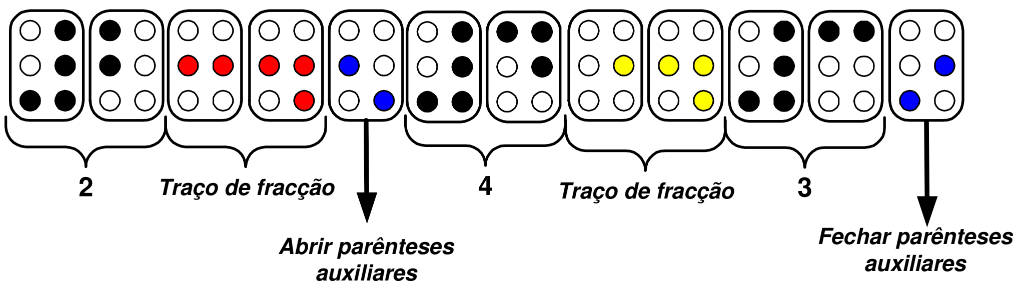
5.º Método: O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma fração cujo numerador é também uma fração.

$$\frac{\frac{2}{4}}{3} \rightarrow$$



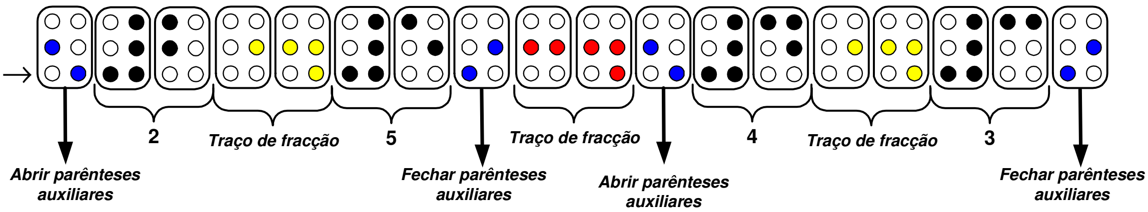
6.º Método: O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma fração cujo denominador é também uma fração.

$$\frac{2}{\frac{4}{3}} \rightarrow$$



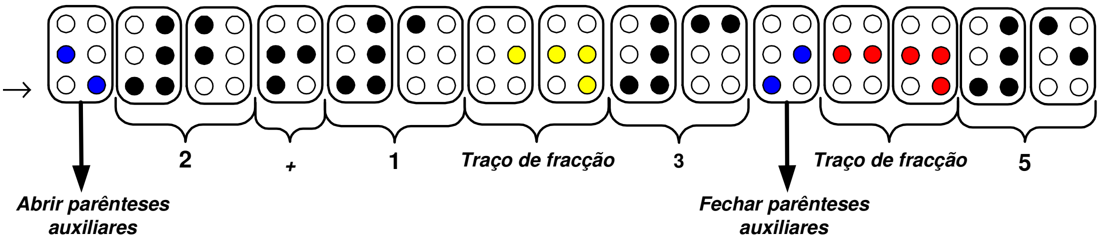
7.º Método: O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma fração cujo numerador e denominador são também frações.

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{3}} \rightarrow$$



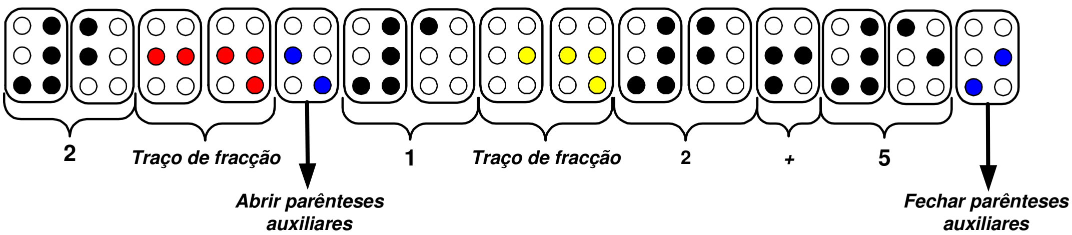
8.º Método: O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma operação aritmética, qualquer que seja, no numerador da fração.

$$\frac{2+\frac{1}{3}}{5} \rightarrow$$



9.º Método: O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma operação aritmética, qualquer que seja, no denominador da fração.

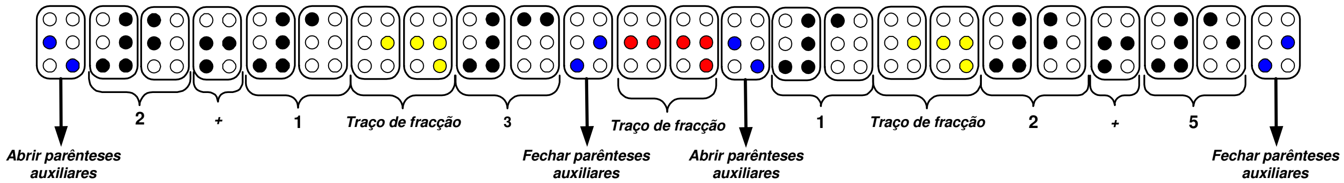
$$\frac{2}{\frac{1}{2}+5} \rightarrow$$



<u>10.º Método:</u> O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma operação aritmética, qualquer que seja, tanto no numerador como no denominador da fração.

$$\frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+5}$$

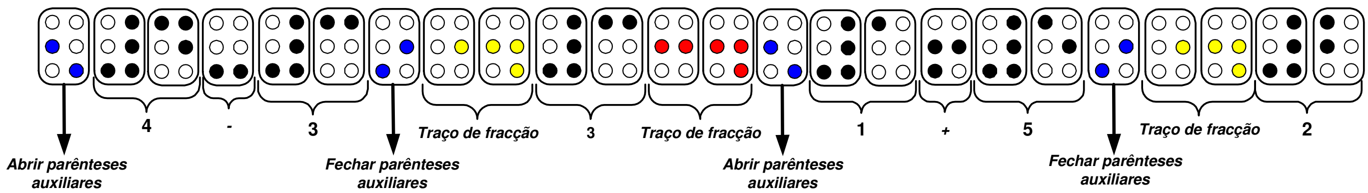
$$\downarrow$$



<u>11.º Método:</u> O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma divisão de duas frações cujos numeradores são compostos por operações aritméticas, quaisquer que elas sejam.

$$\frac{\frac{4-3}{3}}{\frac{1+5}{2}}$$

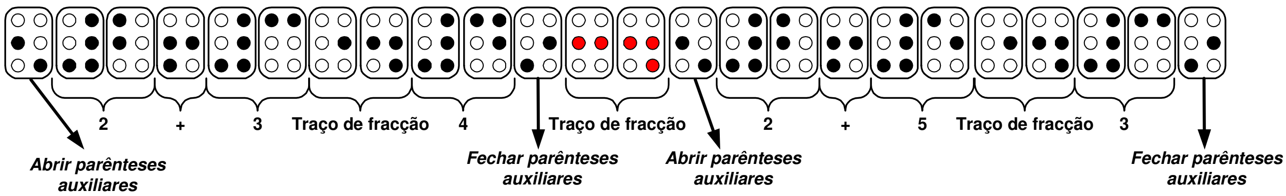
$$\downarrow$$



ou

$$\frac{\frac{2+3}{4}}{\frac{2+5}{3}}.$$

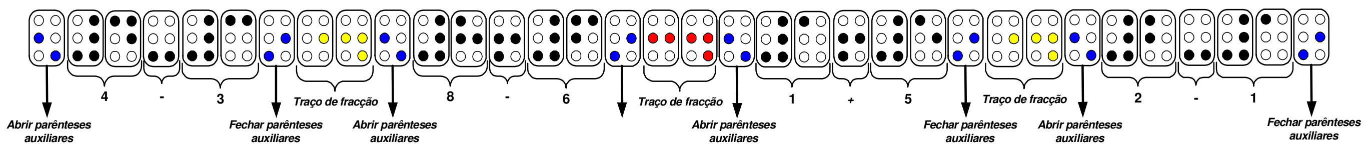
↓



12.º Método: O aluno terá de usar parênteses auxiliares, o sinal (5), (256) e o sinal (25), (256), este último para indicar que estará perante uma divisão de duas frações cujos numeradores e denominadores são compostos por operações aritméticas, quaisquer que elas sejam.

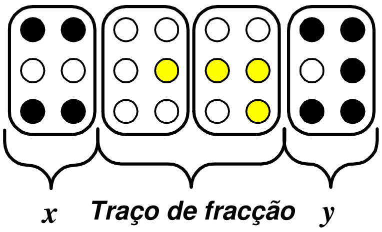
$$\frac{\frac{4-3}{8-6}}{\frac{1+5}{2-1}}$$

↓

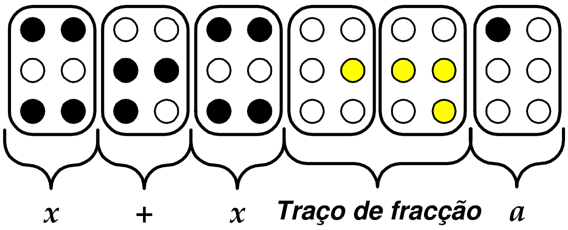


O emprego de letras, incógnitas ou variáveis em frações segue exatamente o mesmo processo de escrita mencionado anteriormente, como se pode verificar através dos seguintes exemplos:

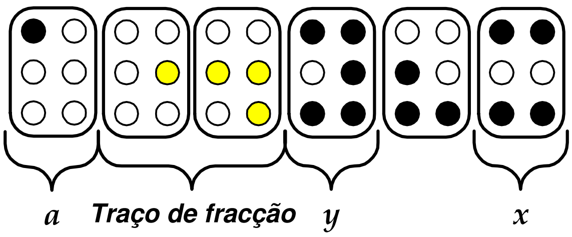
$\frac{x}{y} \rightarrow$



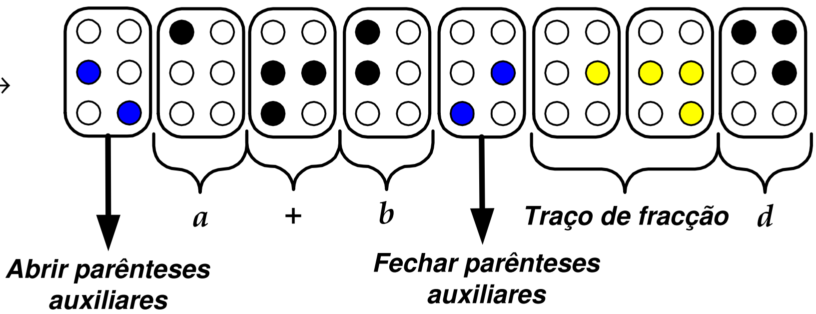
$x+\frac{x}{a} \rightarrow$



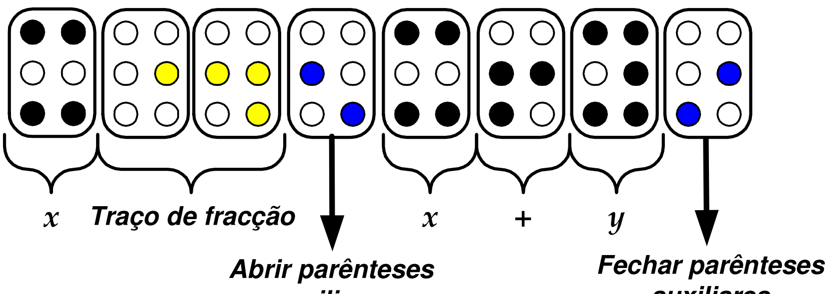
$\frac{a}{y}x$ ou $\frac{ax}{y}$ ou $\frac{a}{y}\times x$ ou $\frac{a}{y}\cdot x \rightarrow$



$\frac{a+b}{d} \rightarrow$

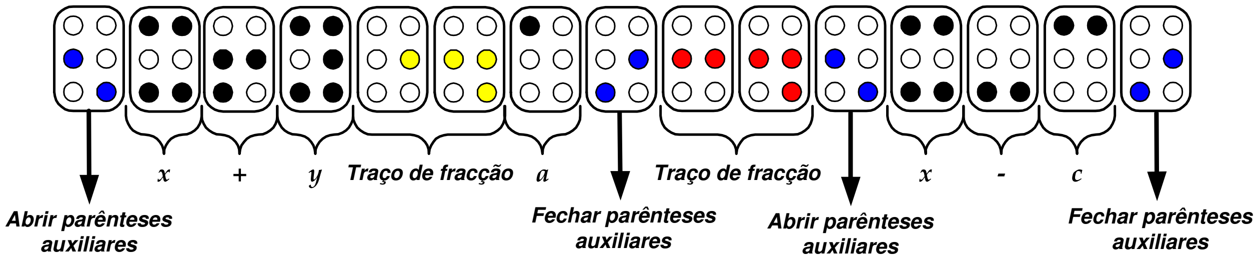


$\frac{x}{x+y} \rightarrow$



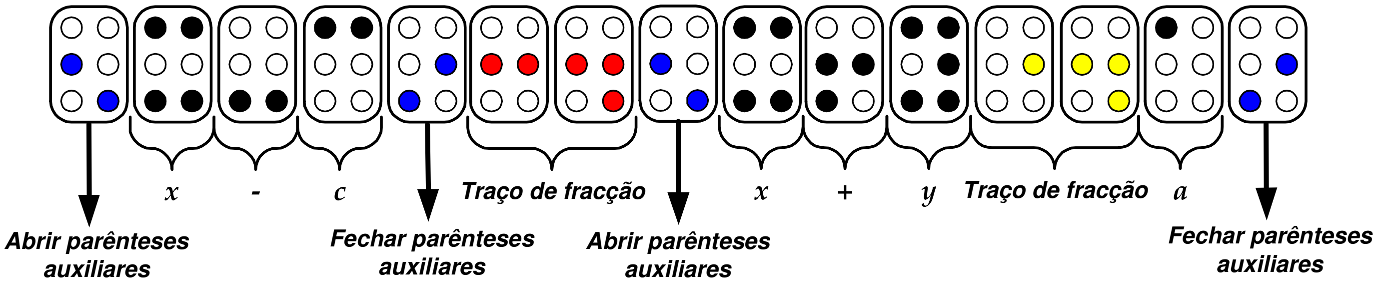
$$\frac{\frac{x+y}{a}}{x-c}$$

$$\downarrow$$



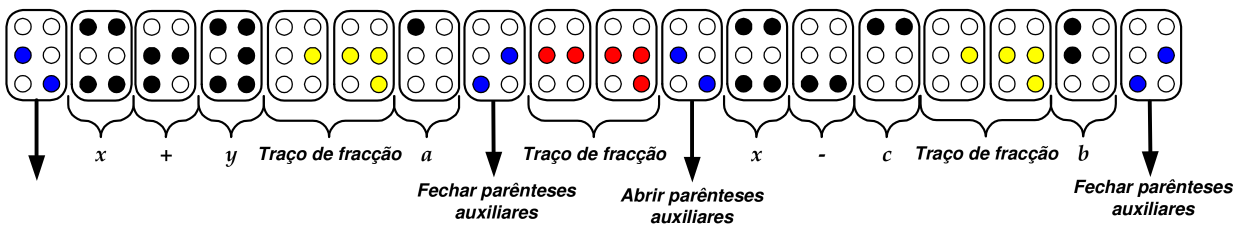
$$\frac{x\text{-}c}{\frac{x+y}{a}}$$

$$\downarrow$$



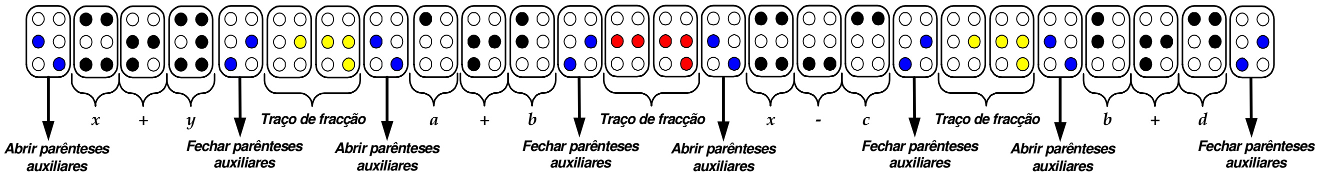
$$\frac{\frac{x+y}{a}}{\frac{x-c}{b}}$$

$$\downarrow$$

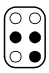
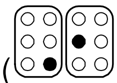


$$\frac{\frac{x+y}{a+b}}{\frac{x-c}{b+d}}$$

$$\downarrow$$

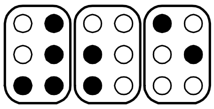


Poder-se-á, na representação de números fracionários, utilizar ainda os pontos (6,2), correspondente a uma barra, por exemplo a negro **4/3**,

As representações Braille para expressões numéricas que contenham o sinal de dividir (, pontos (256) ou a barra (, pontos 6, 2), não se podem dizer que estejam incorretas, uma vez que podem ser usadas em situações em que não haja recursos adequados; contudo são didaticamente desaconselháveis, pois podem produzir significações diferentes das desejadas.

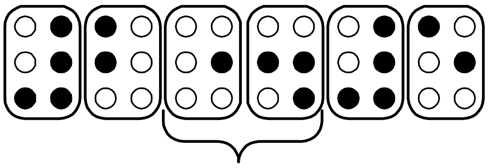
Convém ainda referir, que em contexto de sala de aula, as representações Braille mais usuais são:

<u>Numa 1ª fase</u>:



No “método descaído” representa a negro $\frac{2}{5}$.

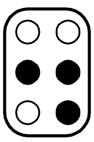
<u>Numa 2ª fase</u>:

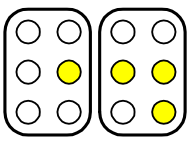


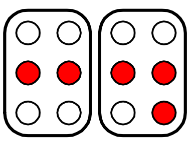
Traço de fracção

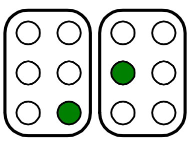
Aconselhada resolução de frações de complexidade elevada, representa a negro $\frac{2}{5}$, utilizando os pontos (5),(256).

Concluindo, os sinais a trabalhar com os alunos na representação de uma fração, razão, quociente ou divisão, nunca esquecendo o método descaído, são os seguintes:

 posição (256) ;

 posições (5), (256) ;

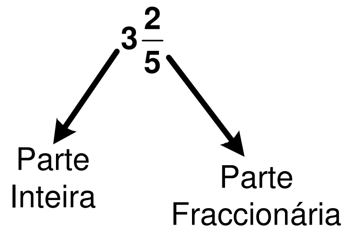
 posições (25), (256) ;

 posições (6), (2), (este pouco usual)

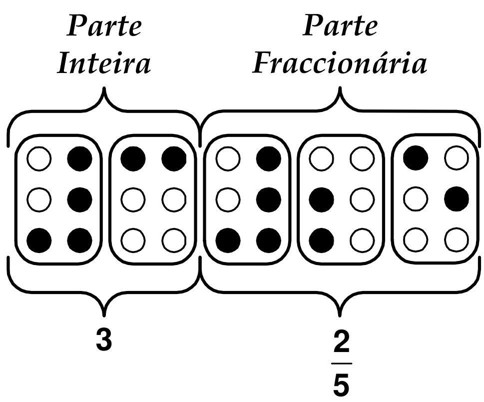
4.1.2.3. - Números Mistos

Um *Número Misto* é um número formado por uma parte inteira e outra fracionária. É uma representação exclusiva de números fracionários maiores que 1.

<u>Exemplo:</u>



Em Braille, a representação de números mistos far-se-á com relativa facilidade, escrevendo normalmente o número correspondente à parte inteira e de seguida a fração correspondente à parte fracionária, utilizando o método descaído, ambos precedidos do indicativo de número, tal como no exemplo:



Para transformar o número misto em apenas um número fracionário, sugerem-se dois métodos de resolução:

<u>1.º Método</u>:

Utilizando diretamente o número misto, faz-se o produto entre a parte inteira e o denominador da parte fracionária, e o resultado obtido adiciona-se ao numerador, obtendo-se assim, o numerador do novo número fracionário e por último, mantém-se o denominador da parte fracionária.
Este é o método mais aconselhado numa aula que contenha alunos cegos, quer em termos de escrita, quer em termos de rapidez de resolução para o aluno cego, pois este apenas terá de resolver mentalmente e apresentar a respetiva fração.

Observe-se:

$$\times\ 3\frac{2}{5}\ + = \frac{3\times5+2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}$$

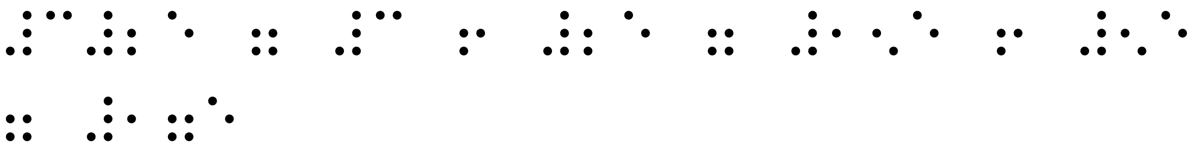
<u>2º Método:</u>
Explicando ao aluno que um número misto se trata apenas de uma soma entre a parte inteira e a parte fracionária.

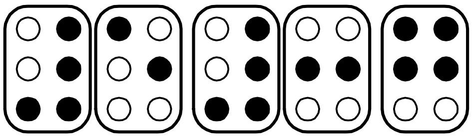
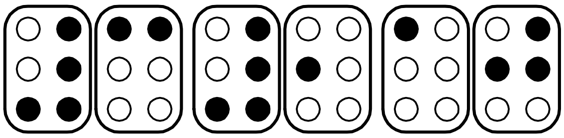
Contudo, este método torna-se mais trabalhoso para o aluno cego do que o método anterior, na medida em que este terá de resolver uma adição entre a parte inteira e a parte fracionária, pelo que, em termos de grafia, o exercício requererá mais tempo e, em termos de resolução, se torna mais complexo. Mais ainda, terá de saber resolver uma adição entre um número e uma fração, o que muitas das vezes isso não acontece.

Observe-se:

$$3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

Em Braille, ficará:



A negro	Representação em Braille	Códigos (como se lê para um aluno cego)
$5\frac{3}{7}$		**(3456), (15), (3456), (25), (1245)**
$3\frac{1}{10}$		**(3456), (14), (3456), (2), (1), (245)**

4.1.3 - Números Ordinais

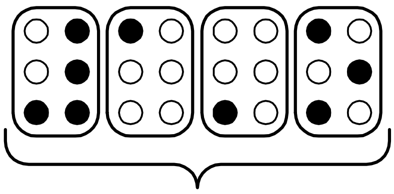
Os números ordinais, ou simplesmente ordinais, são números usados para assinalar uma posição numa sequência ordenada. Não são mais do que uma extensão dos números naturais criada para incluir sequências infinitas.

Estes números podem ser representados por dois métodos:

<u>1..º Método:</u> pelos respetivos cardinais, precedidos do sinal numérico (3456), seguidos de ponto (3) e de uma das terminações, o, a, os, as.

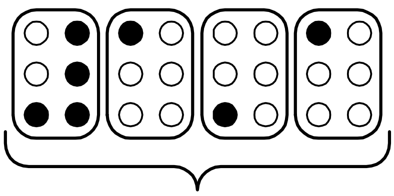
Exemplos:

<u>1.º - primeiro</u>



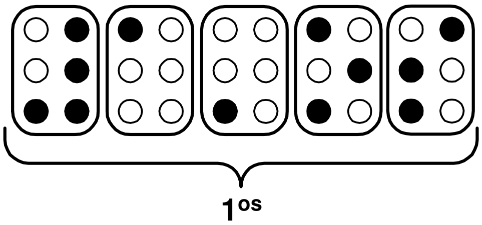
1º

<u>1.ª - primeira</u>

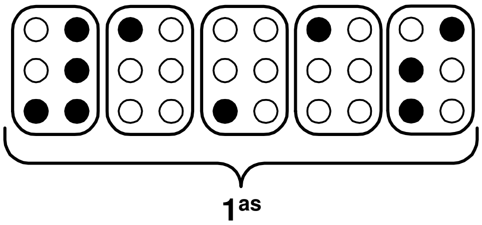


1ª

<u>1.^{os} - primeiros</u>



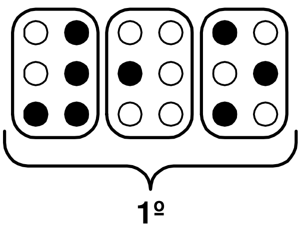
1.^{as} - primeiras



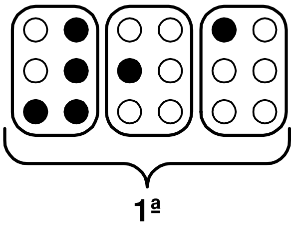
2.º Método: pelos respetivos cardinais descaídos, tal como nas frações, precedidos do sinal numérico e seguidos de uma das terminações, o, a, os, as.

Exemplos:

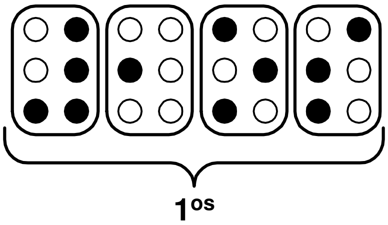
1.º - primeiro



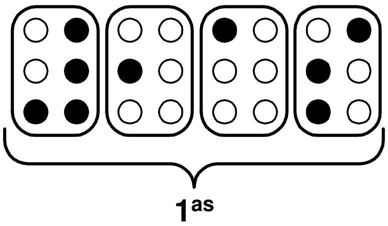
1.ª - primeira



1.^{os} - primeiros

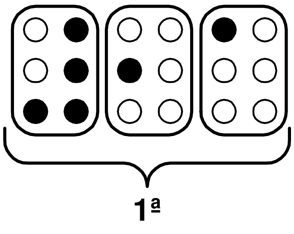


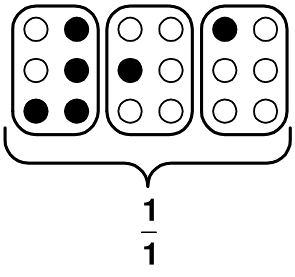
1.^{as} - primeiras



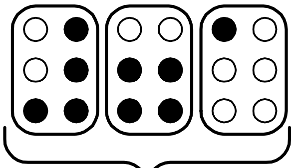
Este tipo de representação não é muito aconselhável, uma vez que induz o aluno a uma dupla interpretação, embora se simplifique a expressão.

Pode observar-se, nesta última representação, quando o aluno escreve 1ª - primeira, ele pode interpretar $\frac{1}{1}$, embora o contexto desfaça qualquer equívoco:

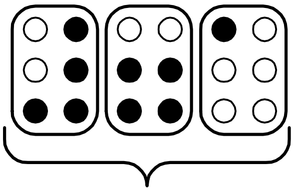




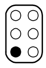
ou ainda

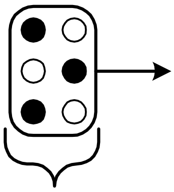


7ª



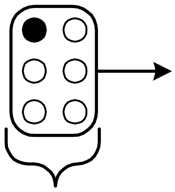
$\frac{7}{1}$

A fim de evitar qualquer engano, será aconselhável a utilização do primeiro método de representar ordinais, utilizando o ponto (3), , seguido de:



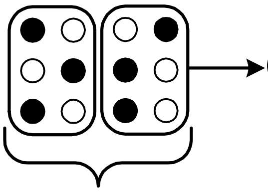
(pontos 135)

º



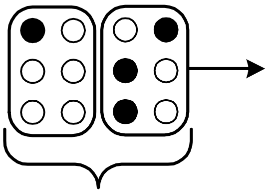
(ponto 1)

ª



(pontos 135, 234)

os



(pontos 1, 234)

as

Na tabela seguinte, encontra-se a leitura dos ordinais a tinta e a Braille:

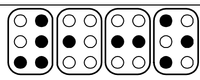
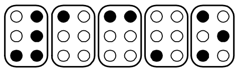
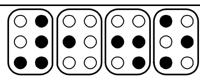
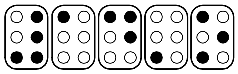
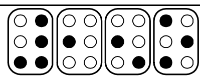
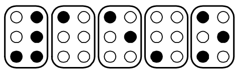
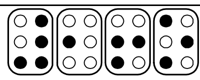
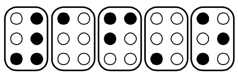
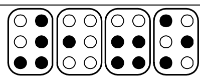
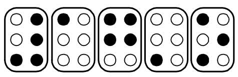
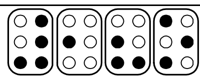
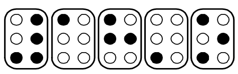
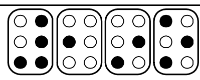
Números de 1 a 9				
Cardinal	**Ordinal**	**Leitura do ordinal**	**Representação em Braille**	**Códigos (como se lê para um aluno cego)**

1	1.º	primeiro	⠼⠂⠕ **ou** ⠼⠁⠄⠕	(3456), (2), (135) (3456), (1), (3), (135)
2	2.º	segundo	⠼⠆⠕ **ou** ⠼⠃⠄⠕	(3456), (23), (135) (3456), (12), (3), (135)
3	3.º	terceiro	⠼⠒⠕ **ou** ⠼⠉⠄⠕	(3456), (25), (135) (3456), (14), (3), (135)
4	4.º	quarto	⠼⠲⠕ **ou** ⠼⠙⠄⠕	(3456), (256), (135) (3456), (145), (3), (135)
5	5.º	quinto	⠼⠢⠕ **ou** ⠼⠑⠄⠕	(3456), (26), (135) (3456), (15), (3), (135)
6	6.º	sexto	⠼⠖⠕ **ou** ⠼⠋⠄⠕	(3456), (235), (135) (3456), (124), (3), (135)
7	7.º	sétimo	⠼⠶⠕ **ou**	(3456), (2356), (135) (3456), (1245), (3),

			⠼⠛⠄⠕	(135)
8	8.º	oitavo	⠼⠦⠕ **ou** ⠼⠓⠄⠕	(3456), (236), (135) (3456), (125), (3), (135)
9	9.º	nono	⠼⠔⠕ **ou** ⠼⠊⠄⠕	(3456), (35), (135) (3456), (24), (3), (135)

Tabela 15: Números de 1 a 9

Números de 10 a 19				
Cardinal	**Ordinal**	**Leitura do ordinal**	**Representação em Braille**	**Códigos (como se lê para um aluno cego)**
10	10.º	décimo	⠼⠂⠴⠕ **ou** ⠼⠁⠚⠄⠕	(3456), (2), (356), (135) (3456), (1), (245), (3), (135)
11	11.º	décimo primeiro	⠼⠂⠂⠕ **ou** ⠼⠁⠁⠄⠕	(3456), (2), (2), (135) (3456), (1), (1), (3), (135)
12	12.º	décimo segundo	⠼⠂⠆⠕ **ou** ⠼⠁⠃⠄⠕	(3456), (2), (23), (135) (3456), (1), (12), (3), (135)

13	13.º	décimo terceiro	 **ou** 	(3456), (2), (25), (135) (3456), (1), (14), (3), (135)
14	14.º	décimo quarto	 **ou** 	(3456), (2), (256), (135) (3456), (1), (145), (3), (135)
15	15.º	décimo quinto	 **ou** 	(3456), (2), (26), (135) (3456), (1), (15), (3), (135)
16	16.º	décimo sexto	 **ou** 	(3456), (2), (235), (135) (3456), (1), (124), (3), (135)
17	17.º	décimo sétimo	 **ou** 	(3456), (2), (2356), (135) (3456),(1),(1245),(3),(135)
18	18.º	décimo oitavo	 **ou** 	(3456), (2), (236), (135) (3456), (1), (125), (3), (135)
19	19.º	décimo nono	 **ou**	(3456), (2), (35) (135)

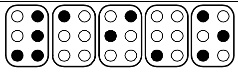
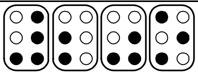
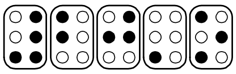
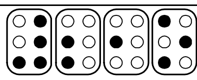
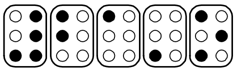
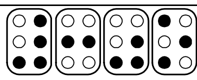
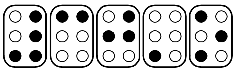
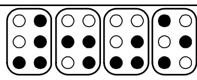
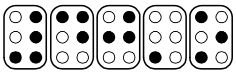
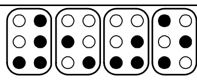
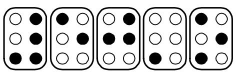
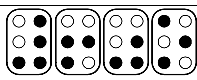
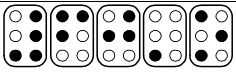
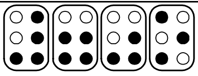
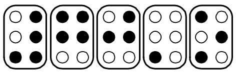
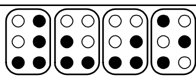
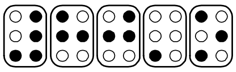
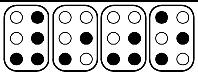
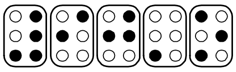
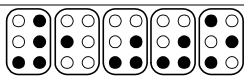
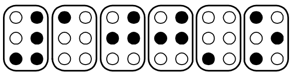
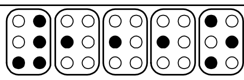
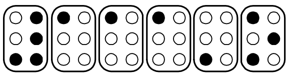
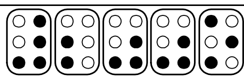
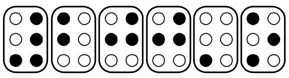
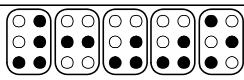
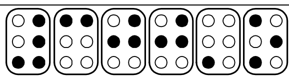
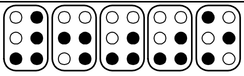
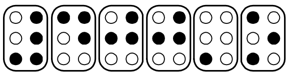
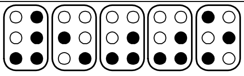
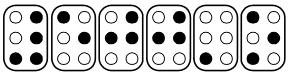
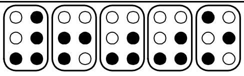
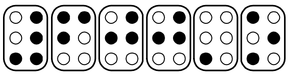
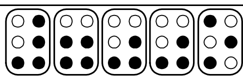
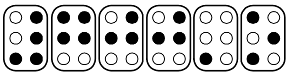
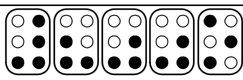
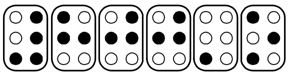
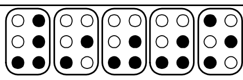
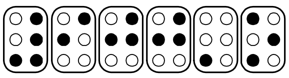
					(3456), (1), (24), (3), (135)

Tabela 16: Números de 10 a 19

Números a partir de 20				
Cardinal	**Ordinal**	**Leitura do ordinal**	**Representação em Braille**	**Códigos (como se lê para um aluno cego)**
20	20.º	vigésimo	 **ou** 	(3456), (23), (356), (135) (3456),(12),(245),(3),(135)
21	21.º	vigésimo primeiro	 **ou** 	(3456), (23), (2), (135) (3456),(12),(1),(3),(135)
30	30.º	trigésimo	 **ou** 	(3456), (25), (356), (135) (3456),(14),(245),(3),(135)
40	40.º	quadragésimo	 **ou** 	(3456), (256), (356), (135) (3456),(145),(245),(3),(135)
50	50.º	quinquagésimo	 **ou** 	(3456), (26), (356), (135) (3456),(15),(245),(3),(135)
60	60.º	sexagésimo	 **ou**	(3456), (235), (356), (135) (3456),(124),(245),(3),(135)

				
70	70.º	septuagésimo	 **ou** 	(3456), (2356), (356), (135) (3456),(1245),(245),(3),(135)
80	80.º	octogésimo	 **ou** 	(3456), (236), (356), (135) (3456),(125),(245),(3),(135)
90	90.º	nonagésimo	 **ou** 	(3456), (35), (356) (135) (3456),(24),(245),(3),(135)
100	100.º	centésimo	 **ou** 	(3456),(2),(356),(356),(135) (3456),(1),(245),(245),(3),(135)
111	111.º	centésimo décimo primeiro	 **ou** 	(3456), (2), (2), (2), (135) (3456),(1),(1),(1),(3),(135)
200	200.º	ducentésimo	 **ou** 	(3456),(23),(356),(356),(135) (3456),(12),(245),(245),(3),(135)
300	300.º	tricentésimo	 **ou**	(3456),(25),(356),(356),(135)

				(3456),(14),(245),(245),(3),(135)
400	400.º	quadringentésimo	 ou 	(3456),(256),(356),(356),(135) (3456),(145),(245),(245),(3),(135)
500	500.º	quingentésimo	 ou 	(3456),(26),(356),(356),(135) (3456),(15),(245),(245),(3),(135)
600	600.º	sexcentésimo	 ou 	(3456),(235),(356),(356),(135) (3456),(124),(245),(245),(3),(135)
700	700.º	septingentésimo	 ou 	(3456),(2356),(356),(356),(135) (3456),(1245),(245),(245),(3),(135)
800	800.º	octingentésimo	 ou 	(3456),(236),(356),(356),(135) (3456),(125),(245),(245),(3),(135)
900	900.º	nongentésimo	 ou 	(3456),(35),(356),(356),(135) (3456),(24),(245),(245),(3),(135)

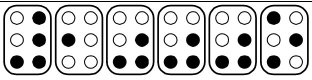
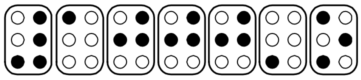
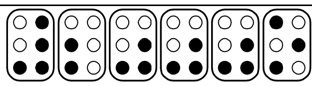
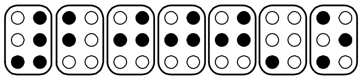
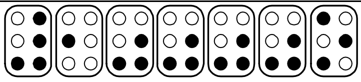
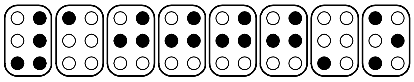
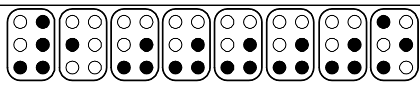
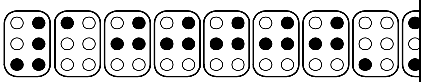
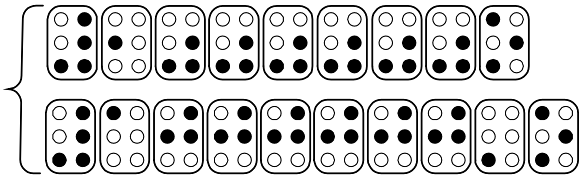
1000	1000.º	milésimo	 ou 	(3456),(2),(356),(356),(356),(135) (3456),(1),(245),(245),(245), (3),(135)
2000	2000.º	dois milésimo	 ou 	(3456),(2),(356),(356),(356),(135) (3456),(12),(245),(245),(245), (3),(135)
10 000	10 000.º	dez milésimo	 ou 	(3456),(2),(356),(356),(356),(356),(135) (3456),(1),(245),(245),(245), (245),(3),(135)
100 000	100 000.º	cem milésimo	 ou 	(3456),(2),(356),(356),(356), (356),(356),(135) (3456),(12),(245),(245),(245), (245),(245),(3),(135)

Tabela 17: Números a partir de 20

Os números que se apresentam de seguida não se encontram em tabela, devido à sua extensão, pelo que será apresentado de forma diferente, permitindo deste modo uma leitura mais simples.

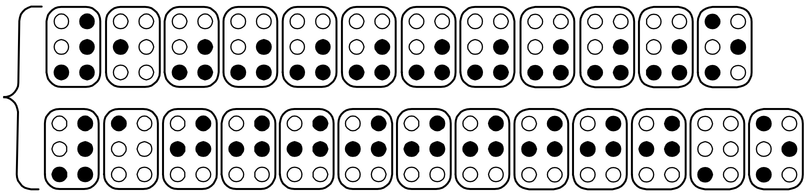
1 000 000 → 1 000 000.º → milionésimo → 

<u>Como se lê para um aluno cego</u>:

- (3456),(2),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(135)
- (3456),(1),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(3),(135)

1 000 000 000 → 1 000 000 000.º → mil milionésimo

↓

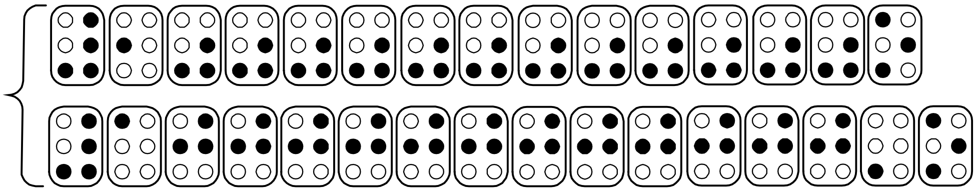


<u>Como se lê para um aluno cego</u>:

- (3456),(2),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(135)
- (3456),(1),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(3),(135)

1 000 000 000 000 → 1 000 000 000 000.º → bilionésimo

↓

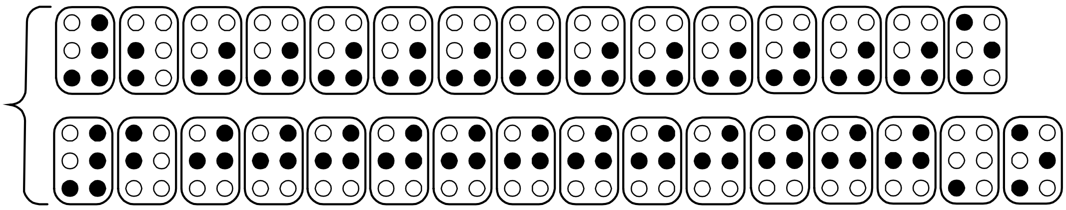


<u>Como se lê para um aluno cego</u>:

-
(3456),(2),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(135)
-
(3456),(1),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(3),(135)

2 000 000 000 000 → 2 000 000 000 000.º → dois bilionésimo

↓

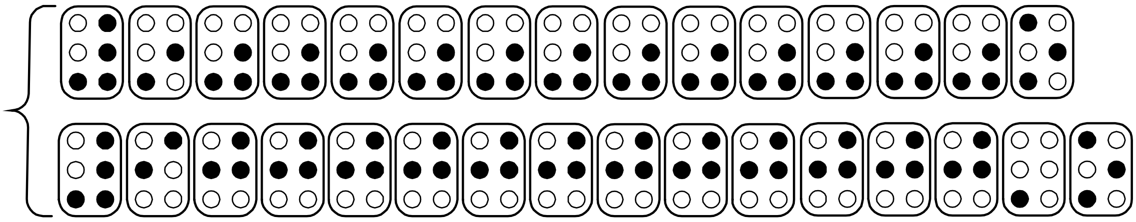


<u>Como se lê para um aluno cego</u>:

(3456),(23),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(135)
(3456),(12),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(3),(135)

9 000 000 000 000 → 9 000 000 000 000.º → nove bilionésimo

↓



<u>Como se lê para um aluno cego</u>:

(3456),(35),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(356),(135)

(3456),(24),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(246),(3),(135)

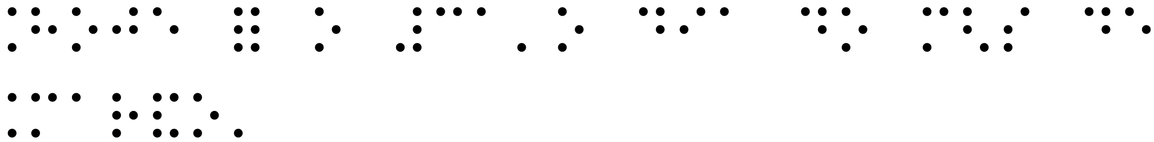
A referência aos números ordinais neste ponto, embora pareça excessivamente básica, é relevante, tendo em conta que a leitura e a escrita dos mesmos oferece frequentemente dificuldades, quer aos alunos normovisuais, quer aos alunos cegos.

Como sugestão, apresentam-se alguns exemplos de leitura de números ordinais que podem ser trabalhados em contexto de sala de aula, com os alunos cegos.

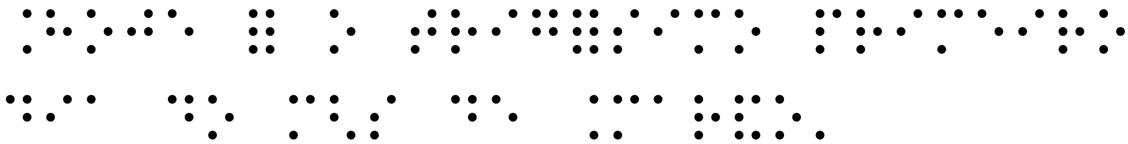
<u>Exemplo1</u>:

- ***Hoje é o 31.º dia do mês de Março.***
- Hoje é o ***<u>trigésimo primeiro</u>*** dia do mês de Março.

Em Braille, ficará:



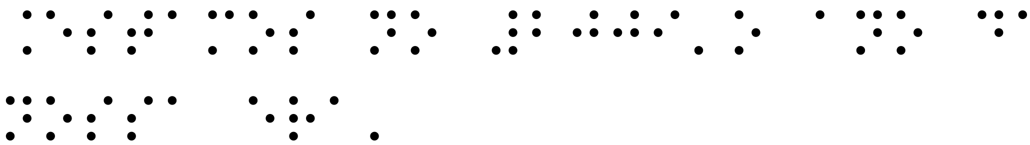
Hoje é o ***<u>trigésimo primeiro</u>*** dia do mês de Março.



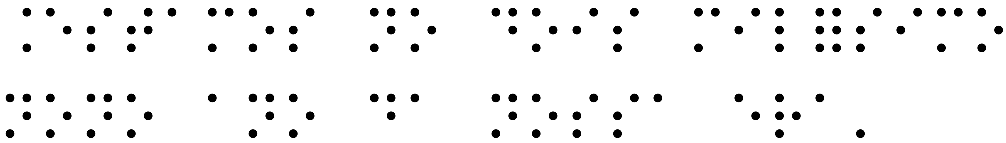
Exemplo2:

- ***Estamos no 2009.º ano da nossa era.***
- Estamos no ***dois milésimo nono*** ano da nossa era.

Em Braille, ficará:



Estamos no ***dois milésimo nono*** ano da nossa era.



Exemplo3:

- ***A Escola ficou no 315.º lugar no Concurso Canguru Matemático Sem Fronteiras 2014.***
- A Escola ficou no ***tricentésimo décimo quinto*** lugar no Concurso Canguru Matemático Sem Fronteiras 2014.

Em Braille, ficará:

Esta é a ***<u>dois bilionésima cento e noventa e cinco milésima quingentésima quadragésima terceira</u>*** formiga que vejo.

É importante salientar que, na escrita de um número ordinal (1.º; 75.º; 515.º; 2478.º; 100255.º), coloca-se sempre um ponto entre o número e «º» ou «ª». Em alternativa, pode-se colocar um traço debaixo do «º̲» ou «ª̲», nunca as duas simultaneamente, mas uma delas obrigatoriamente. Este problema não se verifica na escrita a Braille, uma vez que o símbolo grau ⠴ nada tem haver com o símbolo de ordinal ⠄⠕, que pode ser substituído por ⠕, se utilizarmos os algarismos na posição baixa ou descaídos.

4.1.4 - Números Romanos

O sistema de numeração romana utiliza sete letras maiúsculas para escrever os números e a cada letra é atribuído um valor. Os algarismos romanos são usados essencialmente em capítulos de obras, cenas de um teatro, nomes de papas, reis e imperadores, designação de congressos, olimpíadas, assembleias, entre outros.

Em contexto matemático, nomeadamente na Álgebra, os números romanos surgem com alguma frequência em enunciados de situações problemáticas, tais como problemas envolvendo idades, datas de acontecimentos, horas (mostradores de relógios).

Observe-se o quadro:

I	→	**1**
V	→	**5**
X	→	**10**
L	→	**50**
C	→	**100**
D	→	**500**
M	→	**1000**

As regras utilizadas pelos romanos eram as seguintes:

<u>1.ª - Regra da Adição</u>:

Uma letra escrita à direita de outra de igual ou maior valor soma a ela o seu valor.

<u>Exemplos:</u>

$\mathrm{II} = \mathbf{1+1=2}$

$\mathrm{VI} = \mathbf{5+1=6}$

$\mathrm{CX} = \mathbf{100+10=110}$

$\mathrm{LXVII} = \mathbf{50+10+5+1+1=67}$

<u>2.ª - Regra da Subtração</u>:

Uma letra escrita à esquerda de outra de maior valor subtrai o seu valor.

a) A letra I colocada à esquerda das letras V ou de X, subtrai uma unidade.

Exemplos:

$\mathrm{IV} = \mathbf{5-1=4}$

$\mathrm{IX} = \mathbf{10-1=9}$

b) A letra X colocada à esquerda das letras L ou de C, subtrai-lhes dez unidades.

<u>Exemplos:</u>

$\mathrm{XL} = \mathbf{50-10=40}$

$\mathrm{XC} = \mathbf{100-10=90}$

c) A letra C colocada à esquerda das letras D ou de M, subtrai-lhes cem unidades.

Exemplos:

$\mathrm{CD} = \mathbf{500 - 100 = 400}$

$\mathrm{CM} = \mathbf{1000 - 100 = 900}$

3.ª - Regra da Repetição:

a) *As letras* I, X, C *e* M *só se podem repetir 3 vezes seguidas.*

4 = IV e não IIII.

b) As letras V, L e D não se podem repetir.

100 = C e não LL

Nota 1: Se entre duas quaisquer letras existe uma menor, o valor desta pertencerá à letra seguinte a ela.

Exemplos:

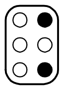
$\mathrm{XIX} = \mathbf{10 + 9 = 19}$

$\mathrm{LIV} = \mathbf{50 + 4 = 54}$

$\mathrm{CXXIX} = \mathbf{100 + 20 + 9 = 129}$

Nota 2: Um traço horizontal em cima de uma letra aumenta 1000 vezes o seu valor e dois traços horizontais aumenta 1000000 vezes o seu valor, ou seja, quando multiplicados por mil, colocam-se barras horizontais em cima dos mesmos.

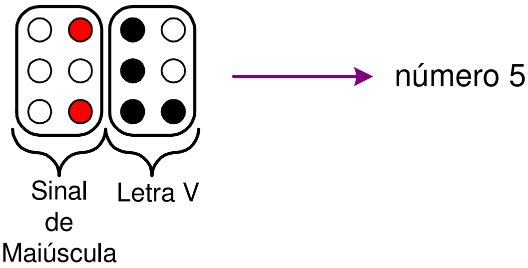
Exemplo: $\overline{\mathrm{V}} = \mathbf{5000}$ e $\overline{\overline{\mathrm{V}}}\overline{\mathrm{X}}\mathrm{DXX} = 5\ 010\ 520$.

Na escrita da numeração romana, em Braille, utiliza-se o sinal de maiúscula, , pontos (46), antes das respetivas sete letras.

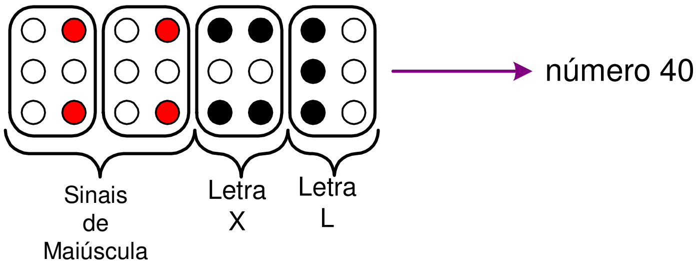
Quando um número é constituído por mais do que uma letra, dobra-se o sinal de maiúscula, pontos (46).

Observem-se as seguintes situações:

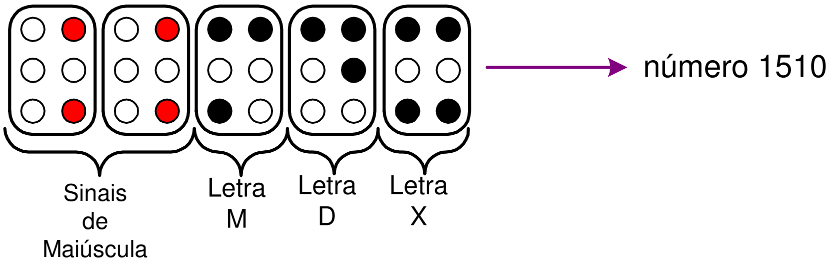
<u>1.ª Situação:</u> Queremos escrever o número 5, em numeração romana corresponderá à letra V, então este número é constituído apenas por uma letra, logo utilizar-se-á somente um sinal de maiúscula.



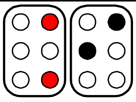
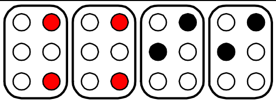
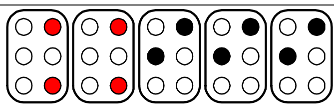
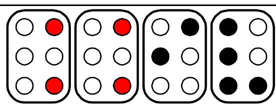
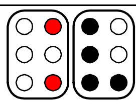
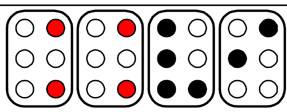
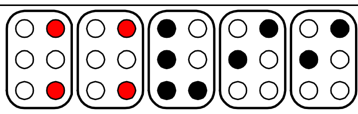
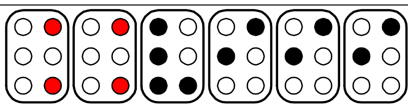
<u>2.ª Situação:</u> Queremos escrever o número 40, em numeração romana corresponderá às letras XL, então este número é composto por duas letras, logo terá de se utilizar duas vezes o sinal de maiúscula, ambos seguidos e antes das letras.



<u>3.ª Situação:</u> Queremos escrever o número 1510, em numeração romana corresponderá às letras MDX, e sendo este número constituído por três letras, irá dobrar-se o sinal de maiúscula, tal como a situação anterior.



Na tabela seguinte, estão representados em numeração romana os algarismos de 1 a 10.

Numeração Romana			
Valor	**Notação a tinta**	**Braille**	
		Representação	**Códigos**
1	**I**		(46), (24)
2	**II**		(46), (46), (24), (24)
3	**III**		(46), (46), (24), (24), (24)
4	**IV**		(46), (46), (24), (1236)
5	**V**		(46), (1236)
6	**VI**		(46), (46), (1236), (24)
7	**VII**		(46), (46), (1236), (24), (24)
8	**VIII**		(46),(46),(1236),(24),(24),(24)

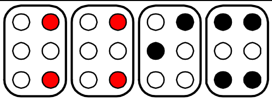
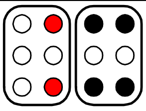
9	**IX**		(46), (46), (24), (1346)
10	**X**		(46), (1346)

Tabela 18: Numeração Romana

Até ao momento só se trabalhou com apenas três letras, faltando quatro para completar as letras utilizadas no sistema de numeração romana:

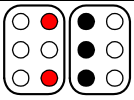
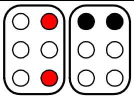
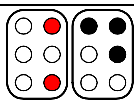
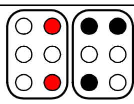
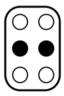
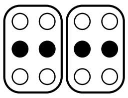
Numeração Romana			
Valor	**Notação a tinta**	**Braille**	
		Representação	**Códigos**
50	**L**		(46), (123)
100	**C**		(46), (14)
500	**D**		(46), (145)
1000	**M**		(46), (134)

Tabela 18A - Numeração Romana

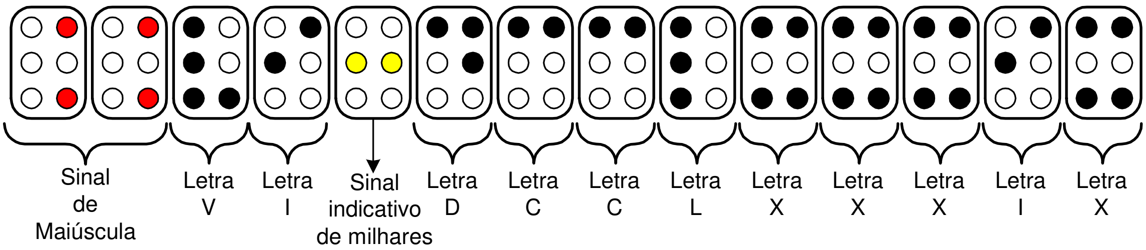
Por último, dever-se-á ter muita atenção aquando da representação Braille dos milhares e dos milhões.

A tinta, basta colocar uma barra horizontal em cima da letra ou letras para representar os milhares; a Braille ter-se-á de utilizar o sinal , pontos (25), colocado imediatamente depois das letras afetadas. Para representarmos os milhões, a tinta, basta colocar duas barras horizontais em cima da letra ou letras, a Braille ter-se-á que utilizar o duplo sinal, , pontos (25) (25) colocados imediatamente a seguir às letras afetadas.

Observe-se a seguinte situação:

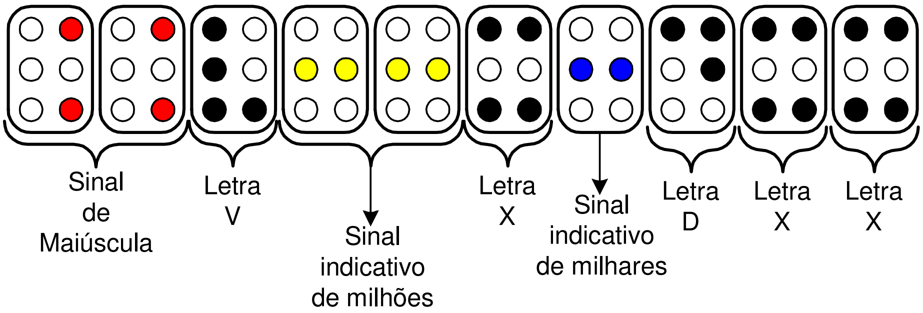
Comece-se por representar o número 6789 que em numeração romana é $\overline{\text{VI}}\text{DCCLXXXIX}$.

Após a observação deste número, apenas representado com uma barra horizontal, utilizaremos, na GMB, uma só vez, o sinal (25), após a escrita do VI:



Se se pretender representar um número que apresente duas barras horizontais, quer isto dizer que se trate de milhões, em Braille, ter-se-á de usar o sinal duplo (25), (25) para representar a classe dos milhões e uma vez o sinal (25) para representar a classe dos milhares:

Queremos representar o número $\overline{\overline{\text{V}}}\text{XDXX} = 5\ 010\ 520$, em Braille ficará:



4.1.5 - Leitura de Números Cardinais

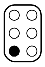
Uma dificuldade muitas vezes sentida pelos alunos com ou sem necessidades educativas especiais é a leitura de numerais cardinais acima de um milhão. É relativamente comum um número como 1 235 (mil duzentos e trinta e cinco), pelo que este não oferece grandes dificuldades de leitura; contudo números como 631 811 592 (seiscentos e trinta e um milhões, oitocentos e onze mil, quinhentos e noventa e dois) ou 47 804 294 152 236 (quarenta e sete biliões, oitocentos e quatro milhares de milhão, duzentos e noventa e quatro milhões, cento e cinquenta e dois mil, duzentos e trinta e seis) são menos comuns, oferecendo dificuldades.

A estratégia é simples e envolve apenas fazer grupos de três algarismos da direita para a esquerda, a que se designa ordens, formando assim as classes.

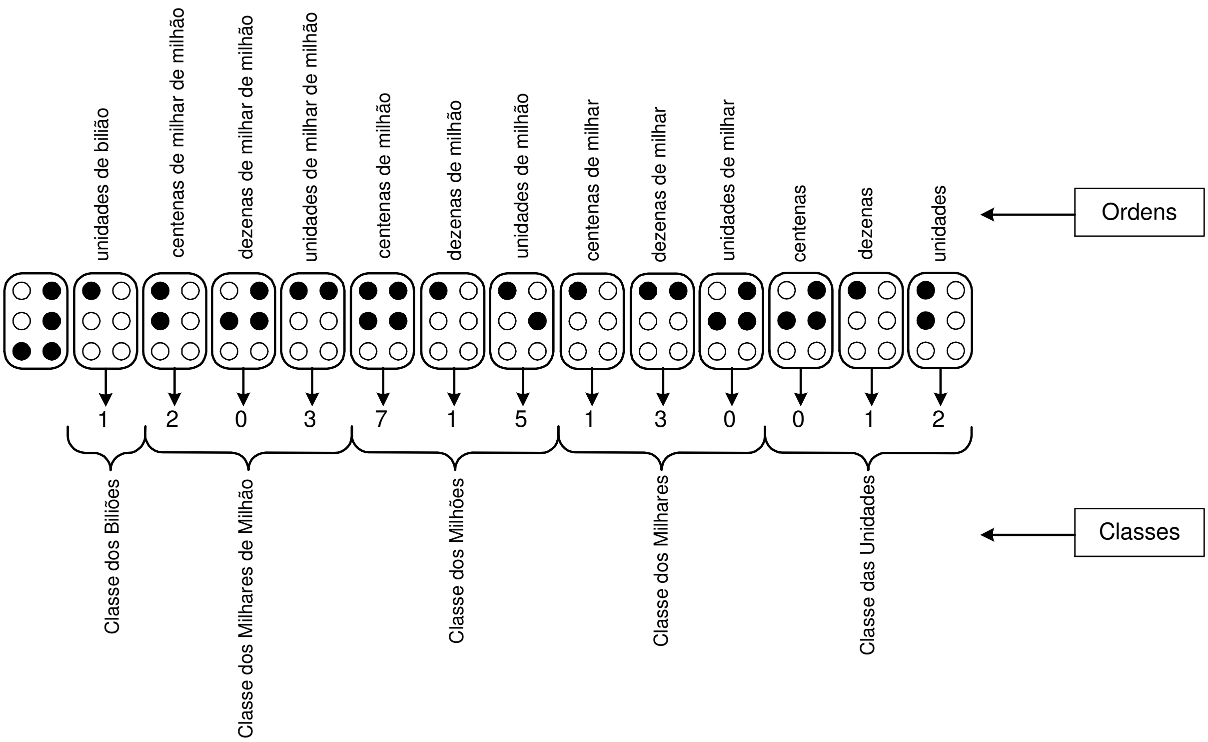
Por exemplo, o número 1 203 715 130 012, a direita para a esquerda resulta no seguinte:

- doze unidades;
- cento e trinta mil;
- setecentos e quinze milhões;
- duzentos e três milhares de milhão;
- um bilião.

Ou seja, 1 203 715 130 012 é “um bilião, duzentos e três milhares de milhão, setecentos e quinze milhões, cento e trinta mil e doze unidades”.

Como estratégia, em Braille, numa fase inicial, o professor deverá, na leitura do número, apelar ao espaçamento por cada três algarismos ou então à utilização do ponto (3), , pois permitirá uma maior facilidade de visualização das ordens e classes por parte do aluno.

A escrita do número 1 203 715 130 012 será:



Quanto à leitura dos cardinais dos múltiplos de um milhão faz-se da seguinte forma: milhão, bilião, trilião, quadrilião, quintilião, sextilião, septilião, octilião, nonilião, …

Em latim, os romanos designavam por «mille» um milhar. Anos mais tarde, foram acrescentado o sufixo «one», equivalente ao «ão» português, para designar «um grande milhar», ou seja, um milhão.

Foi o matemático Nicolas Chuquet (1455-1500) quem criou, na sua obra “Triparty en la science des nombres”, os termos «bilião» e «trilião», …, «nonilião». A obra de

Chuquet não foi publicada e, em 1520, Estienne de La Roche publicou, sem atribuir o real valor ao verdadeiro criador, na sua obra «Larismetique», as mesmas designações.

Números de uma tal grandeza foram, durante a História humana, apenas simples jogos de palavras e conceitos, sendo impensável o uso de tais valores em contextos práticos. Mas o desenvolvimento exponencial da Ciência tornou semelhantes grandezas mais do que possíveis, indispensáveis.

Mas a nomenclatura não se desenvolveu a par com o desenvolvimento das necessidades científicas e está ainda por descobrir o nome das potências de um milhão acima do nonilião.

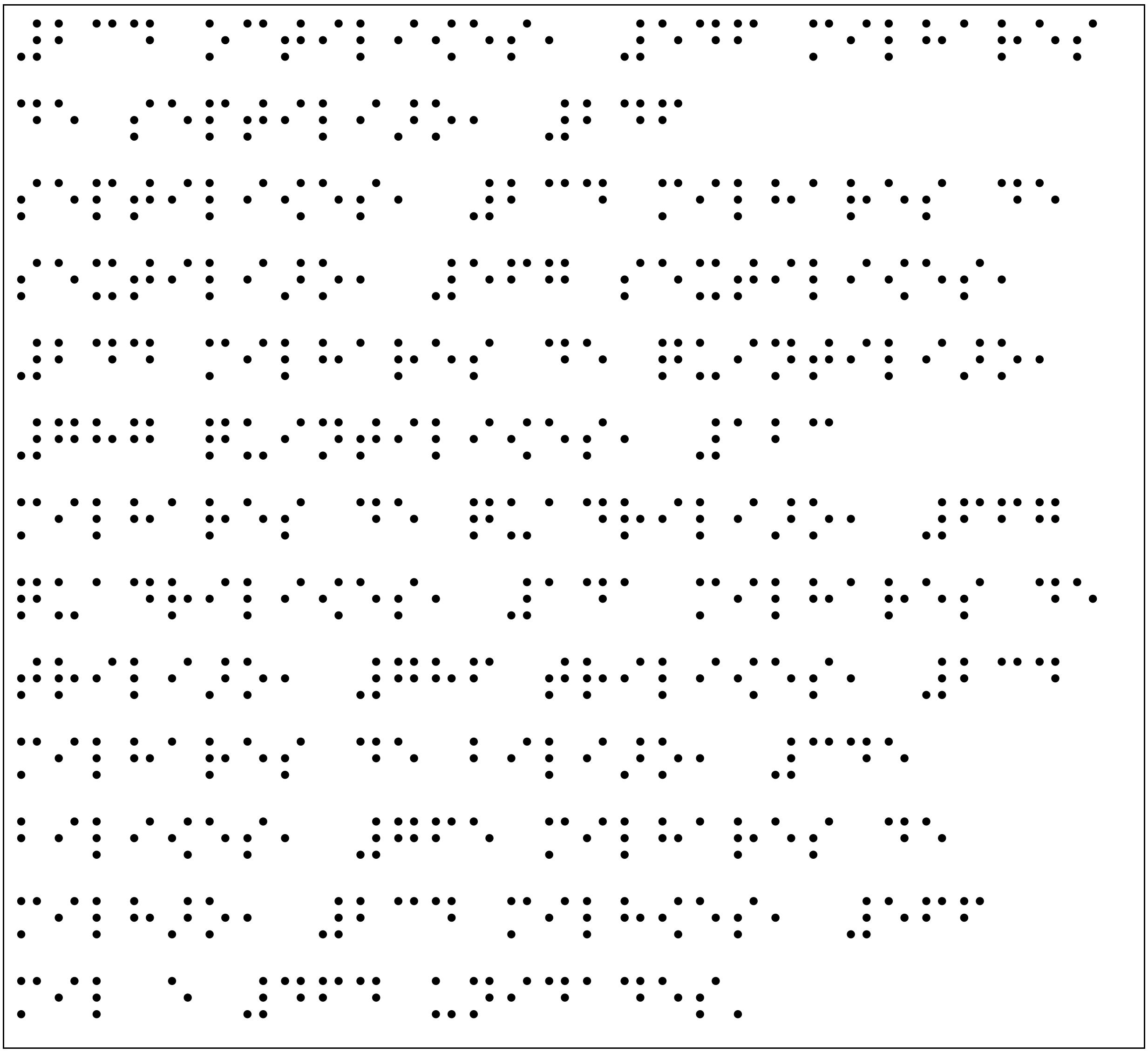
John Conway e Richard Guy, na sua obra intitulada "The Book of numbers"[217], referem que a partir dos prefixos «bi», «tri», «quadr», «quint», «sext», «sept», «oct», e «non» é possível construir os nomes das potências de um milhão. Juntando o sufixo «ili», pode-se obter «4 milinitrilião» para designar 4 milhões$^{\text{milhão}}$ (trata-se do gigantesco número 4 seguido de 6 milhões de zeros).

Assim, a leitura do número 234 546 246 234 567 244 787 123 667 141 786 234 345 765 234 566 464 será:

234 octiliões, 546 milhares de septilião, 246 septiliões, 234 milhares de sextilião, 567 sextiliões, 244 milhares de quintilião, 787 quintiliões, 123 milhares de quadrilião, 667 quadriliões, 141 milhares de trilião, 786 triliões, 234 milhares de bilião, 345 biliões, 765 milhares de milhão, 234 milhões, 566 mil e 464 unidades.

[217] Conway, J.H. et Guy, R. K. (1996). *The book of numbers*. New York: Springer-Verlag.

Em Braille:



4.2 - Operações aritméticas e a sua aprendizagem em Braille

4.2.1 - Operações com Números Inteiros

A concretização de operações aritméticas, recorrendo aos mais variados algoritmos, conduz à necessidade de esquematização e de realização de cálculos auxiliares, o que, em Braille, se apresenta como uma tarefa difícil. A referida dificuldade depende, muitas vezes, da extensão e da complexidade das expressões numéricas. Não se deve, no entanto, permitir que o conformismo domine a prática pedagógica.

Antes de mais, salientam-se alguns princípios orientadores a adotar aquando da escrita Braille, na resolução de operações aritméticas.

Consoante o grau de dificuldade da expressão numérica e tendo em conta que nos encontramos perante uma escrita meramente posicional, é possível ter de optar, por exemplo, por colocar a folha de papel numa posição horizontal na máquina Perkins, permitindo, com isto, a escrita de uma expressão de dimensões maiores e facilitando, assim, a sua observação e, consequentemente, os respetivos cálculos.

É também possível utilizar por diversas vezes espaços em branco ou mesmo linhas em branco, substituindo as linhas de separação a tinta.

Para uma maior clareza e distinção das parcelas, poder-se-á intercalar espaços em branco antes e depois do sinal de igualdade e antes e depois dos sinais operativos.

As razões para a utilização de espaços em branco, em substituição das linhas de separação a tinta, passam pela eliminação, na informação Braille, de elementos supérfluos, para uma maior rapidez de execução e uma maior facilidade de leitura dos dados, através da separação dos resultados parciais face aos finais.

É muito comum, aquando da realização de operações aritméticas, eliminar-se o sinal indicativo de número, na medida em que a noção de quantidade é percetível pelo contexto operativo aritmético, bem como a eliminação do sinal operativo, cuja razão é também contextual.

Apresentam-se, ainda, estratégias de apoio contendo estratégias a adotar em cada etapa do processo de resolução de operações aritméticas.

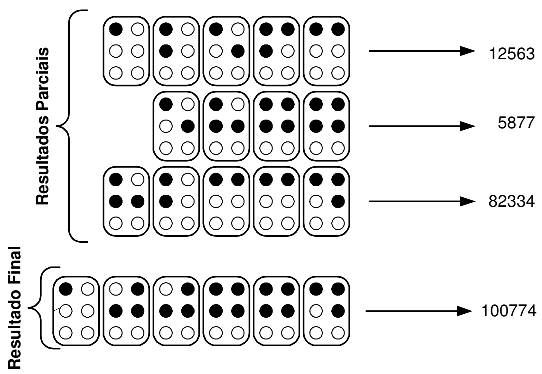
No que respeita à adição, sugere-se:

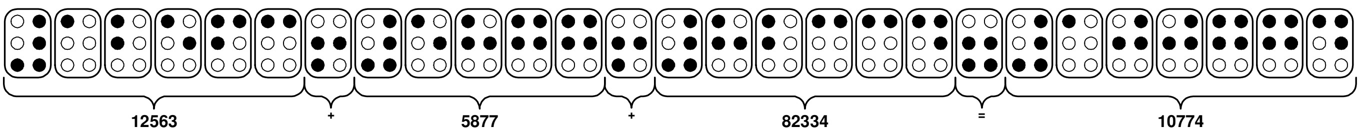
<u>Estratégia 1:</u>

Adição de números inteiros: concretização em Braille

$$\begin{array}{r} 12563 \\ 5877 \\ +\ 82334 \\ \hline 100774 \end{array}$$

$$12563 + 5877 + 82334 = 100774$$





Nos cálculos auxiliares foram omitidos os sinais de indicativo de número e o sinal operativo (+) e foi utilizado o espaço em branco entre os resultados parciais e o resultado final, em substituição do traço horizontal utilizado a negro, o mesmo acontece nas futuras operações adiante exemplificadas.

No que concerne à subtração, aconselha-se:

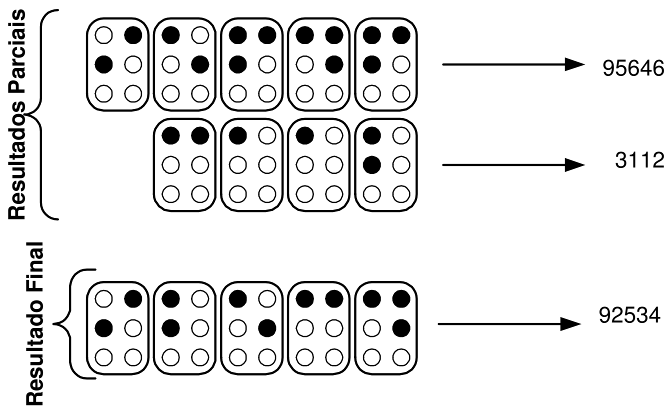
Estratégia 2:

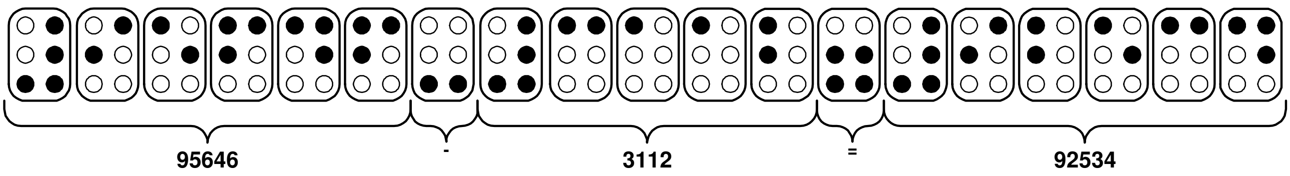
Subtração de números inteiros: concretização em Braille

Notação

$$\begin{array}{r} 95646 \\ -\ \ 3112 \\ \hline 92534 \end{array}$$

95646 - 3112 = 92534





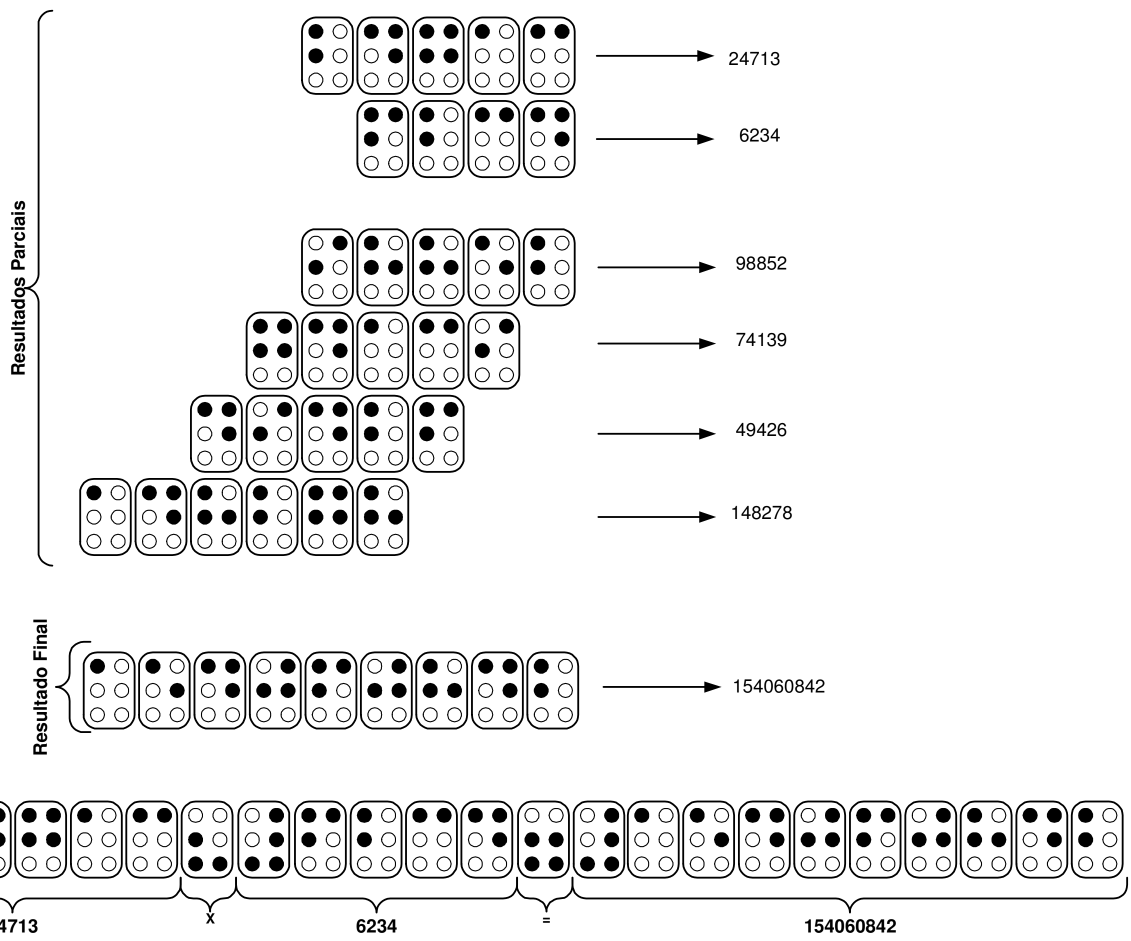
Relativamente à multiplicação, indica-se:

<u>Estratégia 3:</u>

Multiplicação de números inteiros: concretização em Braille

$$
\begin{array}{r}
24713 \\
\times \quad 6234 \\
\hline
98852 \\
74139 \\
49426 \\
+\,148278 \\
\hline
154060842
\end{array}
$$

$$24713 \times 6234 = 154060842$$



Quanto à divisão, apresenta-se:

Estratégia 4:

Divisão de números inteiros: concretização em Braille

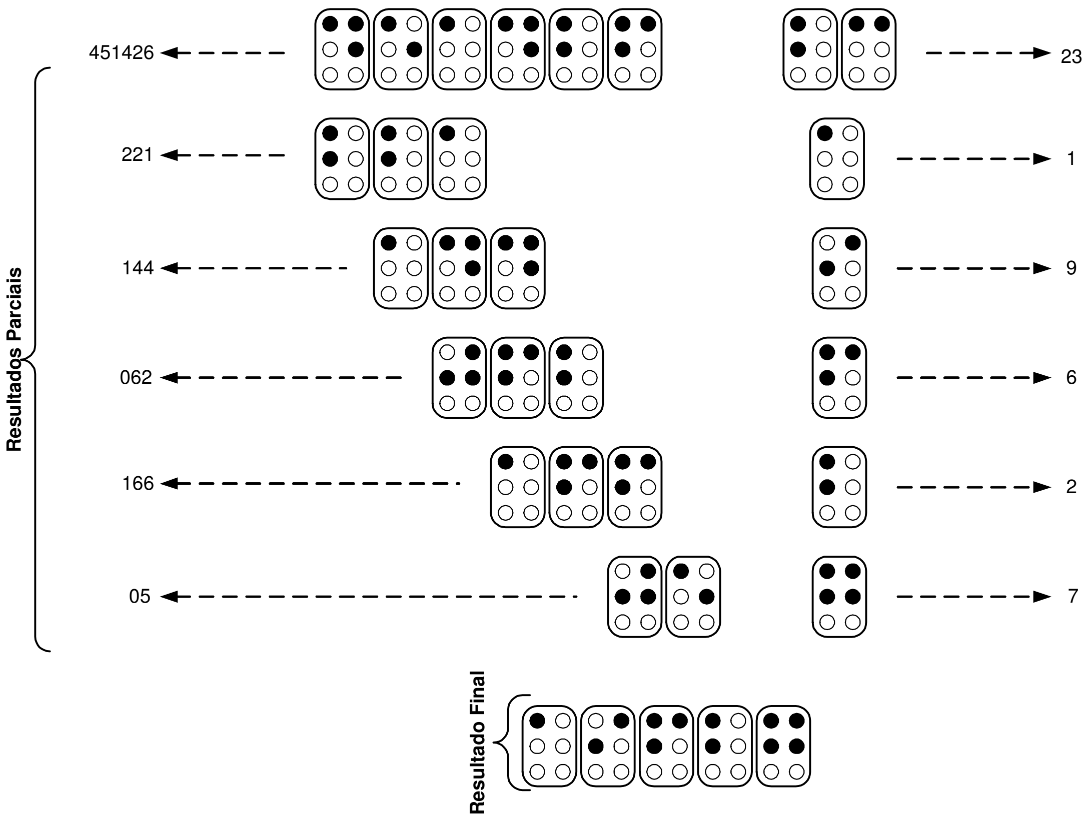
$$\begin{array}{r|l} 451426 & \underline{23\qquad\quad} \\ 221 & 19627 \\ 144 & \\ 062 & \\ 166 & \\ 05 & \end{array}$$

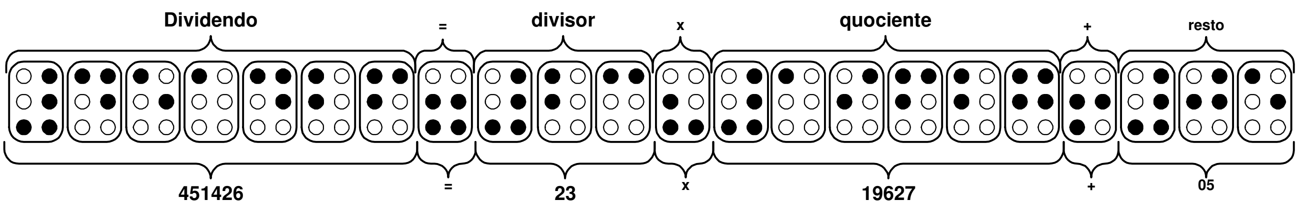
$$\boxed{\text{Dividendo = divisor x quociente + resto}}$$

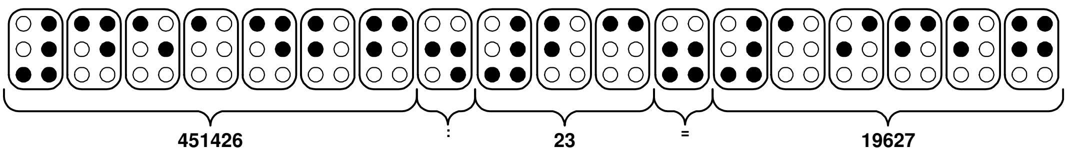
ou

$$\boxed{D = d \times q + r}$$

$$451426 = 23 \times 19627 + 05$$



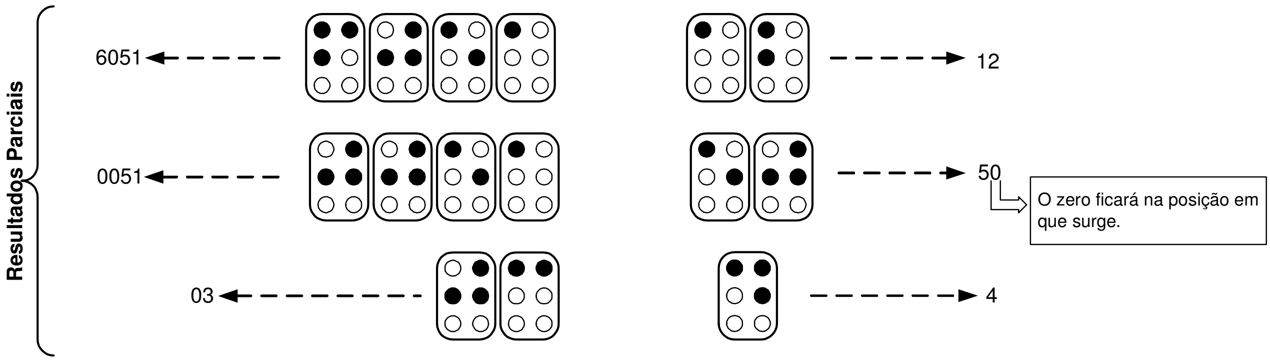


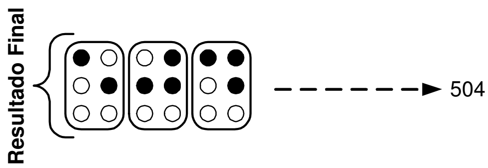


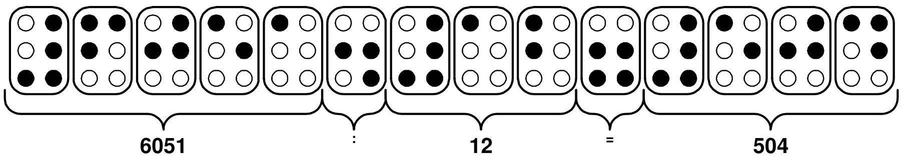
No processo de resolução de uma divisão, pode observar-se que os números correspondentes ao quociente aparecem escritos verticalmente, evitando-se, deste modo, a retoma da linha anterior.

No entanto, quando surge, como algarismo do quociente, o “zero”, este permanecerá na mesma linha, como podemos observar no exemplo que se segue:

6051 | 12
0051 | 504
03



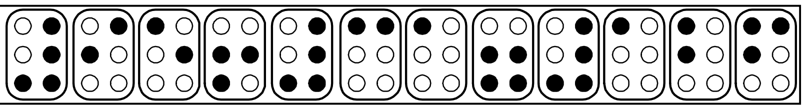


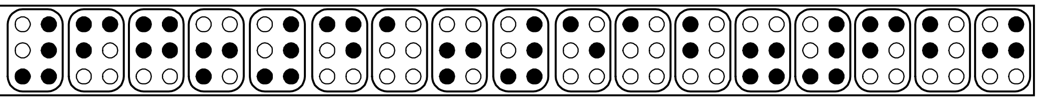


Note-se que, em expressões numéricas simples, a sua resolução passa por uma escrita linear, não havendo necessidade de utilização dos critérios de simplificação mencionados anteriormente, tendo o aluno a possibilidade de efetuar os cálculos mentalmente ou recorrer a uma calculadora falante, um ábaco, uma caixa de números ou qualquer outro tipo de recurso aplicável ao Braille.

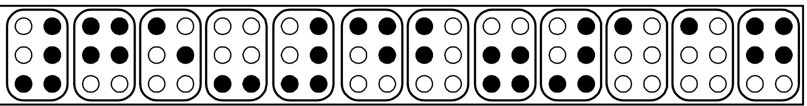
Assim sendo, exemplificam-se as quatro operações aritméticas.

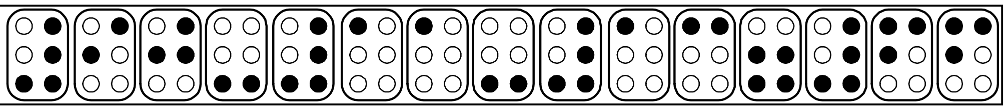
1.º Caso: Adição de números inteiros

95 + 31 = 126 

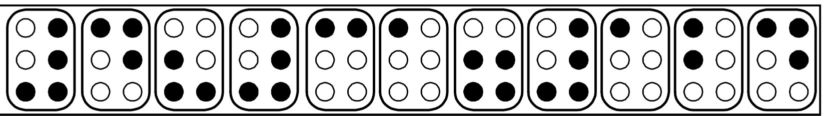
67 + 41 + 512 = 620 

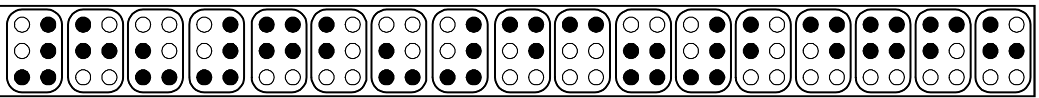
2.º Caso: Subtração de números inteiros

75 - 42 = 117 

90 - 11 - 13 = 66 

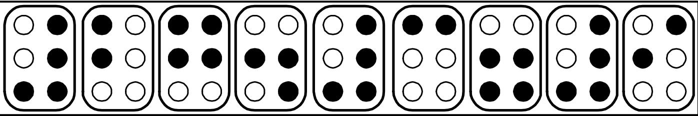
3.º Caso: Multiplicação de números inteiros

4 x 31 = 124 

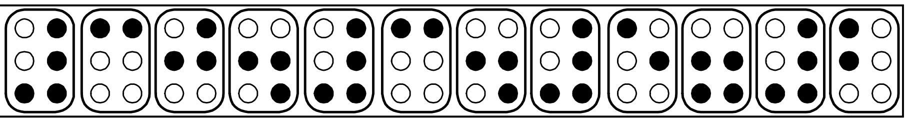
8 x 72 x 43 = 24768 

<u>4.º Caso:</u> <u>Divisão de números inteiros</u>

27 : 3 = 9



30 : 3 : 5 = 2

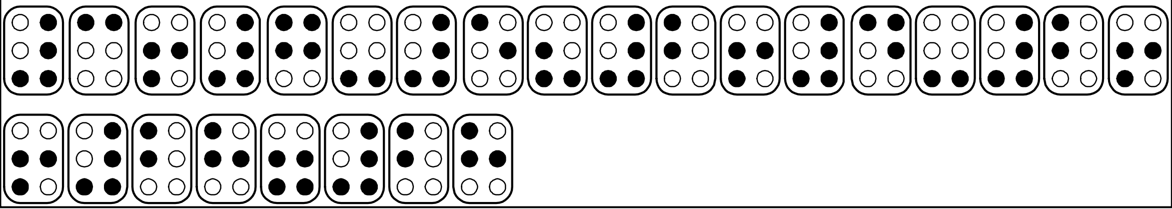


Convém referir que, mediante uma escrita linear, tal como a apresentada nos casos anteriores, a expressão numérica poderá estar sujeita a cortes, o que, na prática, corresponde a uma mudança de linha. Quando tal acontece, o corte deverá ser efetuado aquando de um sinal operativo ou o de alguma relação e o sinal em questão deverá repetir-se no início da linha seguinte.

Seguem-se dois exemplos:

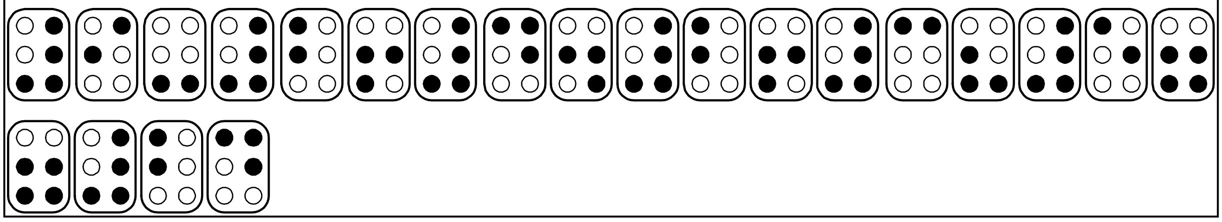
<u>Exemplo 1:</u> O corte é efetuado no sinal operativo (+).

3 + 7 – 5 x 2 + 4 – 2 +
+ 28 = 28



Exemplo 2: O corte é efetuado no sinal de igualdade (=).

9 - 2 + 4 : 2 + 3 x 5 =
= 24



4.2.2 - Operações com Frações

A negro, na realização de operações com frações inteiras, são utilizados, na maioria das vezes, algoritmos lineares. Assim, tanto a escrita de uma dada expressão numérica, baseada na leitura do enunciado, quanto a sua resolução são construídas de uma forma meramente linear.

No contexto da representação Braille, tal situação afigura-se diferente, pois surgirão inúmeros obstáculos em termos espaciais, quer na perceção do conceito da expressão, quer na sua transcrição e resolução.

Quando nos referimos a uma fração, existe tendência em utilizar os termos “acima” e “abaixo”, como designação do numerador e denominador, respetivamente, aspeto já referido anteriormente, aquando dos números fracionários.

Em Braille, é impossível utilizar esta terminologia, na medida em que, espacialmente, na sua representação, o numerador encontra-se descaído, ou seja, encontra-se numa posição abaixo do denominador, pelo que se aconselha a utilização dos termos "antes", "depois" ou "esquerda", "direita", tornando-se assim a terminologia utilizada lógica e percetível ao aluno cego.

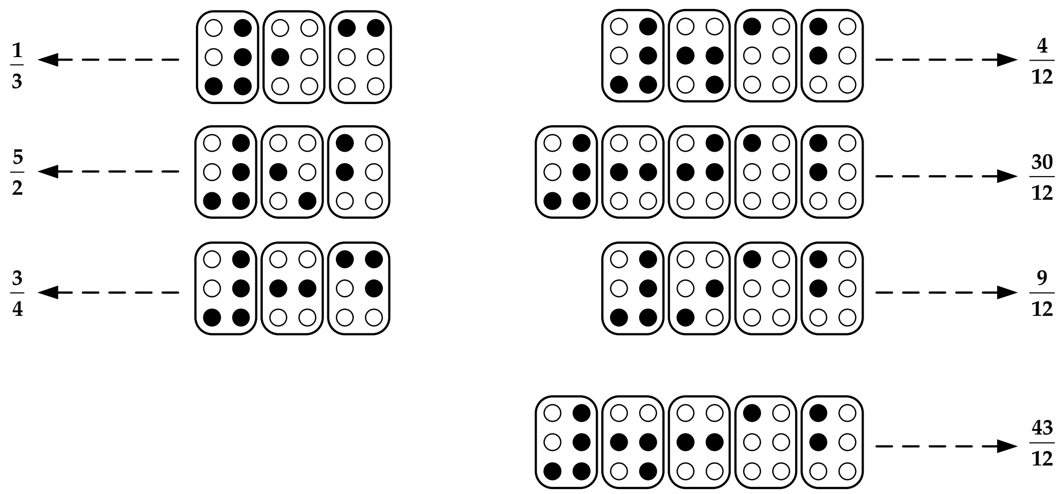
Assim sendo, para a realização de expressões envolvendo operações com frações inteiras, dever-se-á escrevê-las em coluna, obtendo-se uma correspondência espacial vertical, isto é, numerador com numerador e denominador com denominador.

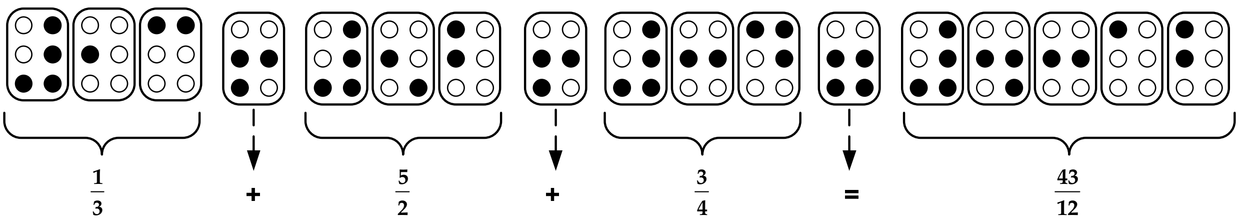
Seguem-se estratégias de apoio à resolução de operações com frações inteiras.

<u>Estratégia 1:</u>

Adição de frações: concretização em Braille

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=\frac{4}{12}+\frac{30}{12}+\frac{9}{12}=\frac{43}{12}$$



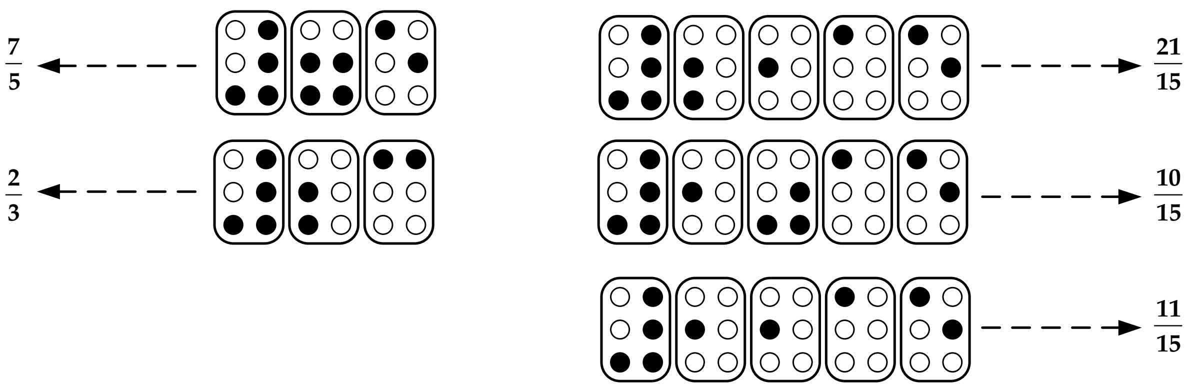


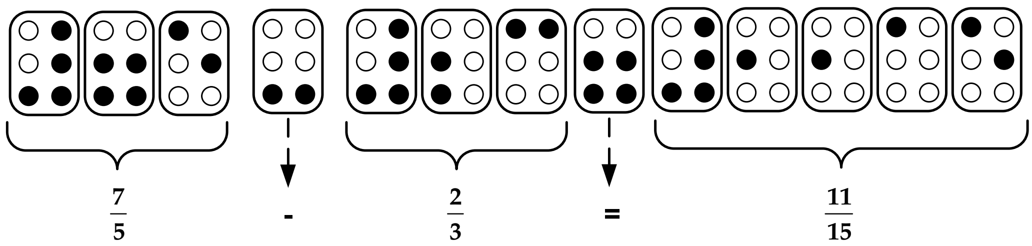
Em suma, a fim de facilitar os cálculos envolvendo operações com frações, o professor deverá indicar ao aluno para que este escreva, verticalmente, as frações apresentadas e, em paralelo, também de forma vertical, proceda à igualdade ao mesmo denominador e, em seguida, efetue o cálculo final. Após a determinação do resultado final, o aluno deverá escrever a expressão inicial apresentada igualada ao resultado final obtido.

Estratégia 2:

Subtração de frações: concretização em Braille

$$\frac{7}{5}-\frac{2}{3}=\frac{21}{15}-\frac{10}{15}=\frac{11}{15}$$



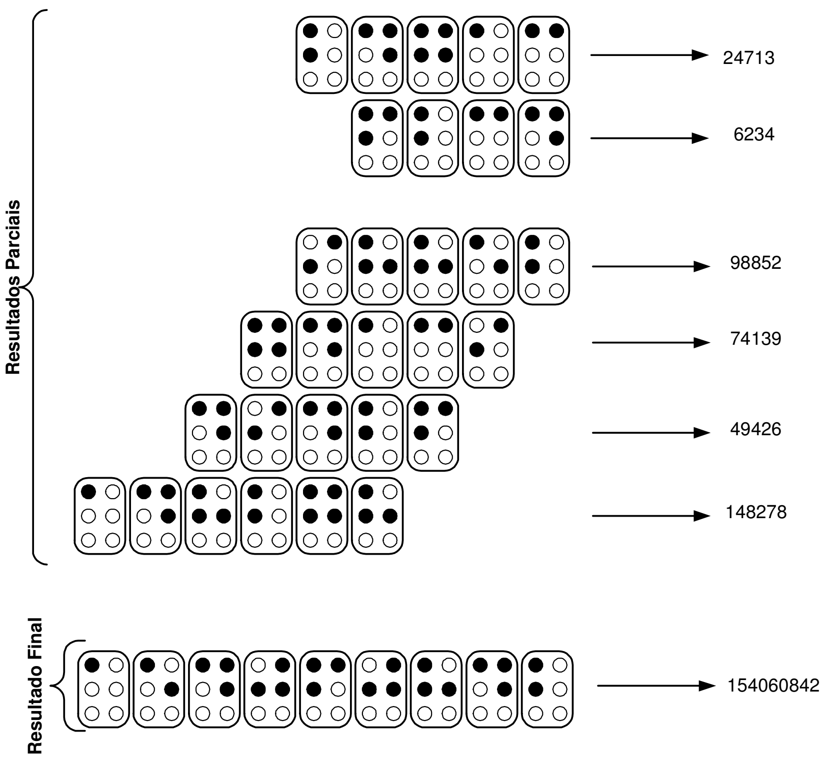


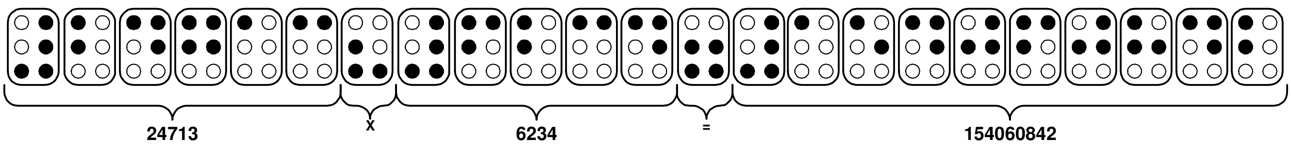
Estratégia 3:

Multiplicação de frações: concretização em Braille

$$
\begin{array}{r}
24713 \\
\times \quad 6234 \\
\hline
98852 \\
74139 \\
49426 \\
+\,148278 \\
\hline
154060842
\end{array}
$$

$$24713 \times 6234 = 154060842$$





Quanto à divisão, apresenta-se:

Estratégia 4:

Divisão de frações: concretização em Braille

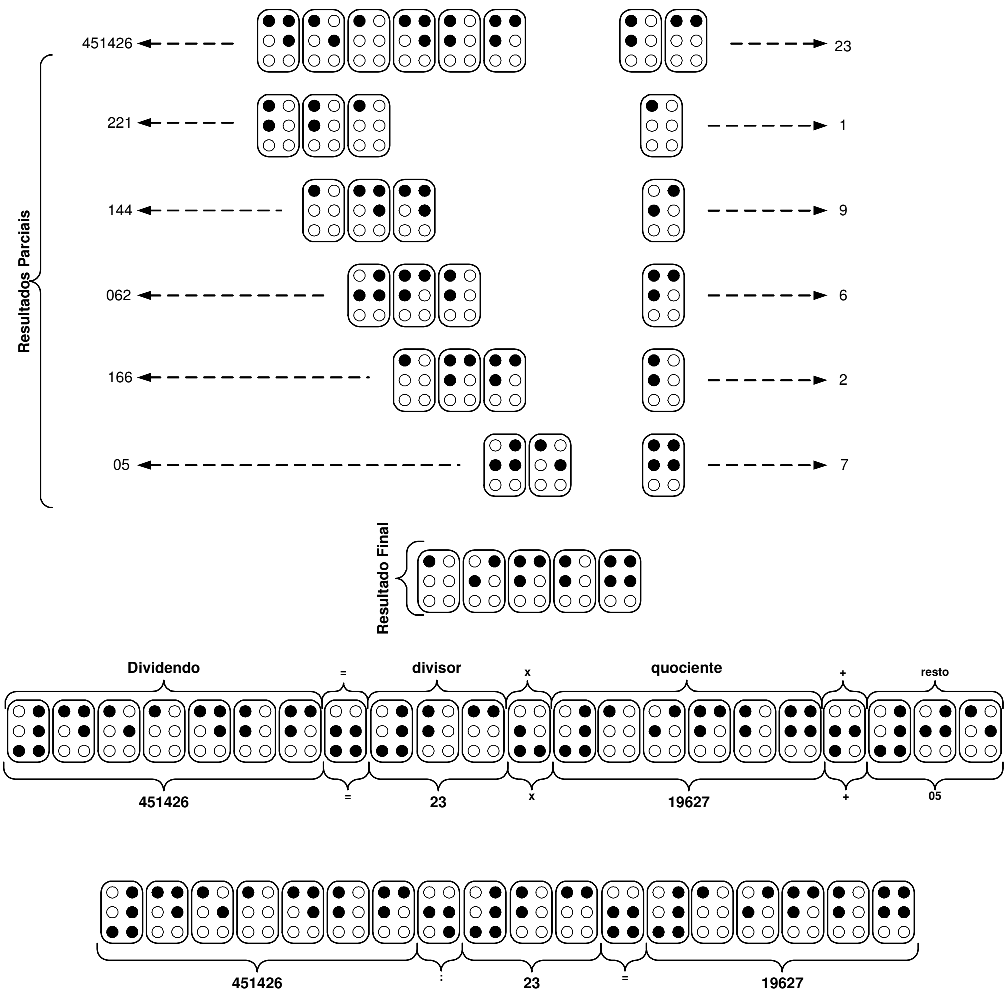
```
451426   |23
221       19627
 144
  062
   166
    05
```

Dividendo = divisor x quociente + resto

ou

$\boxed{D = d \times q + r}$

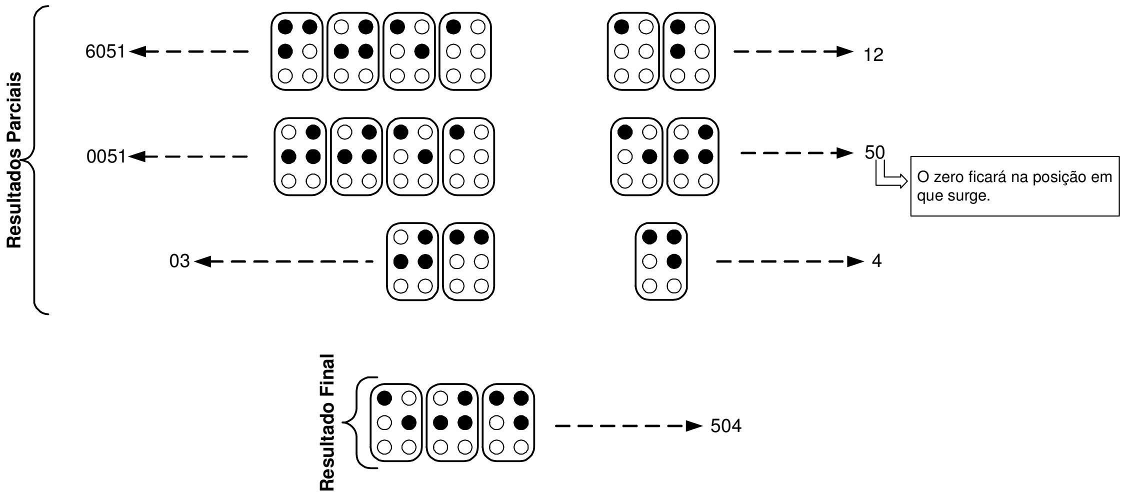
$$451426 = 23 \times 19627 + 05$$

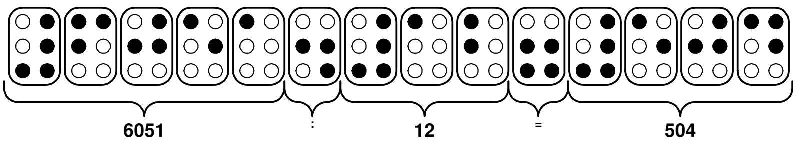


No processo de resolução de uma divisão, pode observar-se que os números correspondentes ao quociente aparecem escritos verticalmente, evitando-se, deste modo, a retoma da linha anterior.

No entanto, quando surge como algarismo do quociente o “zero”, este permanecerá na mesma linha, como podemos observar no exemplo que se segue:

6051	12
0051	504
03	

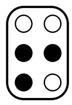
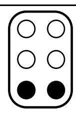
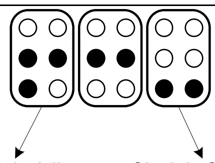
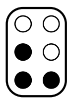
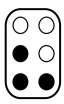
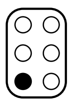




Note-se que, em expressões numéricas simples, a sua resolução passa por uma escrita linear, não havendo necessidade de utilização dos critérios de simplificação mencionados anteriormente, tendo o aluno a possibilidade de efetuar os cálculos mentalmente ou recorrer a uma calculadora falante, um ábaco, uma caixa de números ou qualquer outro tipo de recurso aplicável ao Braille.

4.2.3 – Notações relevantes na escrita de expressões numéricas e algébricas

Entende-se por operações aritméticas a adição (soma), diferença (subtração), produto (multiplicação) e quociente (divisão). Segue-se a representação em Braille das respetivas operações.

Operação	A negro	Representação em Braille	
		Notação	Códigos (como se lê para um aluno cego)
Adição ou Soma	+		(235)
Diferença ou Subtracção	-		(36)
Alternativa de Soma Algébrica	±		(235), (25), (36)
Produto ou Multiplicação	× .	  **ou** 	(236) (236) (3)
Quociente ou	÷		

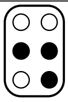
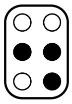
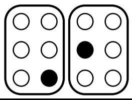
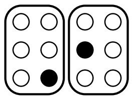
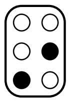
Divisão	**:**		**(356)**
			**(356)**
	/		**(6), (2)**

Tabela 19: Representação em Braille das operações aritméticas

Aparentemente, a tabela acima apresentada revela-se de fácil leitura e compreensão. Todavia, esconde inúmeros perigos no processo de ensino/aprendizagem de alunos cegos. De facto, uma leitura descontextualizada da referida tabela, camufla inúmeros aspetos que, se desconsiderados, serão propícios a momentos de alguma confusão aquando da sua utilização prática em sala de aula.

Se, por um lado nada de relevante há a salientar no que respeita à adição e à subtração, uma vez que estas operações se realizam, a Braille, com recurso a um símbolo único; por outro lado, no que respeita à multiplicação e à divisão, o uso da simbologia Braille pode revelar-se mais problemático, tendo em conta que as referidas operações podem ser representadas por mais do que um símbolo.

As notações para o produto e para o quociente que aparecem representadas em primeiro lugar na tabela são as mais utilizadas e as mais funcionais.

Não sendo muito usual o emprego da "barra" na divisão, esta poderá, contudo, ser utilizada, o que, em termos práticos, poderá criar situações de confusão: o símbolo de "barra" é constituído por duas células (ponto 6) e (ponto 2) , mas frequentemente alunos que apresentem pouca sensibilidade táctil interpretam o símbolo como parte integrante de uma única célula (ponto 3 e ponto 5), , cujo significado é "parênteses auxiliar fechado" e não "barra" de divisão, resultando daí uma total impossibilidade de compreensão e resolução da expressão algébrica em questão, pelo que deverá evitar-se a utilização deste símbolo, optando pelo primeiro.

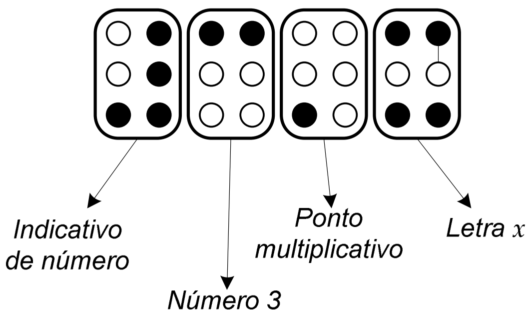
Na multiplicação, o "ponto multiplicativo" emprega-se essencialmente no cálculo algébrico, uma vez que só é utilizado quando se pretende multiplicar um número por uma letra ou várias, duas ou mais letras, um número e um parêntese, uma letra e um parêntese ou dois ou mais parênteses. O uso deste segundo símbolo, à semelhança do que acontece com o uso do símbolo de "barra" na divisão, pode originar situações problemáticas em sala de aula.

Observe-se, então, as diferentes situações que podem ocorrem na escrita Braille:

<u>1.ª Situação</u>: O "ponto multiplicativo" entre um número e uma letra.

Queremos escrever a seguinte expressão: $3.\,x$

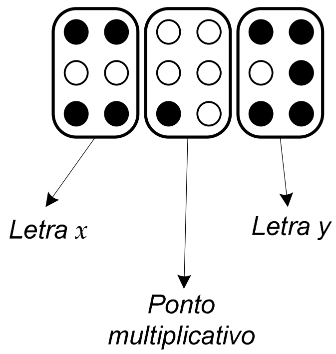
Em Braille, temos:



<u>2.ª Situação</u>: O “ponto multiplicativo” entre duas letras.

Queremos escrever a seguinte expressão: $x.\,\mathrm{y}$

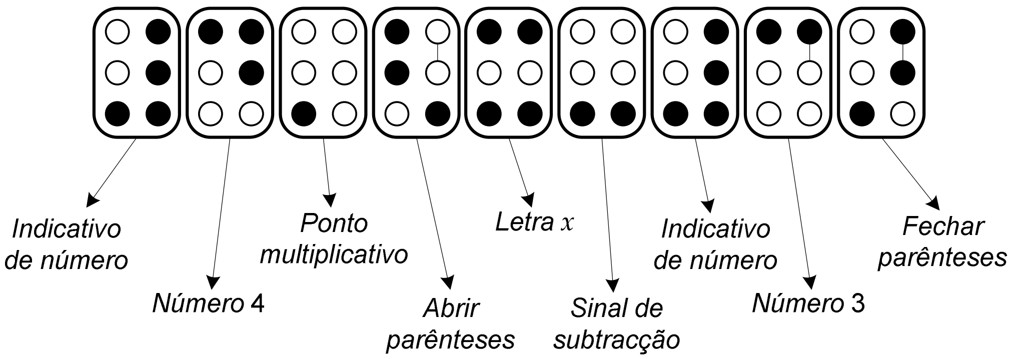
Em Braille, temos:



<u>3.ª Situação</u>: O “ponto multiplicativo” entre um número e um parênteses.

Queremos escrever a seguinte expressão: $4.(x-3)$

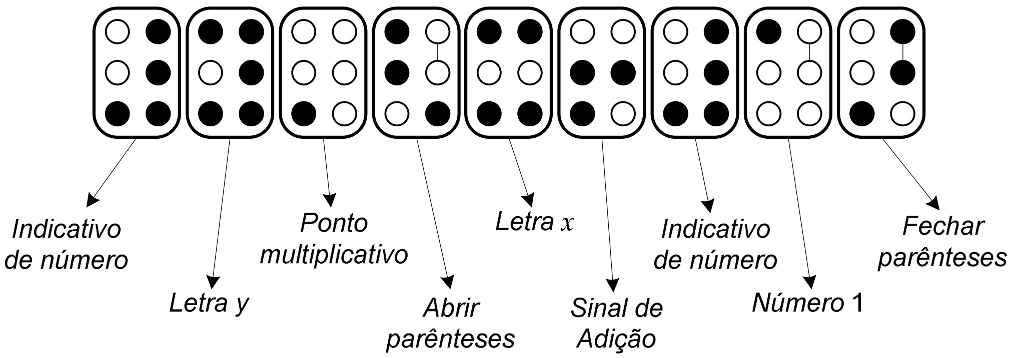
Em Braille, temos:



<u>4.ª Situação</u>: O "ponto multiplicativo" entre uma letra e um parênteses.

Queremos escrever a seguinte expressão: $y.(x+1)$

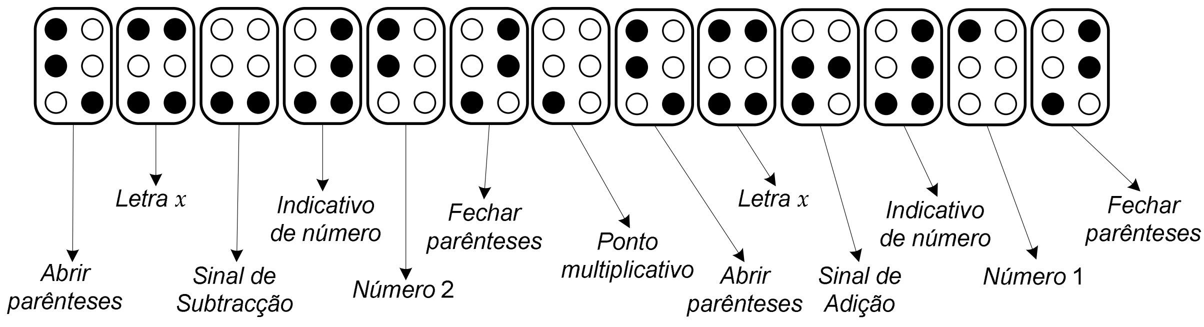
Em Braille, temos:



<u>5.ª Situação</u>: O "ponto multiplicativo" entre dois parênteses.

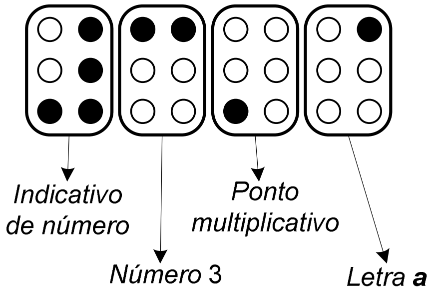
Queremos escrever a seguinte expressão: $(x-2).(x+1)$

Em Braille, temos:



Ao passo que, nas cinco situações apresentadas anteriormente, o uso do "ponto multiplicativo" não se revela problemático do ponto de vista da interpretação da simbologia, a situação abaixo apresentada revela-se problemática e levará certamente o aluno ao erro:

<u>6.ª Situação</u>: Perante a expressão $3.\,a$, o aluno escreverá:



O aluno acaba de escrever a expressão $3.\,a$, mas também o número ordinal 3ª, terceira, cardinal 3 precedido do sinal numérico seguido da terminação a.

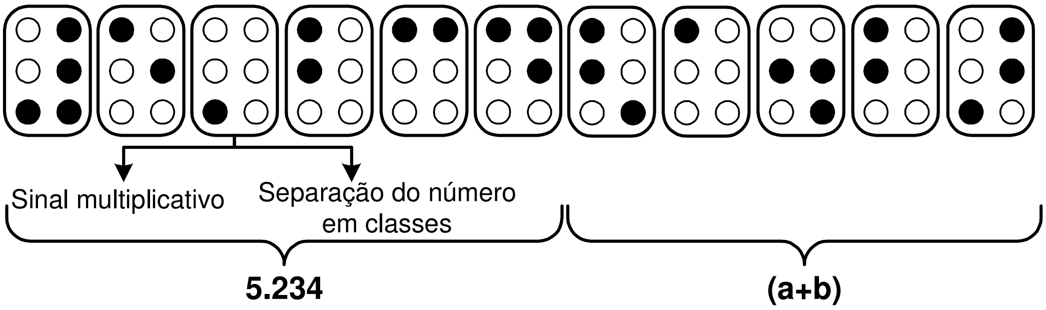
Outra situação problemática será o facto de a negro ser possível eliminar o sinal de multiplicação entre um número e uma letra, entre duas ou mais letras, entre um número e um parênteses, entre uma letra e um parênteses e entre dois ou mais parênteses, mas nunca possível entre dois números, pois 3 x 3 transformar-se-ia em 33.

Em Braille, a eliminação do sinal de produto levar-nos-á a uma enorme complexidade e muitas vezes até mesmo ao erro. Poderá ser possível, mas não aconselhável, a não ser que o aluno seja previamente alertado de determinada simbologia, a eliminação do sinal multiplicativo entre um número e um parênteses, uma letra e um parênteses e entre dois ou mais parênteses. As razões pelas quais não é aconselhável a eliminação do sinal de multiplicação são as seguintes:

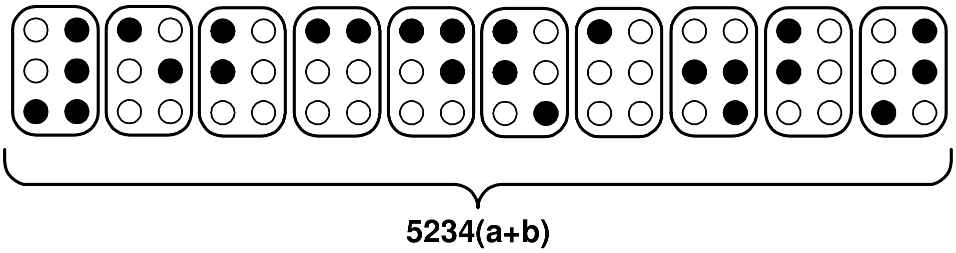
- Entre um número e um parênteses

Se recordarmos o que foi mencionado no tema "Números inteiros", o ponto multiplicativo (ponto 3) substitui o espaço que a negro serve para a separação dos números em classes de três algarismos.

Por exemplo, se o aluno pretender escrever 5234(a+b), este não deverá ter em consideração a separação do número em classes, pelo que deverá ser atempadamente alertado para tal facto, caso contrário irá obter uma expressão com um significado completamente diferente do desejado.



Assim sendo, observa-se que o aluno acabou de escrever a expressão 5×234×(a + b) utilizando o ponto 3 numa perspetiva de separação do número 5234 em classes e não numa perspetiva de ponto multiplicativo, sendo certo que a expressão passou a ter um duplo significado. Contudo, um aluno aletrado atempadamente para a não utilização da separação de números em classes, não haverá qualquer problema na eliminação do sinal multiplicativo, escrevendo:



- Entre uma letra e um parêntese

Esta situação revela-se menos problemática que a anterior, tendo-se verificado um menor número de dificuldades na sua aplicação, ainda que existentes.

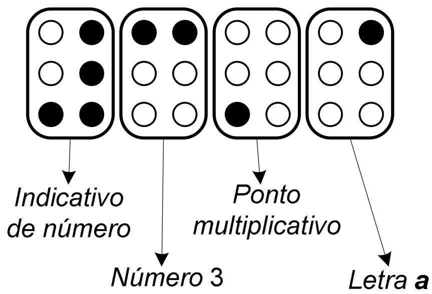
Note-se que o símbolo de parênteses curvo na grafia da Língua Portuguesa a Braille é diferente da grafia matemática Braille (GMB). Na GMB é representado pelo ponto

(126), cujo significado na grafia da Língua Portuguesa é uma vogal com acentuação circunflexa “ê”.

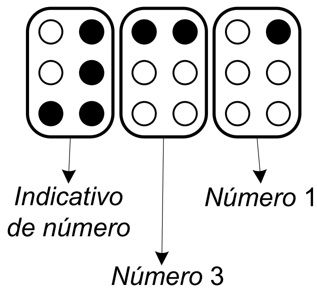
Na grafia da Língua Portuguesa a representação do parênteses curvo é o ponto (126),(3) distinguindo-se assim do “ê”.

Assim sendo, um aluno que opte por trabalhar com o ponto multiplicativo, ponto três, poderá ser levado a pensar que está perante um parênteses e um ponto multiplicativo e apenas está a escrever parênteses na grafia da Língua Portuguesa, uma vez que na GMB não tem qualquer significado.

Todavia, é muito importante ser-se conhecedor da total impossibilidade de ausência de sinal multiplicativo entre um número e uma letra, na medida em que, ao eliminá-lo, o aluno, ao pretender escrever **3ª,** estará a escrever **31**.

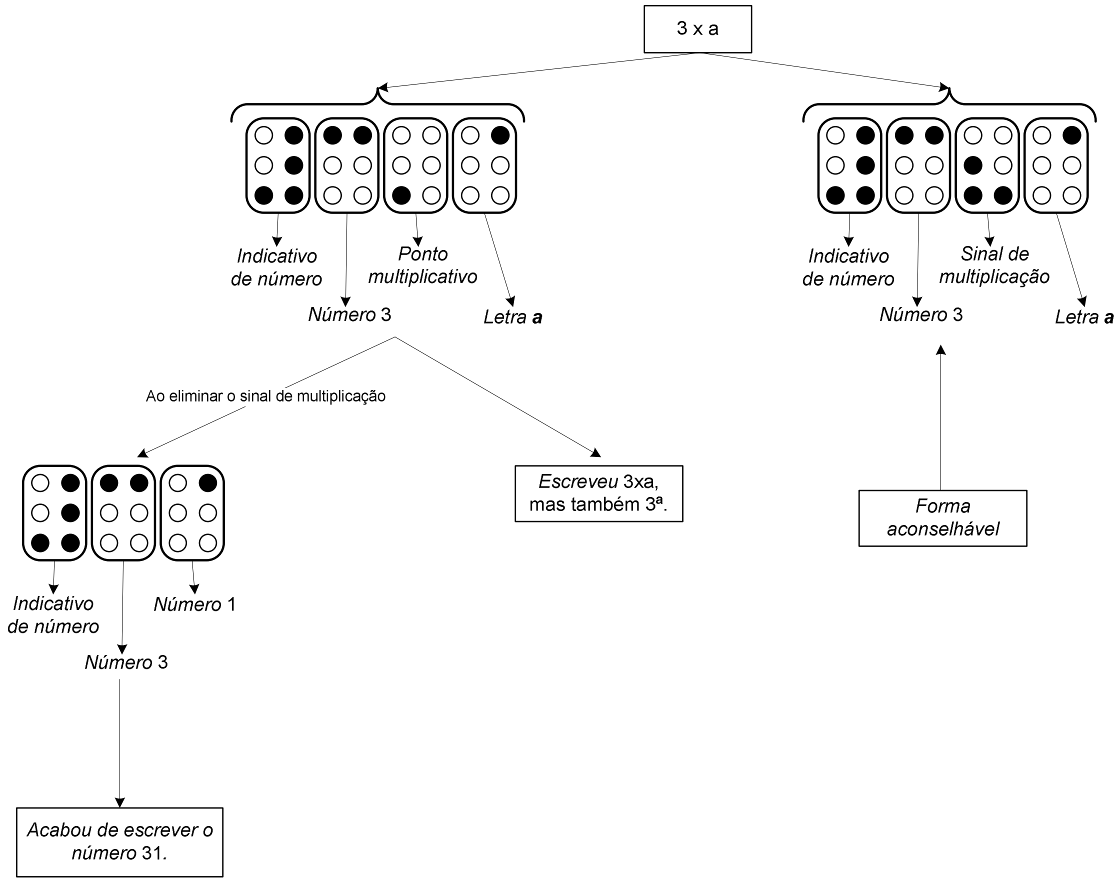


Ao eliminar o ponto multiplicativo ficará:



Assim sendo, o aluno acabou de escrever o número 31.

Deste modo, um aluno que pretenda escrever **3 x a**, **3.a** ou **3a**, só o poderá fazer recorrendo obrigatoriamente ao sinal de multiplicação, caso contrário estará a cometer um erro.



Conclui-se assim que a melhor estratégia passará por se aplicar obrigatoriamente o sinal de multiplicação, preferencialmente utilizando o ponto (236), a fim de evitar erros de gráficos e de semântica.

Com as operações aritméticas, surgem as relações numéricas com a ordem natural definida nos respetivos conjuntos numéricos. Na tabela seguinte descreve-se toda a simbologia representada no 3.º Ciclo do Ensino Básico.

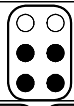
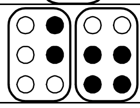
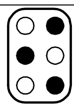
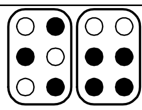
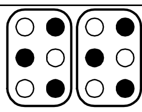
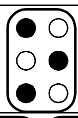
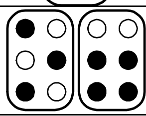
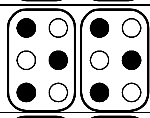
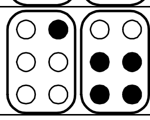
Relação	A negro	Representação em Braille	
		Notação	Códigos (como se lê para um aluno cego)
Igualdade	=		**(2356)**
Desigualdade	≠		**(45), (2356)**
Equivalência			**(), (), ()**
Menor que	<		**(246)**
Menor ou igual ou Inferior ou igual	≤		**(246), (2356)**
Muito inferior *a*	<<		**(246), (246)**
Maior que	>		**(135)**
Maior ou igual ou Superior ou igual	≥		**(135), (2356)**
Muito superior *a*	>>		**(135), (135)**
Aproximadamente igual *a*	≈		**(4), (2356)**

Tabela 20: Relações numéricas em Braille

Tendo em conta a complexidade inerente aos inúmeros símbolos que se tem de utilizar, será deveras importante criar mecanismos de associação de alguns símbolos para facilitar a sua memorização.

Assim sendo, chama-se à atenção para os sinais cuja relação é antonímica, pelo que se antepõe o ponto (45) ao símbolo que indica a relação cuja validade se nega, por exemplo, igualdade e desigualdade.

Na realização de expressões numéricas que envolvam diversas operações, estas estão sujeitas à regra de prioridade das operações, segundo duas regras:

<u>Regra 1:</u> Ordem de prioridade das operações aritméticas: 1.º- potência ou raiz, 2.º - multiplicação ou divisão e 3.º - adição ou subtração.

<u>Regra 2:</u> Os parênteses reclamam prioridade perante a expressão ou expressões que eles envolvam. Pode acontecer a existência de vários parênteses numa expressão, pelo que é necessário ter em atenção três regras:

> 1.ª – Todo o parênteses que se abre ter-se-á de fechar;
>
> 2.ª – A uma abertura de parênteses só pode suceder uma quantidade, os sinais de adição ou subtração, ou outra abertura de parênteses.
>
> 3.ª – Ao fecho de um parênteses só pode anteceder uma quantidade ou outro fecho de parênteses.

Existem, por sua vez, outras variantes dos parênteses, tais como chavetas {}, parênteses retos [ ], entre outros. Atualmente, com o intuito de facilitar todo o trabalho com recurso às calculadoras e às novas tecnologias tende-se a utilizar o parêntese curvo como modelo único.

Apresenta-se, de seguida, uma tabela de sinais unificadores e de parênteses auxiliares, estes últimos existentes apenas no sistema Braille:

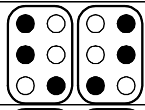
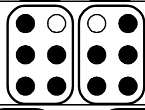
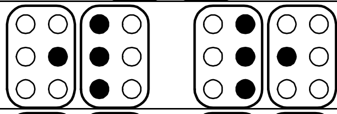
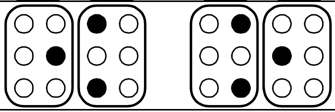
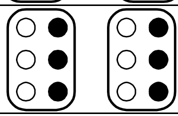
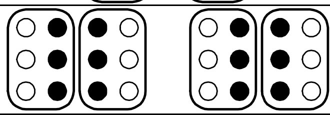
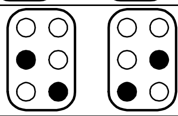
Sinais Unificadores e parênteses auxiliares	A negro	Representação em Braille	
		Notação	**Códigos (como se lê para um aluno cego)**
Parênteses curvos	( )		**(126), (345)**
Parênteses rectos	[ ]		**(12356), (23456)**
Chavetas	**{ }**		**(5), (123) (456), (2)**
Parênteses angulares	⟨ ⟩		**(5), (13) (46), (2)**
Barras (com meio rectângulo em branco)	| |		**(456), (456)**
Barras duplas	‖ ‖		**(456), (123) (456), (123)**
Parênteses auxiliares	**Não existe**		**(26), (35)**

Tabela 21: Sinais unificadores e parênteses auxiliares

Note-se que os parênteses auxiliares não apresentam qualquer tipo de correspondência a negro, pelo que simplesmente constituem um recurso do sistema Braille para delimitar algumas expressões que possam surgir na escrita a negro unificadas de diferentes formas, tais como: diferença de tamanho, diferença de nível relativamente à linha básica do texto, traço horizontal nas frações e radicandos, entre outros.

Se porventura as expressões se encontrarem unificadas por parênteses curvos, retos e chavetas, deixa de ser necessário o uso de parênteses auxiliares. Contudo, poder-se-á utilizar os parênteses auxiliares de forma repetitiva e indefinidamente, sem causar qualquer tipo de equívoco, na medida em que os sinais de fecho de parênteses aparecem na ordem inversa às aberturas homólogas.

Para se realizar um cálculo, poder-se-á recorrer a três métodos, de acordo com os meios existentes em dado momento, tais como:

- Cálculo mental puro;

- Recurso a instrumentos de cálculo, nomeadamente Ábaco, calculadoras e programas informáticos, etc;

- Algoritmos baseados na escrita numérica posicional, nas propriedades estruturais e em certos resultados elementares automatizados.

O cálculo aritmético apresenta-se, para o aluno cego, como sendo uma dificuldade acrescida a ultrapassar na aprendizagem da Matemática, facto que não será difícil de compreender, se tivermos em conta que alunos normovisuais, tendo acesso a papel e lápis, apresentam muitas dificuldades nesta matéria.

A constatação desta realidade levou a uma preocupação crescente no sentido de se criarem e implementarem métodos, técnicas e instrumentos que facilitem o cálculo aritmético do aluno cego. Nesse sentido, atualmente, nas aulas do 3.º Ciclo do Ensino Básico em Portugal, é recorrente o uso de instrumentos adaptados, tais como: Máquina Perkins; Calculadora falante e computador portátil com software específico, cuja utilização implica, necessariamente, a respetiva adequação dos métodos e técnicas de ensino face aos utilizados com alunos normovisuais, os quais serão descritos posteriormente.

CAPÍTULO V – METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este capítulo procura descrever a metodologia utilizada ao longo do estudo, estando organizado do seguinte modo: as *opções metodológicas* realizadas, subdivididas em paradigma da investigação e descrição da modalidade metodológica; a *caracterização dos participantes* no estudo; e *recolha e análise de dados*, subdividida em apresentação das técnicas e dos instrumentos utilizados na recolha de dados e a descrição do método de análise dos dados.

5.1 – Opções metodológicas

5.1.1 – Paradigma da investigação

Pretende-se com a presente investigação conhecer as características e limitações recorrentes da GMB; analisar e refletir sobre os processos de raciocínio dos alunos cegos e sobre o modo como estes mobilizam os seus conhecimentos no âmbito do ensino da Álgebra; bem como delinear e aplicar estratégias de ensino-aprendizagem a estes alunos, avaliando o seu impacto na construção do conhecimento matemático dos alunos, mas também na sua inclusão numa turma regular, assente nas cinco características de um paradigma de investigação interpretativa, segundo uma metodologia descritiva e qualitativa, definidas por Bogdan e Biklen[218]:

[218] Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

1 – "*A fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador o instrumento chave da recolha de dados.*"

Neste caso, a investigação decorre num ambiente natural, na medida em que o investigador é o docente de Matemática de uma turma de ensino regular que inclui alunos cegos, o seu público-alvo. Esta dupla característica permite-lhe um contacto direto e regular com o sujeito alvo no seu contexto de aprendizagem e, assim, recolher dados diretamente no contexto onde ocorre a problemática que serve de base a esta investigação, isto é "tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento"[219];

2 – "*É descritiva*"

Tendo em consideração a natureza da investigação, é fundamental para o estudo uma descrição e análise pormenorizada dos dados recolhidos, de modo a explorar o seu potencial, para uma melhor compreensão da influência das estratégias de ensino aplicadas aos alunos aquando da realização de atividades de exploração, quer no conhecimento matemático, quer no processo de inclusão.

3 – "*Dá-se mais ênfase ao processo do que ao produto*"

Embora o resultado final, isto é, a aquisição de conhecimentos algébricos e o desenvolvimento da capacidade da sua aplicação, seja de extrema relevância quando se trabalha com alunos, pretende-se sobretudo com este estudo compreender os processos de raciocínio inerentes ao desenvolvimento dos referidos conhecimentos e capacidades, de modo a que esta compreensão se torne útil à evolução dos alunos, quer no domínio em estudo, quer noutros domínios, bem como a facultar pistas a outros investigadores e docentes.

4 – "*Os dados são analisados indutivamente*"

O objetivo do estudo não passa por confirmar ou infirmar hipóteses previamente estabelecidas, mas por ir formulando hipóteses à medida que hipóteses anteriores vão sendo testadas e os dados vão sendo analisados, pois só assim se poderá contribuir verdadeiramente para o sucesso dos alunos.

[219] Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, p.41.

5 – "*O significado é de importância vital*"

Os significados dados pelos alunos relativamente à sua própria aprendizagem , comparados com os dados recolhidos e analisados pelo investigador revestem-se de extrema importância, na medida em que se constituem como fortes fontes de recolha de dados, de forma a que esta investigação se torne, efetivamente, útil à sua evolução no processo de ensino-aprendizagem.

Tendo em conta que, neste caso, o investigador é também, e antes de mais, um professor em contexto, o qual procura, quotidianamente, respostas para as dificuldades diárias com que se depara, de modo a promover o sucesso escolar dos seus alunos, optou-se pelo modelo da *investigação-ação* que, segundo Elliott[220], analisa situações problemáticas, inaceitáveis em alguns aspetos (neste caso, as limitações decorrentes da cegueira no estudo da Álgebra escolar); contingentes, passíveis de mudança, (neste caso, através do delinear, aplicar e avaliar estratégias que pudessem permitir colmatar as referidas dificuldades); e prescritivas que requerem uma resposta prática (neste caso, em que só a sua aplicação permitiria avaliar resultados).

Ainda segundo o autor, este paradigma relaciona-se com os problemas práticos experimentados pelos professores, pelo que pode ser desenvolvido pelos próprios, sendo o seu propósito o de aprofundar o conhecimento do professor do seu problema. Para o efeito, isto é, para explicar o que acontece, a investigação-ação constrói um guião – estudo de caso – sobre o acontecimento, relacionando-o com um contexto de contingências mutuamente interdependentes, e interpretando-o do ponto de vista de quem atua e interatua na situação problemática, de modo a proporcionar uma teoria da situação.

Na verdade, e como Elliott[221] reconhece, a compreensão, entendida por Gadamar como "*o resultado da interação entre o texto objetivamente existente e a subjetividade*

[220] Elliott, J. (2005). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.
[221] Ibidem.

do intérprete" não determina a ação adequada, contudo a ação adequada deve fundar-se na compreensão.

Segundo Dick[222] este método permite obter resultados em duas vertentes: *ação*, no sentido de auferir transformações na comunidade escolar; e *investigação*, com o intuito de aumentar a compreensão do investigador e da comunidade. Desta forma, o investigador observa o sujeito a investigar, o aluno cego incluído numa turma de ensino regular, e intervém diretamente com ele, ou seja, planifica e leciona as suas aulas, de acordo com estratégias definidas após uma avaliação prévia das necessidades, atuando sobre ele. Para isso, observa, reflete e volta a planear novas tarefas, adaptando a sua ação à problemática, à medida que esta se vai clarificando, com vista a obter resultados positivos no desenvolvimento do aluno.

Para Elliott[223], a *investigação-ação* passa por três etapas:

1.ª etapa: consiste no desenvolvimento de teorias explicativas que se centrem nas influências restritivas dos fatores institucionais, sistémicos e sociais sobre a liberdade dos professores para promoverem valores educativos nas escolas.

2.ª etapa: consiste na formulação de hipóteses científicas, isto é as estratégias que o investigador considera que, aplicadas, poderão alterar a situação.

3.ª etapa: desenvolvimento e avaliação das estratégias de ação, como forma de comprovar a eficácia das estratégias usadas, resultados que poderão constituir pontos de partida pata a formulação de novas hipóteses.

Para Serrano[224], o processo de *investigação-ação*, passa por quatro fases fundamentais:

---

[222] Dick, Bob (2000). *A Beginner's Guide to Action Research.* Online em http://www.scu.edu.au/schools/gcm/ar/arp/guide.html>.
[223] Elliott, J. (2005). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.
[224] Serrano, l. (2005). *Percursos e práticas para uma escola inclusiva.* Tese de Doutoramento.

1.ª fase: *Investigação e reflexão*, conhecimento da realidade sobre a qual se vai atuar e pesquisa de informação na literatura relacionada com a problemática a estudar;

2.ª fase: *Planificação*, elaboração de um plano de ação com vista a alterar a realidade com que se vai trabalhar;

3.ª fase: *Intervenção*, atuação sobre a situação que se deseja modificar;

4.ª fase: *Avaliação*, análise de todo o processo de forma a utilizar os resultados em futuras situações semelhantes.

Parafraseando Stenhouse, Elliott[223] refere que não é possível descrever os resultados da aprendizagem independentemente dos processos, pois os resultados se apresentam como qualidades da mente desenvolvidas de um modo progressivo durante o processo.

Por sua vez, Lessard-Hébert[225] considera que este processo se trata de *"um conjunto ordenado de fases que, uma vez completadas, podem ser retomadas para servirem de estrutura à planificação, à realização e à avaliação de um segundo projecto e assim sucessivamente"*.

Ainda relativamente à investigação-ação, de acordo com Arends[226] e Mackeman[227], trata-se de um método excelente que permite orientar práticas educativas, tendo sempre como objetivo principal melhorar o ensino e as aprendizagens em sala de aula.

Ao longo de todo o processo de investigação, há que ter sempre presente a importância da reflexão, uma vez que se inicia a investigação com uma reflexão sobre

---

225 Lessard-Hébert, M. (1996). *Pesquisa em Educação.* Lisboa: Instituto Piaget, p.15.
226 Arends, R. (2000). *Aprender a Ensinar*. Amadora: McGraw-Hill de Portugal, Lda.
227 McKernan, J. (1996) *Curriculum action research, a handbook of methods and resources for the reflective*. London: Kogan Page Limited

determinado aspeto, planifica-se todo o trabalho a realizar, refletindo sempre durante e após a ação de forma a melhorar o trabalho que se está a desenvolver[228].

Autores como Cohen e Manion[229] consideram que as várias fases do processo de investigação-ação devem ter como base uma variedade de mecanismos (questionários, diários, entrevistas, estudos de caso, etc.) que permitam sustentar todo o trabalho. É esta observação rigorosa de situações e factos que permite efetuar modificações, reajustamentos, redefinições e mudanças de direção.

Todo este processo requer tempo para que os investigadores-professores possam realizar o processo de investigação – ação. Por exemplo, Franco[230] afirma que esta metodologia "*pode e deve funcionar como metodologia de pesquisa, pedagogicamente estruturada, possibilitando tanto a produção de conhecimentos novos para a área da educação, como também formando sujeitos pesquisadores, críticos e reflexivos*"[231].

Para que a investigação se possa caracterizar pela validade e fiabilidade deverá ser suportada por diferentes meios de recolha de dados que permitam uma triangulação de informação ajudando assim a reduzir enviesamentos. Uma vez que existe uma tendência para um foco na observação e na participação em detrimento de anotações e registos e sabendo que tirar anotações, manter registos e criar ficheiros de dados fazem parte dos aspetos mais importantes da observação participante[232], a recolha sistemática de dados é realizada ao longo de toda a temática de Álgebra.

Numa investigação qualitativa, o objetivo principal não é saber se os resultados são suscetíveis de generalizações, mas antes se os podemos adaptar a outros sujeitos e contextos, *"os investigadores que adoptam uma perspectiva qualitativa estão mais interessados em compreender as percepções individuais do mundo, procuram*

[228] Tripp, D. (2005). Pesquisa- acção: uma introdução metodológica. In *Educação e Pesquisa,* 31(3), pp.443-466.
[229] Cohen, L.; Manion, L. (1994) *Research Methods in Education*. London: Routledge.
[230] Franco, M. (2005). Pedagogia da pesquisa-acção. *Educação e Pesquisa*, 31(3), pp.483-502.
[231] Ibidem p.20.
[232] Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation*. Newbury Park: Sage.

compreensão, em vez de análise estatística'[233]. Utilizando diferentes fontes serão obtidas múltiplas medidas dos mesmos fenómenos.

Assim, e de acordo com a perspetiva de Erickson[234], sendo o interesse da investigação interpretar e explicar os processos de raciocínio para melhor compreender como é construído o conhecimento matemático tendo em conta o ponto de vista dos alunos e os seus próprios significados, a opção pelo paradigma interpretativo mostra-se particularmente apropriada. Esta opção é ainda reforçada pela necessidade de uma compreensão específica referente aos processos de raciocínio dos alunos que tem implícita a pretensão de contribuir para melhoria das práticas educacionais.

A escolha por estes paradigmas encontra-se estreitamente relacionada com o objetivo e as questões a que esta investigação pretende dar resposta.

Na verdade, e como referido por Elliott[235] , a ação educativa está implícita no processo. O modelo do processo especifica as atividades de ensino e de aprendizagem consideradas educativas, quando relacionadas com a sua coerência ética e com o desenvolvimento da compreensão, concebidas como processo de aprendizagem que manifesta de modo progressivo determinada qualidade mental intrínseca.

Por um lado, nesta investigação pretende-se saber mais sobre os processos de raciocínio dos alunos cegos e a forma como estes mobilizam conhecimentos prévios, considerando a perspetiva destes alunos em situações particulares, nomeadamente durante a realização de atividades de natureza exploratória. Para o efeito, é necessário recolher e analisar dados, junto dos alunos, preferencialmente em contexto de sala de aula, o seu ambiente natural.

---

[233] Bell, J. (2004). *Como realizar um projecto de investigação* (3ª edição). Lisboa: Gradiva, p.20.

[234] Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, pp. 119-161. New York, NY: Macmillan.

[235] Elliott, J. (2005). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.

Por outro lado, pretende-se, igualmente, desenvolver novas estratégias de ensino-aprendizagem, tendo como ponto de partida a influência da utilização de determinado tipo de atividades no desenvolvimento do raciocínio e na construção do conhecimento matemático.

Tal como referido por Elliott[236], o conhecimento profissional consiste em teorias práticas ou em marcos conceptuais – caractegorizações de problemas práticos (uniformidades encontradas nos problemas), suas explicações e soluções.

5.1.2 – Observação participante e naturalista

Esta investigação, de carácter interpretativo, qualitativo e descritivo, assenta numa observação participante e naturalista, visto ser a mais apropriada para que os objetivos traçados pudessem ser desenvolvidos.

Na sequência de alguns pressupostos da investigação interpretativa, qualitativa e descritiva, a opção pela *observação participante* pretende, nesta investigação, permitir ao investigador ser um agente ativo em todo o processo em estudo, de modo a melhor poder compreender a problemática em questão e, assim, poder agir sobre ela, avaliando o impacto da sua ação e, na sequência desta avaliação, delinear novas estratégias de ação. Só a observação participante permitiria, neste caso concreto, compreender os processos de raciocínio utilizados pelos alunos nas diversas atividades algébricas e avaliar sistematicamente o impacto das estratégias de ensino utilizadas pelo investigador no dia-a-dia, em contexto de sala de aula, de modo a promover práticas letivas que fomentem a inclusão e o desenvolvimento de todos os alunos.

---

[236] Elliott, J. (2005). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.

No que diz respeito à observação naturalista, cita-se Bell[237] que afirma: *"O investigador-professor, ou o estudante que trabalhe sozinho pode ser comparado com uma equipa de investigadores quando se dedica pessoalmente à observação e análise de casos individuais. A observação, porém, não é um dom natural, mas uma actividade altamente qualificada para a qual é necessário não só um grande conhecimento e compreensão de fundo, mas também a capacidade de desenvolver raciocínios originais e uma certa argúcia na identificação de acontecimentos significativos. Não é certamente uma opção fácil"*.

Tal como refere Bell[238], observar não é tarefa fácil, na medida em que a subjetividade acaba sempre por estar presente. Todavia, a observação torna-se imprescindível numa investigação deste cariz, já que permite ao investigador perceber e interpretar comportamentos e atitudes.

De forma a conseguir atingir os objetivos que se pretendem através deste instrumento de recolha de dados, o investigador deve, antes de partir para o terreno onde se irá desenrolar a observação, ter o cuidado de responder às seguintes questões[239]:

a) Observar o quê;
b) Que instrumentos deverão utilizar para registar as observações efetuadas;
c) Que técnica de observação escolher;
d) No caso da observação participante que papel assumir, como observatório, e qual o grau de envolvimento a manter como objeto de estudo;
e) Que questões deontológicas terá de gerir;
f) Que dificuldades particulares antevê no processo de observação e como pensa ultrapassá-las.

Assim, decidiu-se observar o comportamento e a atitude dos alunos perante as tarefas propostas e o impacto destas na evolução da sua aprendizagem e no seu processo de inclusão.

---

[237] Bell, J. (2004). *Como realizar um projecto de investigação* (3ª edição). Lisboa: Gradiva, p.161.
[238] Ibidem.
[239] Carmo, H. et Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Investigação – Guia para a auto-aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta

Seguindo uma técnica de observação naturalista e participante, como instrumentos de recolhas de dados, procedeu-se à elaboração de um diário das aulas; à tomada de notas, sempre que possível durante a aula e, quando tal não fora possível, imediatamente após as aulas, ao registo áudio de diálogos desenvolvidos com os alunos envolvidos no processo, à aplicação de questionários e à recolha das tarefas desenvolvidas pelos alunos em contexto de sala de aula.

Dada a dupla função do observador, a de investigador e a de professor da turma em que estavam incluídos os alunos a observar, a participação ativa foi essencial, tal como um elevado grau de envolvimento com o objeto em estudo.

No que respeita às questões deontológicas, foram inúmeras as que foi necessário gerir, tratando-se de um processo investigativo que não só analisa, como também atua sobre pessoas, sobretudo tratando-se de jovens, e por um longo período de tempo, neste caso, três anos letivos Salienta-se, neste ponto, a constante preocupação em que a presente investigação não causasse qualquer tipo de prejuízo aos alunos, quer na sua vertente académica (participação e sucesso escolar), quer na sua vertente pessoal (nomeadamente no que respeita à socialização e a à sua inclusão). Dada a dificuldade em se discernir os papéis do observador, enquanto investigador e enquanto docente, optou-se por ter sempre presente a ideia de que esta investigação visava, antes de mais e acima de tudo, promover práticas que fomentassem o desenvolvimento dos alunos observados, atuando, sempre positivamente sobre estes, nunca permitindo que a necessidade de se observar determinado aspeto se sobrepusesse ao bem-estar do avaliado, mesmo que a primeira necessidade, isto é, avaliar determinado aspeto que pudesse prejudicar de alguma forma os alunos, fosse posta de parte, ainda que disso pudesse depender a conclusão da presente investigação.

Foi também o respeito pelas questões deontológicas aquele que se anteviu como constituintes das principais dificuldades. Paralelamente, previu-se a subjetividade inerente a qualquer processo de observação naturalista participante em que o grau de envolvimento entre o observador e o observado seja demasiado elevado, tal como é o caso; bem como a duplicidade de papéis assumidos pelo investigador, o que aumenta o grau de subjetividade já referido. Como forma de minimizar esta situação, promoveu-se, ao longo de todo o processo, a um registo sistemático de dados, procurando, sempre, separar-se as constatações das inferências; procedeu-se, também, a processos de colaboração de análise de dados, sobretudo no que às inferências diz respeito, com os pares e com os próprios alunos. Todo este processo teve como ponto de partida a ideia de é fundamental *"destrinçar os factos observados, dos juízos de valor, interpretações e hipóteses que lhe tenham ocorrido."*[240].

A observação poderá revelar-se um instrumento de recolha de dados de extrema importância do qual resultarão dados significativos para a conclusão do estudo, contudo há que ter em conta que observar não é assim tão fácil quanto pode parecer à partida, tendo o investigador de ter alguns cuidados e refletindo sempre, no momento, as informações que vai obtendo.

Salienta-se que, como referido por Elliott[241], as situações práticas são instáveis por natureza, pelo que o conhecimento adveniente da *investigação-ação* não proporciona um guia infalível para uma conduta correta nem permite prever situações futuras, limitando-se a constituir uma fonte de ajuda para que os profissionais possam estar preparados antecipadamente essas situações e, sobretudo, estejam preparados para serem surpreendidos e terem a capacidade de refletir sobre situações novas. Salienta-se, ainda, e como referido pelo mesmo autor, que qualquer teoria prática desenvolvida deve apoiar-se no desenvolvimento de teorias educativas e normativas, não sendo estas independentes.

---

[240] Ibidem, p.105.
[241] Elliott, J. (2005). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.

5.2 – Caracterização dos participantes

O presente estudo foi realizado com três alunos cegos incluídos numa turma regular de uma escola de ensino inclusivo.

O estudo foi realizado ao longo de três anos letivos, isto é, todo o 3.º Ciclo do Ensino Básico, desde o 7.º até ao 9.º ano de escolaridade, pelo respetivo professor de Matemática, com o prévio consentimento da escola, dos alunos e dos respetivos encarregados de educação.

De forma a preservar a identidade dos alunos, foram-lhes atribuídos nomes fictícios, embora toda a restante caracterização, nomeadamente as referências de género, corresponda totalmente à realidade, tendo a maioria dos dados a dados sido facultados pelo Departamento de Ensino Especial e resultantes de avaliações clínicas e psicológicas patenteadas no PEI.

Margarida

A aluna Margarida é uma rapariga que, no início do estudo, tinha 12 anos de idade, cujo percurso escolar se considera positivo, pois não apresentava qualquer retenção.

Segundo o seu PEI, a Margarida apresentava um desenvolvimento psicomotor regular e boa relação interpessoal com colegas e professores.

As NEE da Margarida prendiam-se com o seu *deficit* visual, necessitando de um reforço em algumas áreas curriculares disciplinares e de equipamentos especiais de compensação, uma vez que é uma aluna portadora de Glaucoma Congênito Bilateral, com Cegueira à direita e Alta Miopia, Astigmatismo com Ambliopia profunda no olho esquerdo (AV OD-03 OE-0,2, após correção).

Ao nível das áreas verbais, apresentava uma fluência e compreensão verbal adequadas à sua idade, porém nos aspetos do raciocínio verbal, leitura e escrita existiam algumas dificuldades, nomeadamente na compreensão e interpretação de textos, com algumas lacunas nos aspetos gramaticais da língua e na construção frásica.

O seu PEI destacava a necessidade de desenvolver estratégias de trabalho com a aluna que lhe permitissem dinamizar metodologias de estudo autónomo e reforçar as aprendizagens curriculares.

Através das informações facultadas pelo Departamento de Ensino Especial em Conselho de Turma, a Margarida, ao nível da avaliação, a Margarida poderia beneficiar de adequações curriculares, de avaliação e de Apoios Pedagógicos Acrescidos, embora fosse uma aluna responsável e trabalhadora.

Segundo o questionário aplicado ao seu professor de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico, a Margarida *frequentemente* gosta de Matemática, é uma boa aluna, realiza as tarefas autonomamente, faz os trabalhos de casa, estuda com regularidade, compreende os enunciados, escreve facilmente expressões algébricas e conhecer a simbologia matemática, embora apenas *por vezes* realize as tarefas no mesmo tempo que os restantes, goste de trabalhar em pares ou em grupos, participe oralmente, justifique os resultados e necessite de APA ou de máquina de calcular.

Visão muito semelhante de si mesma tem a Margarida que no seu questionário, considerando, no entanto, que *frequentemente* gosta de trabalhar em pares ou em grupos, justifica os resultados e necessita de máquina de calcular, que faz *sempre* os trabalhos de casa, mas que apenas *por vezes* compreende os enunciados e escreve com facilidade expressões matemáticas.

Em conversa informal, o professor da Margarida referiu tratar-se de uma boa aluna, com bastante margem de progresso, caso se tornasse mais autónoma e trabalhasse com mais regularidade.

Já a Margarida referiu ser uma aluna de nível 4 que trabalhava bastante e cujos resultados, por vezes, não correspondiam ao seu trabalho.

Rafael

O Rafael é uma rapaz que, na data do estudo, tinha 14 anos de idade, e cujo percurso escolar se revela comprometedor, uma vez que havia feito um interregno nos seus estudos, devido a problemas de saúde.

O Rafael teve um desenvolvimento psicomotor normal, porém, aos onze anos de idade, sofreu um processo inflamatório inespecífico que durou uma semana e cuja sequela foi a perda severa de visão em ambos os olhos.

Após esta situação, a família veio para Portugal a fim de obter melhor acompanhamento médico, onde lhe foi diagnosticado ARafaelse ODE com Nistagmus, catarata e deslocamento de retina bilateral, sem solução cirúrgica, traduzindo-se em cegueira total incurável, tendo sido sujeito a uma intervenção cirúrgica, sem quaisquer resultados.

À entrada do aluno na escola, o relatório de observação psicológica indica que o Rafael apresentava um nível de conhecimentos gerais fraco e capacidades de raciocínio lógico fracas, mas revelando potencialidades de base médias.

O Rafael realizou a escolaridade regular até ao 4º ano (1.º Ciclo) em Angola, até ao momento em que sofreu o processo inflamatório que conduziu à cegueira, tendo iniciado o 2.º Ciclo em Portugal, na escola em que foi observado, por indicação da ACAPO.

Segundo o seu PEI as NEE do Rafael prendiam-se com o diagnóstico de cegueira total, isto é necessidades de adaptação a esta condição física, nomeadamente nas questões de orientação e mobilidade e de aprendizagem do Braille.

O Rafael não apresentava dificuldades nas áreas motoras, tinha um raciocínio lógico satisfatório e o seu rendimento escolar revelava um nível de desempenho médio.

Ao nível das áreas verbais, apresentava uma fluência e compreensão verbal adequadas à sua idade, porém na interpretação de algum vocabulário e na leitura e escrita em Braille existiam algumas dificuldades, nomeadamente evidenciando na escrita muitos erros ortográficos, com algumas lacunas nos aspetos gramaticais da língua e na construção frásica.

Através das informações facultadas pelo Departamento de Ensino Especial em Conselho de Turma, o Rafael poderia beneficiar de adequações curriculares, de avaliação e de Apoios Pedagógicos Acrescidos, além de apoios específicos, nomeadamente de Braille e Mobilidade.

Segundo o questionário do seu professor de 2.º Ciclo o Rafael apenas por vezes gostava de Matemática, era bom aluno, realizava as tarefas autonomamente, resolvia os exercícios no mesmo tempo que os seus colegas, gostava de participar oralmente, estudava com regularidade, compreendia os enunciados, justificava os resultados, escrevia facilmente expressões matemáticas e conhecia a simbologia matemática; precisava *sempre* de APA e *frequentemente* da máquina de calcular, gostando, também *frequentemente* de trabalhar em pares ou grupos, contudo *raramente* fazia os trabalhos de casa e apenas *por vezes* estudava com regularidade.

No questionário por si preenchido, o Rafael apresentou respostas idênticas à conceção que o professor tinha de si em várias questões, considerando que apenas *por vez*es gostava de Matemática, era bom aluno, realizava as tarefas autonomamente, resolvia os exercícios no mesmo tempo que os seus colegas e gostava de participar oralmente, compreendia os enunciados e justifica os resultados; que *frequentemente* gostava de trabalhar em pares ou em grupos e necessitava de máquina de calcular; e que precisava *sempre* de APA. Contrariamente ao professor, considerou que quase sempre faz os trabalhos de casa e estudo com regularidade.

Em conversa informal, o referido professor referiu tratar-se de um aluno de nível 3, em termos de avaliação sumativa, com margem de progresso, mas cuja baixa autoestima, possivelmente adveniente da sua relativamente recente condição, consistia um entrave à sua aprendizagem, ao qual acrescia as lacunas ainda muito evidentes na GMB.

Falando sobre si mesmo, numa primeira entrevista informal, o Rafael referiu que os professores eram muito injustos e que tinha consciência de que podia fazer mais, mas que não era fácil.

Pedro

O Pedro é um aluno que, à data do início do estudo, tinha 15 anos de idade, tendo tido reprovações no seu percurso escolar, na sequência da sua perda de visão, ainda no seu país de origem , a Guiné.

Portador de Ptisis Bulbi no OD e no OE, hipertensão ocular, Glaucoma da córnea e Catarata traumática, sem acuidade visual em ambos os olhos, apenas perceção luminosa no OE, era seguido desde os 12 anos de idade, quando perdera a visão. Fora sujeito a intervenções cirúrgicas devido ao traumatismo da córnea.

As NEE do Pedro estavam associadas à deficiência visual de que é portador, utilizando o Braille como sistema de comunicação escrita.

Segundo o PEI, as maiores dificuldades detetadas ao longo da escolaridade associavam-se ao desenvolvimento motor (coordenação manual) e autonomia (evidenciando lentidão na realização de atividades e necessidade de apoio individualizado por parte dos professores).

O Pedro revelava ainda dificuldades na compreensão e aplicação de conhecimentos a novas situações de aprendizagem, exigindo apoio individualizado para conseguir desenvolver as competências definidas para o ano de escolaridade e apresentar um nível de desempenho satisfatório.

Nas áreas percetivas, em especial na perceção táctil, necessitava de continuar o trabalho realizado, de forma a aumentar a perceção da simbologia Braille.

Nas áreas verbais, o Pedro tinha um bom desenvolvimento, uma fluência e compreensão verbal adequadas, porém na leitura evidenciava dificuldades na descodificação e associação dos caracteres, sendo esta com velocidade lenta, o que não beneficia a compreensão e interpretação de textos.

Na escrita tinha maior à vontade, mas com muitos erros ortográficos e má apresentação gráfica dos trabalhos, necessitando de investir mais na construção de texto e nas noções gramaticais.

Através das informações facultadas pelo Departamento de Ensino Especial em Conselho de Turma, o Pedro tinha direito a adequações curriculares, de avaliação, Apoios Pedagógicos Acrescidos, e apoios especializados, nomeadamente de Braille e Mobilidade.

Relativamente ao Pedro, o seu professor de Matemática do 6.º ano de escolaridade, considerava que este *raramente* gostava de Matemática, era bom aluno, realizava as tarefas autonomamente, resolvia os exercícios no mesmo tempo que os restantes, gostava de participar oralmente, compreendia os enunciados, justificava os resultados e compreendia facilmente expressões matemáticas; que apenas por vezes realizava os trabalhos de casa, estudava com regularidade e conhecia a simbologia matemática, frequentemente gostava de trabalhar em pares ou em grupos e necessitava da máquina de calcular, necessitando sempre de APA.

No mesmo questionário, referindo-se a si próprio, o Pedro considera que *raramente* gostava de Matemática, era bom aluno, realizava as tarefas autonomamente, gostava de participar oralmente, compreendia os enunciados e justificava os resultados; mas *por vezes* resolvia os exercícios no mesmo tempo que os colegas, fazia os trabalhos de casa e estudava com regularidade, escrevia facilmente expressões matemáticas e conhecia a simbologia matemática; sendo que gostava *sempre* de trabalhar em pares ou em grupos e necessitava *sempre* de APA e de máquina de calcular.

Em conversa informal, o professor de Matemática do 6.º ano referiu tratar-se de um aluno que era extremamente preguiçoso no que aos estudos dizia respeito, para além de ter, efetivamente muitas dificuldades na disciplina de Matemática.

O Pedro, também em entrevista informal, reconhecer não gostar muito de Matemática e ter muitas dificuldades, daí, trabalhar pouco para a disciplina, preferindo dedicar-se a disciplinas da área das Letras.

Salienta-se que, embora irrelevante para a investigação, dos três alunos observados, dois eram de origem estrangeira, tendo vivido nos seus países de origem até perderem a visão e pertenciam a famílias monoparentais, vivendo apenas com a mãe.

5.3 - Recolha e análise de dados

5.3.1 – Procedimentos e instrumentos de recolha de dados

Existindo uma tendência para um foco na observação e na participação em detrimento de anotações e registos, e sabendo que tirar anotações, manter registos e criar ficheiros de dados fazem parte dos aspetos mais importantes da observação participante[242], a recolha sistemática de dados é realizada ao longo de toda a temática sobre Álgebra referente ao 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Deste modo, a recolha de dados foi sendo realizada pelo investigador ao longo de três anos letivos, em diversos contextos:

Num primeiro momento:

- Leitura do PEI;
- Realização de um questionário e entrevistas informais aos docentes dos alunos no ano transato;
- Toma de notas das informações facultadas pelo Departamento de Educação Especial em Conselho de Turma;
- Realização de um questionário e entrevistas informais aos alunos;
- Preenchimento de um questionário.

[242] Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation*. Newbury Park: Sage.

Num segundo momento:

- Em sala de aula, de modo a observar os comportamentos e o desempenho dos alunos em contexto turma;
- Em APA e apoios individualizados, de modo a observar os comportamentos e o desempenho dos alunos quando acompanhados individualmente pelo docente;
- Em entrevistas individuais, definindo-se um contexto controlado, para análise do comportamento dos alunos sem influências externas.

Para a referida recolha, usaram-se as seguintes meios:

- questionários;
- entrevistas informais;
- observação direta e consequente toma de notas;
- registo áudio e subsequente transcrição das interações verbais estabelecidas entre os alunos observados, os colegas de turma e o professor;
- recolha, transcrição e cópia das produções escritas, fichas de trabalho e fichas de avaliação realizados pelos alunos observados

5.3.2 – Análise de dados

A análise de dados é considerada uma das fases mais importante da investigação, na medida em que permite ao investigador descrever, explicar, retirar conclusões do seu estudo e responder às questões formuladas inicialmente. Segundo Bogdan e Bilken[243], a análise de dados é um "*processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram*

[243] Bogdan, R., & Biklen, S. (1991). *Investigação qualitativa em educação*: *Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, p.205.

sendo acumulados, com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou."

A análise dos dados recolhidos neste trabalho investigativo assentou em várias etapas:

<u>1.ª Fase:</u>

Numa primeira fase, após a recolha dos questionários realizados pelos professores e pelos alunos relativamente à sua atitude e desempenho face aos estudos em geral e à matemática em particular e às entrevistas realizadas mo mesmo âmbito, procurou-se estabelecer a sua correlação.

Do relacionamento dos dados, resulta que no que respeita à Margarida a conceção que o professor tem da aluna e a conceção que esta tem de si mesma no são bastante semelhantes, considerando ambos tratar-se de nível bom. Relativamente ao Rafael, o aluno parece ter uma conceção mais positiva da sua atitude e do seu desempenho que o professor. Embora a maioria das divergências assinaladas não se constituam acentuadas, pode considerar-se que o professor vê no Rafael um aluno de nível médio e este se situe a si mesmo num nível médio-alto. Quanto ao Pedro, verifica-se que a análise de ambos é de que se trata de um aluno de nível médio-baixo, sendo que o aluno tem uma visão substancialmente mais positiva de si mesmo que o professor.

Seguidamente, procedeu-se ao confronto destes dados com os dados recolhidos nas entrevistas informais, nos PEI e através do Departamento de Educação Especial aquando dos primeiros Conselhos de Turma, constatando-se que, efetivamente, a Margarida é considerada uma boa aluna, com margem de progresso e que necessita de trabalhar com mais regularidade, o que, aparentemente, esta não reconhece como sendo uma limitação. No caso do Rafael, sobressai o facto de ser comum a ideia de que se trata de um aluno mediano, mas com margem de progresso. Salienta-se ainda a constante referência a dificuldades externas ao ensino-aprendizagem em si, mas que sobre este têm efeito. Finalmente, no que concerne ao Pedro, resulta da comparação de dados a ideia generalizada de que se trata de um aluno com dificuldades que necessita de apoio.

Esta primeira etapa constituiu o ponto de partida para o delinear de uma primeira abordagem no que ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática diz respeito, a qual se constitui como fonte de dados que, analisados, originaram novas abordagens e assim sucessivamente, num processo de análise sistemático.

<u>2.ª Fase:</u>

Ao longo de todo 3.º Ciclo do Ensino Básico destes alunos, procedeu-se à organização das produções escritas por eles realizadas, inicialmente pela data de realização e, posteriormente, por temática. De seguida, procedeu-se à transcrição integral para negro das referidas produções escritas.

Além disso, foram organizados e transcritos, do mesmo modo, os documentos áudio resultantes dos momentos de interação verbal decorridos em contexto de sala de aula e em contexto de entrevistas individuais.

Seguidamente, as transcrições dos documentos áudio foram anexadas à resolução das atividades em que as interações verbais decorreram e, a estas, foram anexadas as notas tomadas aquando da observação direta.

Este processo de organização sistemático dos dados recolhidos teve com o objetivo a sua melhor compreensão e interpretação pois, tal como defendido por Bogdan e Biklen[244], este processo tem como finalidade aumentar a própria compreensão dos dados por parte do investigador, de modo a que este possa apresentar aos outros o que encontrou.

[244] Ibidem.

Com os dados devidamente organizados, procedeu-se à sua análise, na busca de padrões e/ ou de aspetos relevantes para o processo de ensino-aprendizagem destes alunos e que pudessem ser, também, trabalhados no âmbito da presente investigação. Nesta fase, procurou-se identificar os processos de raciocínio utilizados na resolução de cada atividade exploratória, bem como o que os influência e as reações que despertam, as representações usadas e os processos de significação envolvidos.

Finalmente, comparou-se os resultados observados com os dados apresentados pelo próprio investigador/ professor relativamente ao comportamento e à aprendizagem dos seus alunos e com a perspetiva dos próprios alunos sobre o assunto, também apresentada através da resposta a um questionário.

Assim sendo, esta fase da análise de dados inclui "*o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros*"[245].

Para apresentação dos resultados da investigação, optou-se, então, por, dos dados recolhidos ao longo de três anos letivos, se selecionarem aqueles cujas temáticas fossem coincidentes com as temáticas em estudo e, posteriormente, cujos dados fornecidos melhor se adequassem a responder às questões a que a presente investigação se propõe a dar resposta.

Por último, procede-se à descrição dos resultados e das considerações alcançados nesta investigação.

[245] Ibidem p.205

TRABALHO DE CAMPO

CAPÍTULO VI – ESTRATÉGIAS DE ENSINO DE SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES

6 – Unidade de ensino - Sequências e Regularidades

6.1 – Introdução

O desenvolvimento do trabalho com sequências, sejam elas com figuras, números ou outro tipo de objetos, conduz de uma forma natural ao estudo de regularidades. Este tipo de trabalho constitui um fio condutor para fomentar o pensamento sobre variáveis e funções, permitindo aos alunos desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações, um aspeto fundamental do raciocínio matemático. Além disso, favorece o desenvolvimento da capacidade de fazer representações, quer através de diagramas e esquemas, quer usando a linguagem algébrica.

Eis algumas ideias matemáticas importantes a ter em atenção no trabalho com sequências, tal como referido por Ponte et al[246] :

- *Uma generalização acerca de uma sequência pode ser representada usando palavras ou expressões algébricas;*
- *Para chegar a uma generalização são por vezes muito úteis outras representações, tais como tabelas e gráficos;*
- *As estratégias usadas na resolução de questões envolvendo sequências podem ser "locais", indicando como passar de um termo para o termo seguinte, processo recursivo, ou "globais", estabelecendo uma relação de natureza geral que*

[246] Ponte, J.P.; Matos, A.; Branco, N.(2009) – *Sequências e Funções: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.ºano*.MEC.DGIDC, p.4

descreve toda a regularidade, relação essa que pode ser representada por palavras ou por uma expressão algébrica denominado termo geral;

- *Nas sequências numéricas cujo termo geral é do tipo* $an+b$ *com* $a \neq \mathbf{0}$, *a diferença entre termos consecutivos é constante;*
- *Duas expressões algébricas podem ser equivalentes e, muitas vezes, existe a possibilidade de simplificar uma expressão algébrica.*

Salienta-se que as questões envolvendo sequências que são apresentadas aos alunos podem aparecer de diversas formas. Assim, algumas questões referem-se a sequências que têm uma lei de formação explícita no respetivo enunciado; noutras questões, a lei de formação está implícita, mas é inequívoca pelas condições dadas; noutras, ainda, em que são dados alguns termos, pode existir uma grande variedade de leis de formação. Nestes casos, não se pode solicitar aos alunos que indiquem *a* lei de formação, mas apenas *uma* lei de formação compatível com os termos dados.

Assim sendo, esta unidade temática exige do professor uma seleção cuidada e criteriosa dos exemplos e atividades a apresentar ao aluno, uma vez que nem todos os exemplos apresentados no livro de texto são acessíveis à compreensão, em termos táteis, pelo que se deve evitar, por exemplo, a exploração de atividades que envolvam cores, pois levaria à obrigatoriedade de descrição das respetivas cores, o que, em termos de grafia braille, seria demasiado complexo.

6.2 – Padrões e Regularidades no Programa de Matemática do Ensino Básico em Portugal

Os padrões constituem um tema transversal no ensino da Matemática no Ensino Básico nos diferentes níveis de escolaridade e articulam-se com os diversos conteúdos.

A leitura atenta do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB)[247], permite verificar a incidência do tema dos *Padrões e Regularidades*, este surge nas *Finalidades* do ensino da Matemática, nos *Objetivos Gerais*, nos *Temas Matemáticos* e *Capacidades Transversais* e em todos os temas do currículo.

No mesmo documento, no que respeita às *Finalidades* e aos *Objetivos Gerais* do ensino da Matemática, faz-se menção a "*regularidades*" e a "*generalizações*", referenciando-se que a matemática se constituiu como "*domínio autónomo ao estudo dos números e operações, das formas geométricas, das estruturas e regularidades, da variação, do acaso e da incerteza*"[248].

Ainda no PMEB, relativamente aos *Objetivos Gerais* do ensino da Matemática, defende-se que os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente, isto é, entre outros aspetos, devem ser capazes de "*reconhecer e apresentar generalizações matemáticas e exemplos e contraexemplos de uma afirmação e explorar regularidades e formular e investigar conjeturas matemáticas*"[249].

No que concerne aos *Temas Matemáticos* e *Capacidades Transversais*, o PMEB menciona as sequências como sendo essenciais ao desenvolvimento das primeiras ideias algébricas dos alunos.

Na unidade temática, *Números e Operações*, no 1.º Ciclo do Ensino Básico, faz-se alusão aos termos "*padrões*", "*regularidades*", "*sequências*", "*regra*", "*lei de formação e sucessões*".

Ainda nesta unidade temática, mas já no 2.º Ciclo, surgem referências nas *Indicações Metodológicas*, onde se sustenta que "*o trabalho com sequências numéricas em que se pede ao aluno que continue ou invente sequências de números estabelece uma ponte conceptual importante entre os três ciclos de ensino básico*"[250] e ainda que "a

[247] ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf).
[248] Ibidem, p.2.
[249] Ibidem, p.5.
[250] Ibidem, p.32

calculadora e o computador permitem experiências com números e regularidades numéricas"[251] .

Nos *Tópicos* e *Objetivos Específicos* relativos ao conteúdo *Potências de Base e Expoente Natural*, é sugerido pelo documento orientador o estudo de regularidades com potências, por exemplo, regularidades do algarismo das unidades de potências com a mesma base e expoentes diferentes.

No 3.º ciclo do Ensino Básico, os padrões e as regularidades assumem um papel preponderante a nível do estudo dos *Números e Operações* e da *Álgebra*. Neste nível, a abordagem dos padrões é enfatizada em particular no estudo dos *Números Reais,* onde um dos objetivos específicos é resolver problemas e investigar regularidades envolvendo números racionais e reais. As *Indicações Metodológicas* apontadas para este tema também são explícitas sobre a importância da investigação de regularidades numéricas.

Na unidade temática *Geometria e Medida* no 1.º Ciclo do Ensino Básico, o PMEB sugere também explicitamente referências a padrão, sequência, frisos, pavimentações e configurações. Apresenta-se como exemplo, aquando *das Indicações Metodológicas*, a necessidade de observar trabalhos de arte decorativa (azulejos, bordados e tapetes), o que pode entusiasmar os alunos a explorarem aspetos relacionados com simetrias e pavimentações e a aperceberem-se da beleza visual que a matemática pode proporcionar.

Ainda neste tema, mas ao nível do 2.º Ciclo do Ensino Básico, foram também detetadas referências aos padrões, por exemplo, através dos termos "*padrões geométricos*" e "*frisos*". A referência aos padrões geométricos surge pela primeira vez apesar de, na articulação com o 1.º Ciclo do Ensino Básico, se referir este tipo de padrão como sendo um meio de desenvolver nos alunos, já desde o ciclo anterior, o pensamento algébrico. Espera-se que este Ciclo possa contribuir para que os alunos ampliem e aprofundem esse trabalho explorando padrões, determinando termos de

[251] Ibidem, p.33

uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos e ainda que as isometrias, que começam a ser abordadas no 1.º Ciclo e utilizadas no estudo dos frisos, são aprofundadas no 2.º Ciclo, especialmente a reflexão e rotação.

Nos *Objetivos Gerais* de aprendizagem sobre este tema refere-se que os alunos devem ser capazes de "*analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria*"[252] e também nos *Objetivos Específicos* do tópico *Reflexão, Rotação e Translação* se refere a importância de "*identificar as simetrias de frisos e rosáceas*" e de se "*construir frisos e rosáceas*"[253].

Como se pode verificar através de uma leitura do documento, um dos aspetos de maior relevo deste PMEB face aos anteriores é o de olhar a Álgebra como forma de pensamento matemático em todos os Ciclos do Ensino Básico.

Todavia, a Álgebra só aparece como tema individualizado no 2.º Ciclo, onde se referem padrões geométricos, sequências, regularidades e lei de formação. Ao longo de todo o tema, são feitas referências explícitas aos padrões, como se exemplifica no tópico Sequências e Regularidades[254]:

- *Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas.*

- *Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.*
- *Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação.*
- *Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando linguagem natural ou simbólica."*

[252] ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf), p.36.
[253] Ibidem, p.38.
[254] Ibidem, p.41.

No 3.º Ciclo do Ensino Básico, ainda no mesmo tema, é dado um grande destaque aos padrões. Nas *Indicações Metodológicas* pode verificar-se não só este aspeto, mas também a importância deste trabalho em ciclos de escolaridade anteriores: "*Neste ciclo retoma-se a investigação de sequências e regularidades, já realizada nos ciclos anteriores, com vista a aprofundar o estudo de relações algébricas e sua simbolização, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica*"[255].

Assim sendo, trata-se de objetivos gerais a desenvolver em todo o Ensino Básico o que, do ponto de vista de um Programa, constitui um claro reconhecimento da importância da abordagem dos padrões.

Finalmente, na *Organização e Tratamento de Dados*, no 1º Ciclo do Ensino Básico, refere-se a palavra "regularidade" nas *Indicações Metodológicas,* quando são referidos conceitos específicos: *"A realização de várias experiências, incluindo o registo apropriado e a sua interpretação, permite aos alunos concluírem que, embora o resultado em cada realização da experiência dependa do acaso, existe uma certa regularidade ao fim de muitas realizações da experiência"*[256]:

Ainda neste tema, mas já no 2.º Ciclo do Ensino Básico, são feitas referências aos padrões pela necessidade de explorar regularidades de diferentes fenómenos. Defende-se, por exemplo, que os alunos devem realizar "*experiências aleatórias em que se explora a regularidade a longo termo*"[257].

No 3.º Ciclo do Ensino Básico, ao nível do *Raciocínio Matemático* e da *Comunicação Matemática*, o Programa é explícito no que se refere à importância da exploração de padrões para fomentar *Capacidades Transversais*. No que respeita ao *Raciocínio Matemático*, o Programa refere que o professor deve "*proporcionar situações em que os alunos raciocinem indutivamente, formulando conjeturas a partir de dados obtidos*

[255] Ibidem, p.55.
[256] Ibidem, p.27.
[257] Ibidem, p.43.

na exploração de regularidades, e dedutivamente, demonstrando essas conjeturas”[258], e em relação à *Comunicação Matemática* aponta para a necessidade de “*descrever regularidades, explicar e justificar conclusões e soluções usando linguagem natural e matemática, apresentar argumentos de modo conciso e matematicamente fundamentado, e avaliar a argumentação matemática*”[259] (por exemplo, de um colega, de um texto, do próprio professor).

A análise deste Programa permite que se encontrem referências aos “*padrões*” nos quatro temas em que o Programa está organizado, com especial relevo para o tema da *Álgebra e Geometria*, mas também nas *Capacidades Transversais* a desenvolver, em que no tópico da *Resolução de Problemas* se recomenda a apresentação de problemas que possam ser resolvidos por diferentes estratégias, em particular a identificação de regularidades. Estes exemplos constituem uma forma inequívoca de reconhecimento do papel das atividades envolvendo padrões para o desenvolvimento do raciocínio e comunicação matemática.

6.3 – Atividades matemáticas direcionadas ao aluno cego

O processo ensino-aprendizagem da Matemática estabelece uma em estreita relação com o tipo de atividade matemática que o professor propõe em contexto de sala de aula. Esse tipo de atividade, por sua vez, está estritamente ligado aos objetivos propostos para desenvolvimento de determinado conteúdo programático.

Se o professor tem como objetivo a memorização de regras ou propriedades de um dado conceito, este incidirá em atividades de resolução de exercícios. Salienta-se, neste âmbito, que a memorização é um dos aspetos muito utilizados pelo aluno cego, que memoriza, com relativa facilidade, a informação que lhe é transmitida verbalmente, pelo que o professor deverá explorar ao máximo esta capacidade e

[258] Ibidem, p.64.
[259] Ibidem, p.63.

fazer uso dela na resolução de problemas, na medida em que a resolução de um dado problema tem sempre como ponto de partida uma base teórica, e também fazer a ponte para a vertente prática.

Por último, há situações em que o objetivo do professor passa por que aluno desenvolva algum *savoir-faire*, isto é, ao ser confrontado com determinada situação, reflita sobre ela, elabore um raciocínio e apresente as conclusões do seu trabalho.

É neste sentido que Polya[260] (1995) formula a distinção entre "*exercício*" e "*resolução de problemas*". Um problema, para o autor, é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que possibilite a sua resolução momentânea; já um exercício é uma questão que pode ser resolvida pelo uso de um método já conhecido. Apesar da distinção, tanto nos exercícios, quanto nos problemas o enunciado aponta claramente o que é dado e o que é pedido. O mesmo não acontece numa investigação, em que é necessário compreender, conhecer, e encontrar soluções para determinados problemas, sem existência de uma fórmula prévia para a sua resolução, isto é sem um caminho pré-definido.

Para Ponte, Brocado e Oliveira[261] dedicam-se também a esta questão, afirmando:

"…*investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.*".

Ponte[262] defende que uma atividade apresenta quatro características básicas: o grau de dificuldade, a estrutura, o contexto referencial e o tempo necessário para a

---

[260] Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*. (Tradução de How to solve it, 1945). Rio de Janeiro: Interciência.
[261] Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, p.9.

resolução. Segundo o autor, ao conjugar as duas primeiras características - grau de dificuldade e estrutura, obtêm-se quatro tipos básicos de tarefa, que podemos observar na figura abaixo:

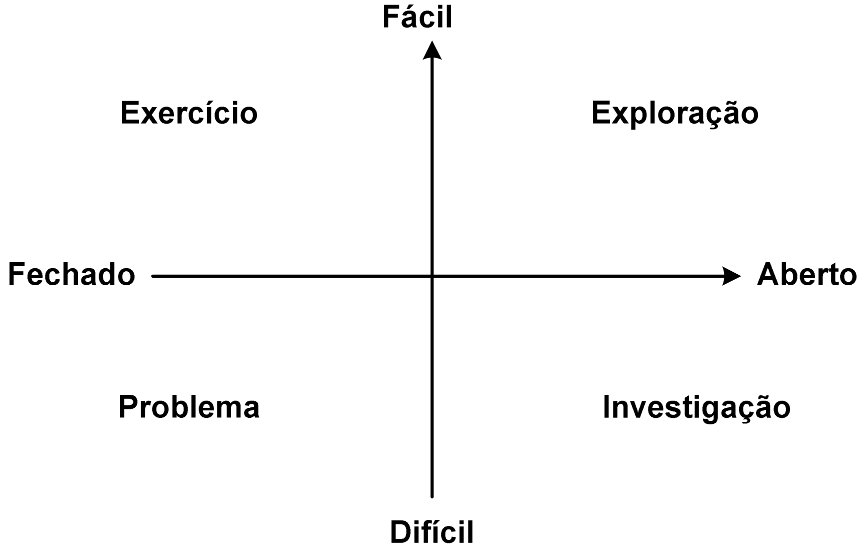


Figura 5- Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 17).

No mesmo texto, o autor considera que as explorações constituem atividades abertas, mas cujo grau de dificuldade se afigura menor do que investigações. Refere ainda que as primeiras tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, pelo que exigem menos tempo de trabalho. Já as investigações são, tal como as explorações, atividades abertas, mas cujo maior grau de dificuldade contribui para que os alunos desenvolvam várias alternativas de exploração e investigação. As atividades que envolvem exercícios e problemas, para o autor, estão categorizadas como tarefas de estrutura fechada, uma vez que sendo que os exercícios apresentam um grau de dificuldade fácil e os problemas um grau de dificuldade difícil. Além disso, a resolução de exercícios pode ser concretizada em menor tempo que a resolução de problemas.

[262] Ponte, J. P. (2005b). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular.* , pp. 11-34. Lisboa: APM.

Segundo Ponte et al.[263], as investigações matemáticas distinguem-se de todas as outras atividades por se tratarem de situações-problema. Desta forma, apresentam uma duração de realização muito superior e assentam em quatro momentos cruciais:

- *Exploração e formulação de questões investigativas;*
- *Organização de dados e construção de conjeturas;*
- *Realização de testes e refinamento e sistematização das conjeturas;*
- *Construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.*

A caracterização da atividade como uma estrutura aberta deve-se ao facto, de que o professor nem sempre consegue prever o resultado final da atividade. Para Ponte[264], nem sempre é muito clara a distinção entre tarefas investigativas e de exploração, pois o grau de dificuldade da tarefa não é inerente ao grupo de alunos que a desenvolverão.

As atividades selecionadas para a aprendizagem da temática *Sequências e Regularidades* apresentam uma estrutura aberta, contudo é difícil determinar o seu grau de complexidade. Pode considerar-se que apresentam características de atividades de exploração, quando consideradas de fácil resolução, e de investigação, quando consideradas com um maior grau de dificuldade.

Assim sendo, e considerando o referido Fernandes, Fiorentini e Cristovão[265], tais atividades assumem-se de grande potencialidade no desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, pelo que se podem designar de *exploratório-investigativa*s.

Dando cumprimento aos objetivos propostos para desenvolvimento das competências programáticas inerentes ao tema *Sequências e Regularidades,* referido no

[263] Ponte, J. P., Brocardo, J., e Oliveira, H. (2003). *Investigações no currículo*. Em J. P. Ponte, J. Brocardo e Oliveira, H. (Ed.), *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp.55-70). Belo Horizonte: Autêntica.
[264] Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85* , pp. 36-42.
[265] Fernandes, F.L.P.; Fiorentini, D.; Cristovão. E. M. *Investigações Matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos de 6a série* In: Fiorentini, D.; Cristovão, E.M. (Org.). *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, 2006, pp. 227-244.

subcapítulo *3.3.1*, e considerando o caráter exploratório e investigativo das atividades inerentes a esta temática, foram desenvolvidas, em sala de aula, diversas atividades, propostas pelos manuais escolares e também através de fichas de trabalho realizadas pera o efeito pelo professor.

De entre as atividades propostas aos alunos, as que se seguem constituem uma amostra de atividades desenvolvidas em contexto de sala de aula. O número e tipologia das atividades selecionadas prende-se com dois pressupostos: o de que os alunos cegos terão as mesmas capacidades que os restantes, quando eliminadas as barreiras inerentes à sua própria deficiência; e o de que se deve proceder à efetiva inclusão destes alunos, fazendo-os participar em todas as atividades, à semelhança dos restantes alunos da turma.

Assim, selecionaram-se atividades cujo grau de dificuldade se prende, por um lado, com o acesso à interpretação do próprio enunciado, apresentando-se, por isso, propostas de abordagem e/ ou reformulação dos mesmos; por outro lado, com a complexidade crescente do raciocínio inerente à resolução das atividades, pelo que se apresentam estratégias de abordagem das mesmas. As evidências apresentadas neste âmbito constituem um ponto de partida para a análise das dificuldades detetadas pelos alunos cegos e para uma reflexão que permita delinear estratégias para colmatar as referidas dificuldades. Salienta-se, neste ponto, que nem todas as dificuldades aqui referidas se cingiram aos alunos cegos, alvo do processo investigativo, tendo, com alguma frequência, sido comuns a parte dos restantes elementos da turma.

6.3.1 – Apresentação da Atividade I: *Masculino ou Feminino ou Casal?*

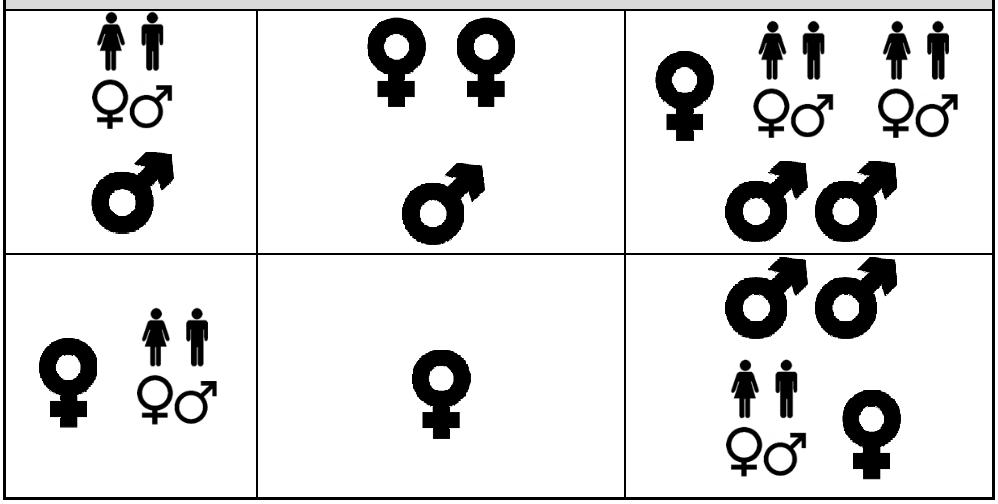
A atividade que se segue foi apresentada em sala de aula aos alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade, tendo a mesma sido apresentada aos alunos cegos da referida turma em suporte de relevo e apresenta-se uma estratégia de codificação.

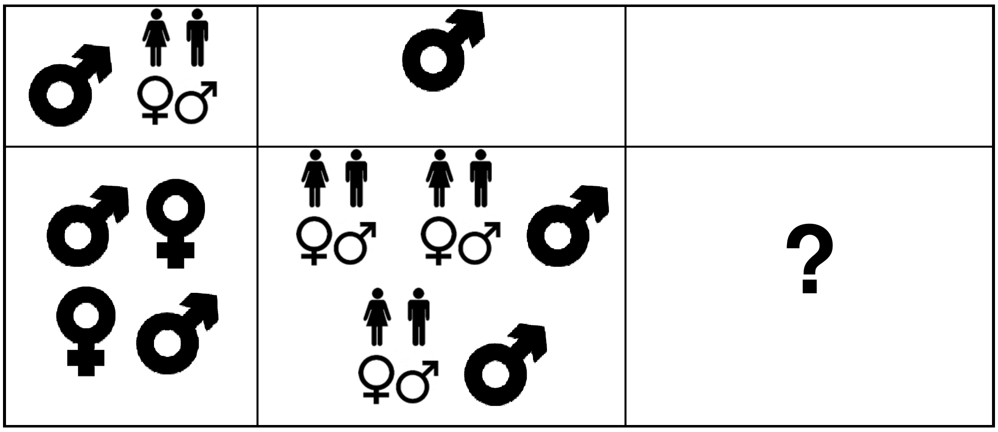
Pretende-se que os alunos encontrem um padrão ou uma regularidade da sequência pictórica.

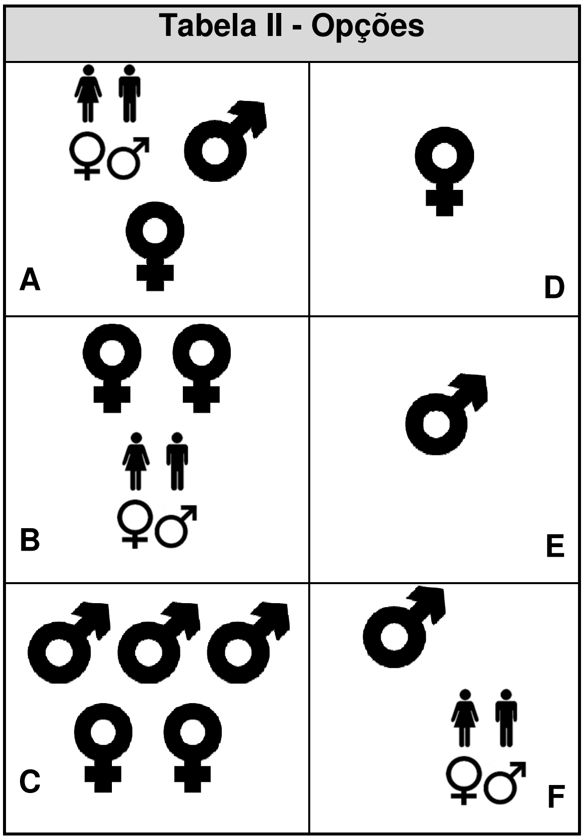
6.3.1.1 - Enunciado da Atividade I

Escolhe, na tabela II, a figura que te parece poder formar uma regularidade ou um padrão com as restantes da tabela I.

Tabela I







Legenda: - Masculino; - Feminino; - Casal.

6.3.1.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade I

Esta atividade estabelece um conjunto de situações onde se pode testar a capacidade de análise e o raciocínio dos alunos. A dificuldade das regularidades coexiste no facto de os alunos terem de descobrir uma metodologia que os conduza à solução, sendo que, nesta situação, podem encontrar essa regularidade observando em coluna ou em linha. Assim sendo, a solução passa por se observar que em cada linha existem três símbolos de casal, quatro símbolos de masculino e três símbolos de feminino. O desenho em falta, assinalado com um ponto de interrogação, será preenchido com um símbolo feminino, ou seja, a resposta correta será a opção **D**.

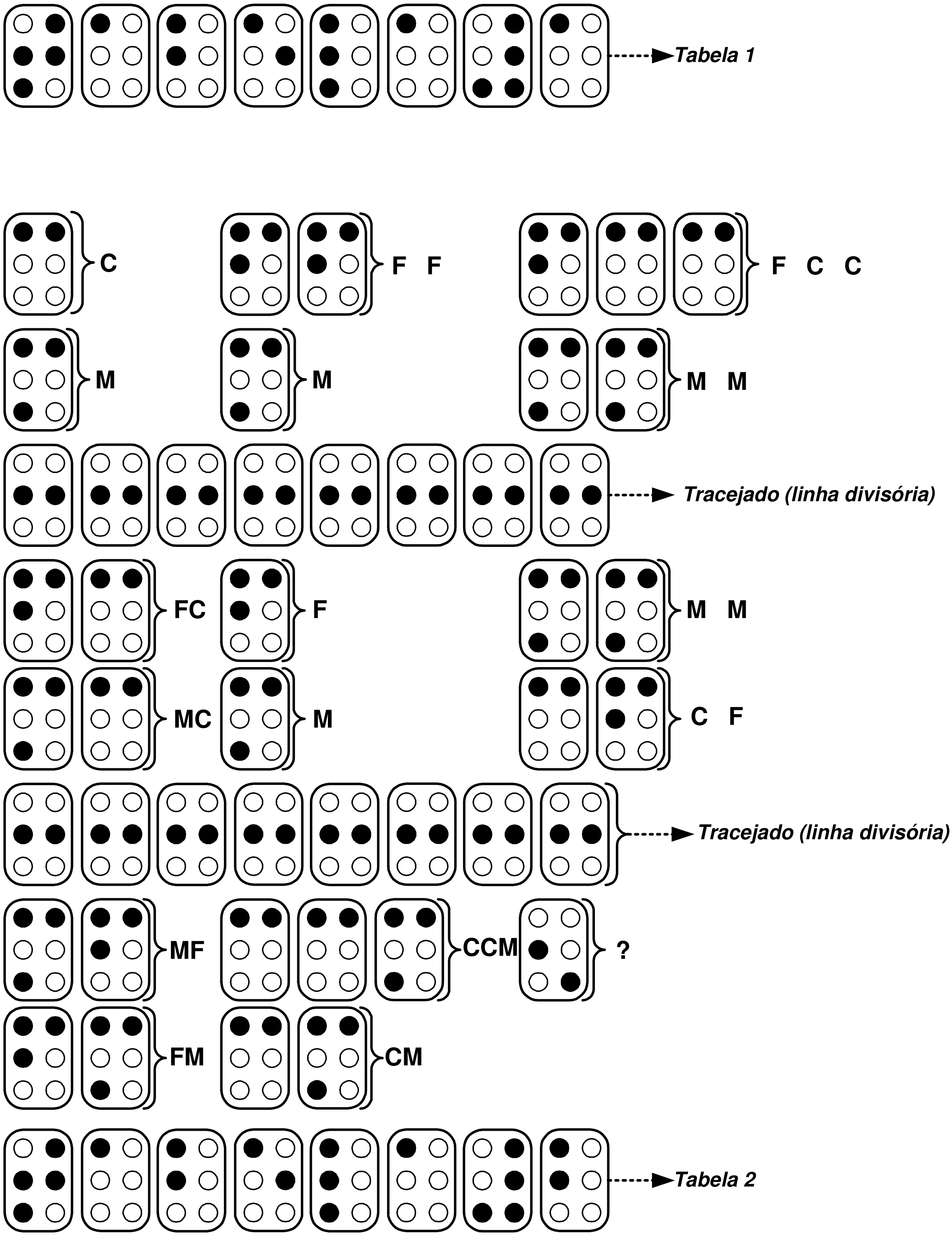
6.3.1.3 – Reformulação do enunciado da Atividade I

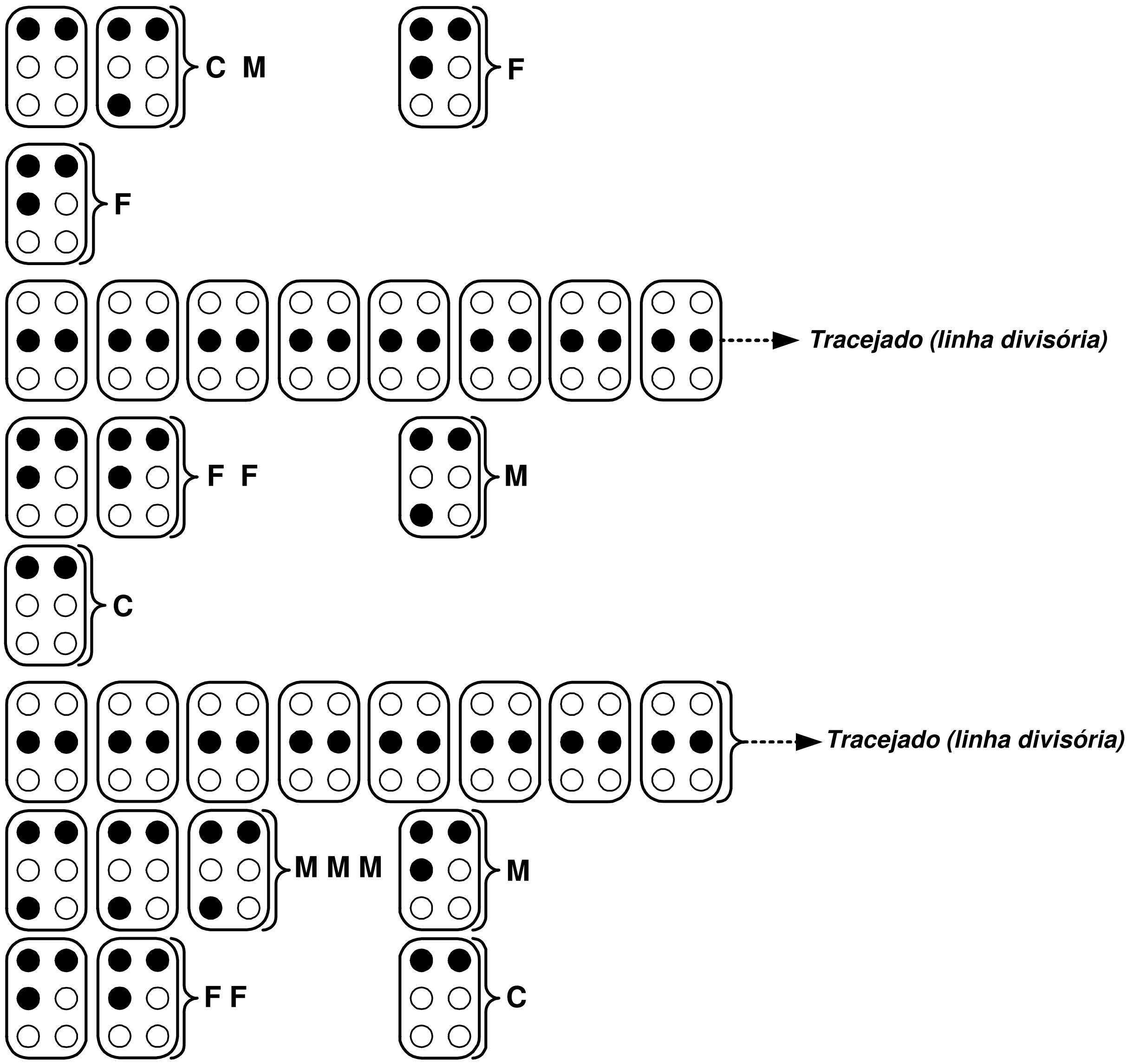
A atividade apresentada é uma atividade cujo grau de leitura não é muito acessível ao aluno invisual. Assim sendo, uma estratégia de apresentação do enunciado desta atividade a estes alunos poderá passar pela entrega de um relevo. Contudo, o recurso ao relevo poderá não ser suficiente para a compreensão do enunciado do problema, no caso em que os alunos revelem dificuldades ao nível sensorial e, consequentemente, ao nível da perceção das tabelas em questão.

Em situações desta natureza, apela-se à imaginação do professor na aplicação de uma estratégia, que pode começar por codificar os símbolos, dizendo que se está na presença de três símbolos diferentes; feminino, masculino e casal, e que se vai considerar apenas a primeira letra da descrição de cada símbolo, isto é, o F, M e C.

Com este exemplo de codificação, a leitura e a construção das tabelas ficam mais acessíveis ao aluno.

Na grafia Braille, as tabelas I e II assumirão a seguinte representação:





A negro, a representação da codificação a Braille assumirá a seguinte forma:

Tabela 1

c ff fcc

m m mm

:::::::::::::::::::

fc f mm

mc m cf
::::::::::::::::::
mf ccm ?
fm cm

Tabela 2
cm f
f
::::::::::::::::::
ff m
c
:::::::::::::::::::
mmm m
ff c

6.3.1.4 – Evidências

Tendo em conta a dificuldade manifestada pelos alunos na leitura/ interpretação da imagem da atividade 1 em relevo, foi necessário proceder, em sala de aula, à codificação da mesma. Nesta atividade, os alunos não evidenciaram ter utilizado qualquer estratégia de resolução, tendo-se limitado a, após escrita da imagem codificada, procurar um padrão através do tato, tendo resolvido a atividade num tempo similar ao tempo despendido pelos restantes alunos da turma, pelo que não existe qualquer evidência relevante a apresentar nesta atividade.

6.3.1.5 – Considerações

Partindo do pressuposto que os alunos invisuais têm a mesma capacidade cognitiva que os restantes, o professor deverá explorar atividades de fácil leitura, nunca baixando o seu grau de exigência de raciocínio e evitando, sempre que possível, tarefas compostas por imagens complexas e/ ou apresentando cores. A capacidade de improvisação e de codificação de enunciados torna-se indispensável a um docente que trabalhe num sistema de ensino inclusivo que contemple alunos cegos.

6.3.2 – Apresentação da Atividade II: *Padrões.*

Este tipo de sequência é muito usual em manuais escolares, fichas de trabalho, fichas de avaliação e até mesmo como questão de Exame Nacional. Pretende-se com esta atividade, determinar termos de uma sequência crescente e simultaneamente introduzir a noção de ordem de um termo.

6.3.2.1 - Enunciado da Atividade II

Determina os próximos dois termos na seguinte sequência: 3, 6, 12, 24, 48,…

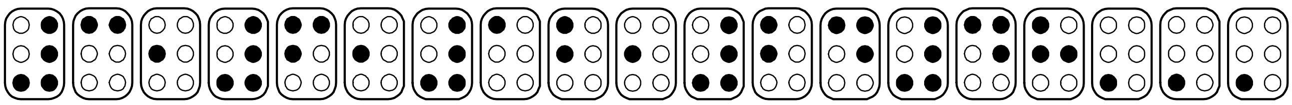
6.3.2.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade II

Para encontrar os próximos dois termos da sequência, basta observar-se que o termo seguinte é obtido multiplicando o termo anterior por 2, ou seja, o termo seguinte será o dobro do termo anterior e assim sucessivamente, logo neste caso os termos pretendidos serão os números 96 e 192.

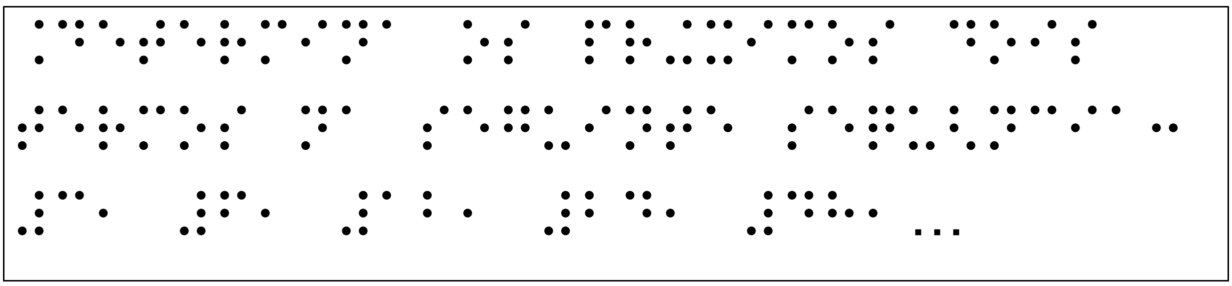
6.3.2.3 – Reformulação do enunciado da Atividade II

Esta atividade é de fácil leitura, não havendo necessidade de reformular o enunciado, basta apenas o aluno escrever sequencialmente os termos da sequência na sua máquina e raciocinar sobre ela.

Em braille, a sequência aparecerá da seguinte forma:

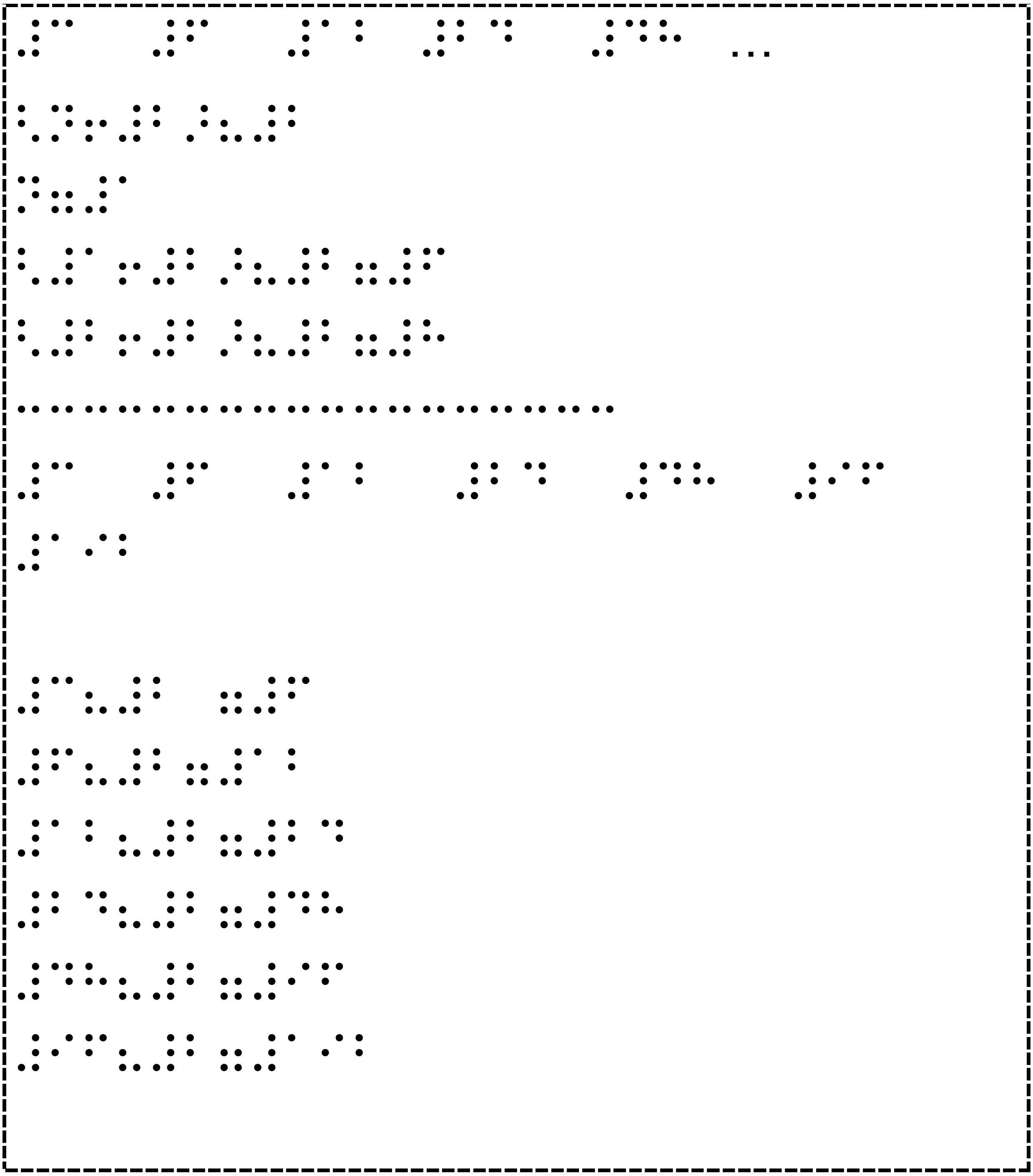


Em contexto real, o enunciado da atividade aparecerá da seguinte forma:



6.3.2.4 – Evidências

Margarida:



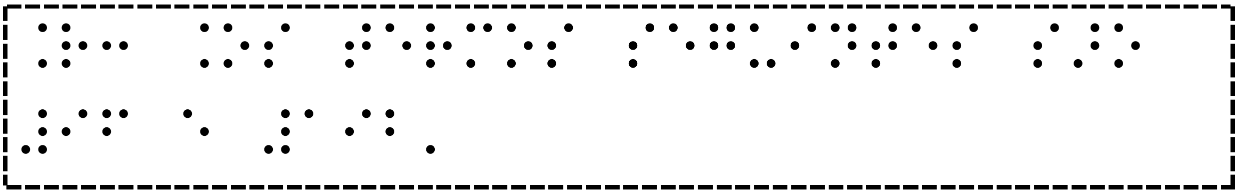


Figura 6: Resolução em Braille da atividade II da aluna Margarida

3 6 12 24 48 …

(n+2) x 2

n = 1

(1+2) x 2 = 6

(2+2) x 2 = 8

----

3 6 12 24 48 96 192

3 x 2 = 6

6 x 2 =12

12 x 2 =24

24 x 2 = 48

48 x 2 = 96

96 x 2 =192

R: Os termos seguintes são 96 e 192.

Figura 6A: Transcrição do extrato da resolução da atividade II da aluna Margarida

Pedro:

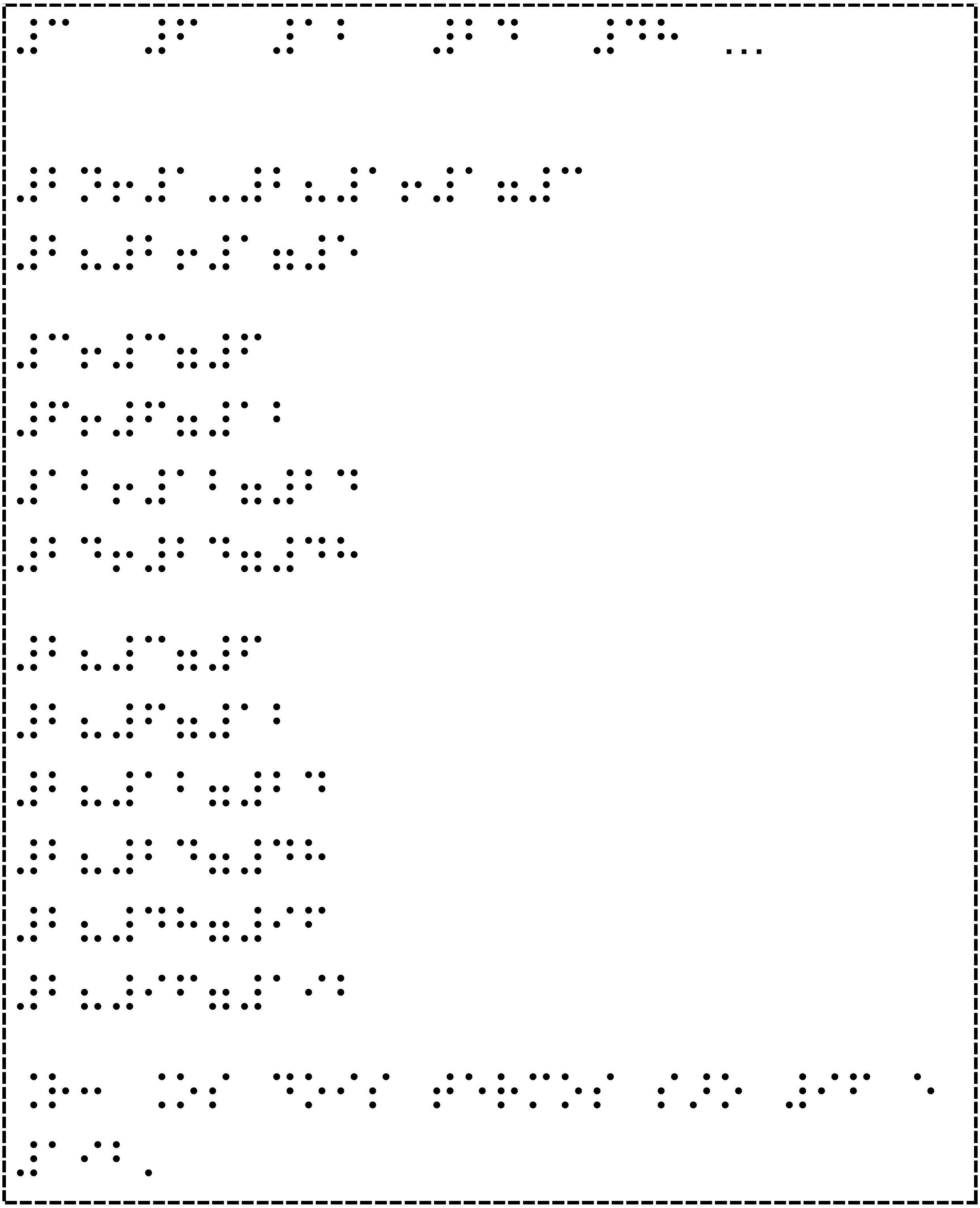


Figura 7: Resolução em Braille da atividade II do aluno Pedro

Pedro:

3 6 12 24 48 …

2n+1 – 2 x 1 + 1 = 3

2 x 2 + 1 = 5

3 + 3 = 6

6 + 6 = 12

12 + 12 = 24

24 + 24 = 48

2 x 3 = 6

2 x 6 = 12

2 x 12 = 24

2 x 24 = 48

2 x 48 = 96

2 x 96 = 192

R: Os dois termos são 96 e 192.

Figura 7A: Transcrição do extrato da resolução da atividade II do aluno Pedro

Rafael:

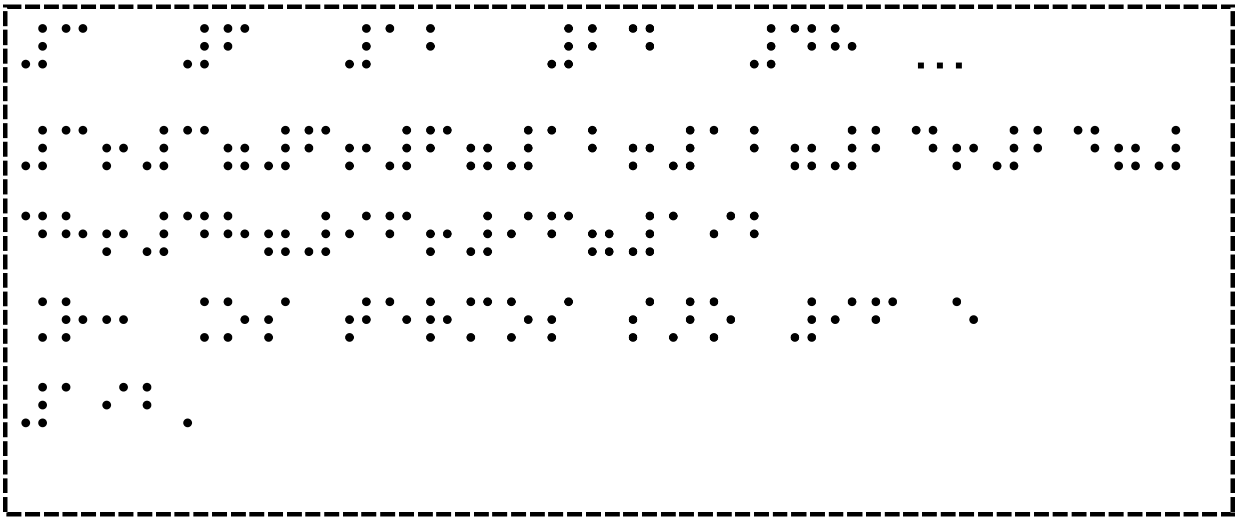


Figura 8: Resolução em Braille da atividade II do aluno Rafael

Rafael:

3 6 12 24 48 …

3 + 3 = 6 + 6 = 12 + 12 = 24 + 24 = 48 + 48 = 96 + 96 = 192

R: Os termos são 96 e 192.

Figura 8A: Transcrição do extrato da resolução da atividade II do aluno Rafael

6.3.2.5 – Considerações

Embora o enunciado não necessite de reformulação, faz todo o sentido de apresentá-la, como forma de exemplificar tipos de atividades em que o aluno cego, desde o momento inicial da atividade, se encontra em igualdade com os restantes elementos da turma, no que diz respeito ao tipo de exercício e ao tempo necessário para realização da mesma.

Os alunos revelaram compreender o conceito de termo e ordem de um termo.

A aluna Margarida e o aluno Pedro procuraram encontrar um termo geral da sequência, todavia sem êxito. É, no entanto, interessante observar que através do raciocínio desenvolvido na procura do termo geral, os alunos acabam por chegar à solução da atividade.

O aluno Rafael procurou encontrar uma regularidade na sequência, contudo o professor teve de o alertar para o facto de estar a explanar o seu raciocínio de forma incorreta no que diz respeito à escrita matemática, estando o aluno a dizer com a sua escrita que 6 = 12 = 24 = 48 = 96 = 102, o que constitui um erro de representação, comum nos alunos cegos. Salienta-se, neste âmbito, a já referida necessidade de conhecimento da escrita Braille por parte do professor, sem o qual este não poderá dar resposta atempada às dificuldades evidenciadas pelos alunos.

6.3.3 - Apresentação da Atividade III: *Igualdades numéricas*

Nesta atividade é apresentada uma sequência numérica envolvendo potências e pretende-se que o aluno encontre uma regularidade de forma a conseguir determinar o valor das duas potências seguintes.

A apresentação desta atividade permite dar a conhecer ao aluno a existência de diferentes tipos de sequências numéricas crescentes.

A atividade foi desenvolvida a pares, tendo os elementos dos pares sido selecionados pelos próprios alunos.

6.3.3.1 - Enunciado da Atividade III

Observa as igualdades seguintes:

$$4^2 = 16$$
$$34^2 = 1156$$
$$334^2 = 111\ 556$$

Indica, sem efetuares qualquer cálculo, o valor de 3334^2 e de $33\ 334^2$.

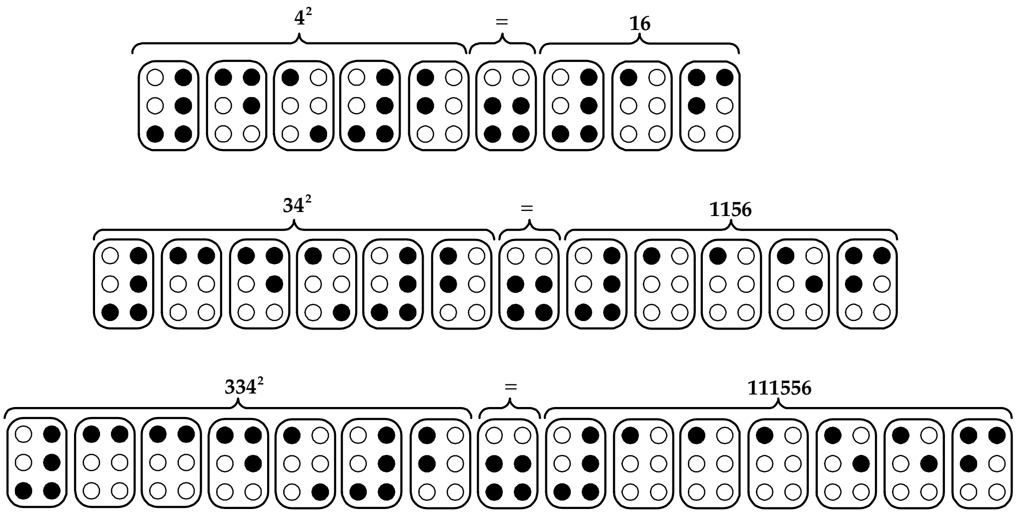
6.3.3.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade III

A solução desta atividade passa por se observar o que acontece da primeira para a segunda igualdade e constata-se que ao 16 da primeira igualdade acrescentou-se o 15 no meio, ficando nos extremos o 1 e o 6. Continuando a observação das igualdades verifica-se que da segunda para a terceira houve novamente um acréscimo do número 15 no meio da igualdade e assim sendo o valor de 3334^2 será 11115556 e o valor de $33\,334^2$ será 1111155556.

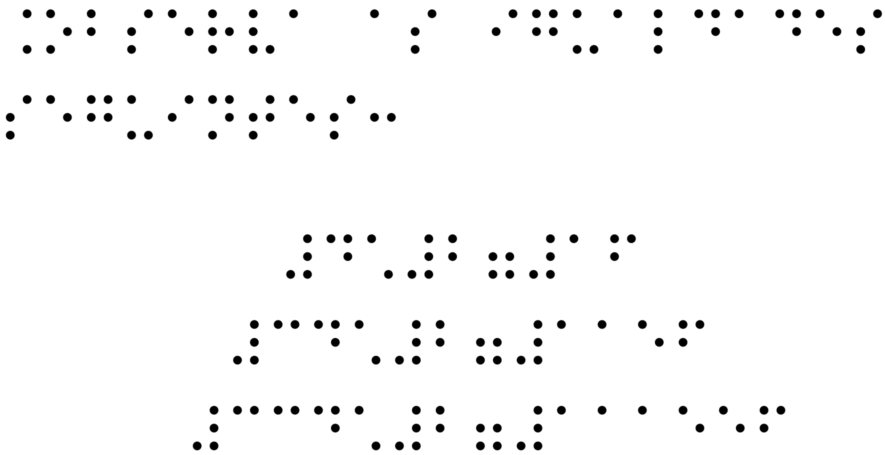
6.3.3.3 – Reformulação do enunciado da Atividade III

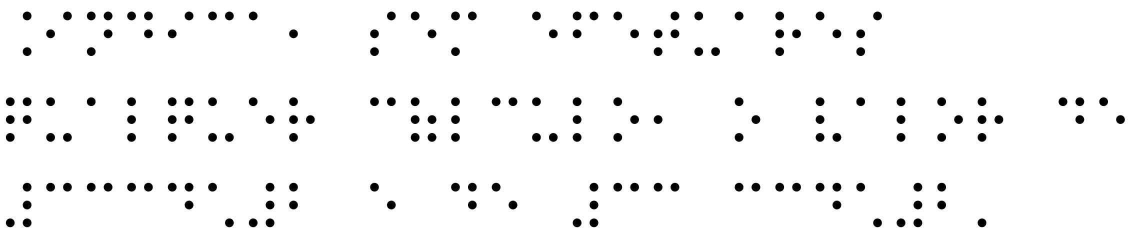
Esta atividade, tal como a anterior, também é de fácil perceção para o aluno, na medida em que o enunciado aborda apenas alguns números em forma de pirâmide, embora se considere um pouco mais complexa que a atividade anterior .

A sua representação a Braille será:



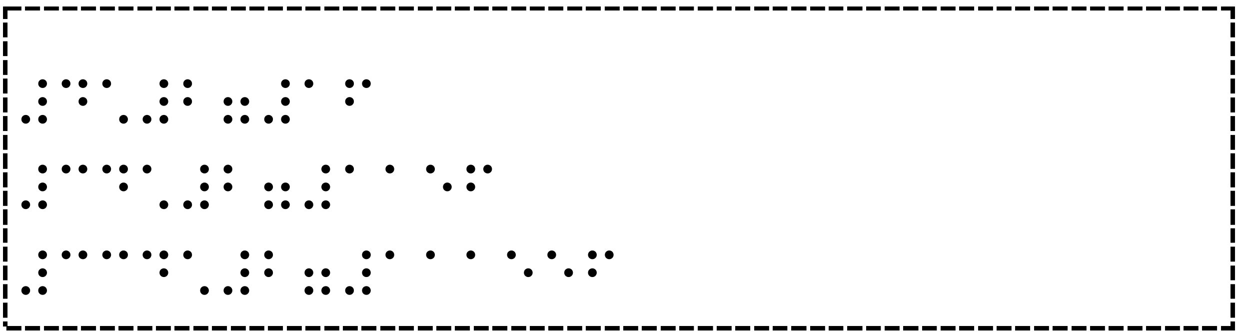
Em contexto real, o enunciado da atividade III aparecerá da seguinte forma:





6.3.3.4 – Evidências

Margarida:



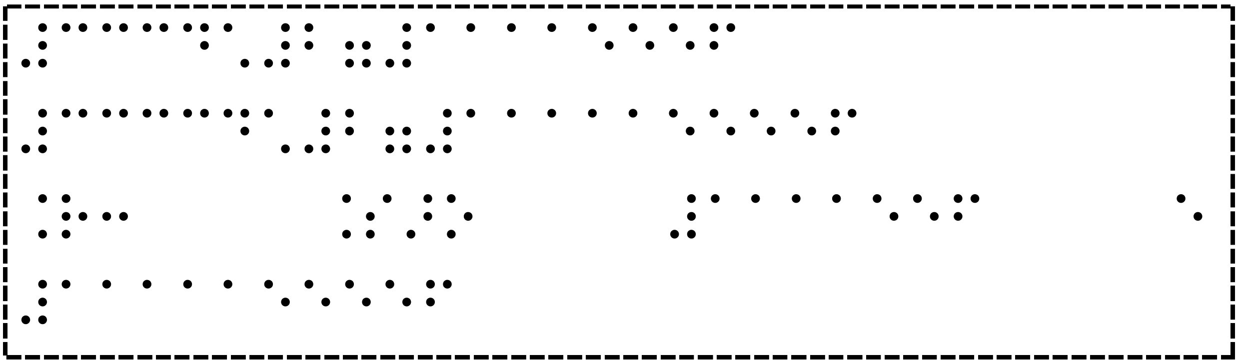


Figura 9: Resolução em Braille da atividade III da aluna Margarida

$4^2 = 16$

$34^2 = 1156$

$334^2 = 111556$

$3334^2 = 11115556$

$33334^2 = 1111155556$

R: São 11115556 e 1111155556

Figura 9A: Transcrição do extrato da resolução da atividade III da aluna Margarida

Rafael:

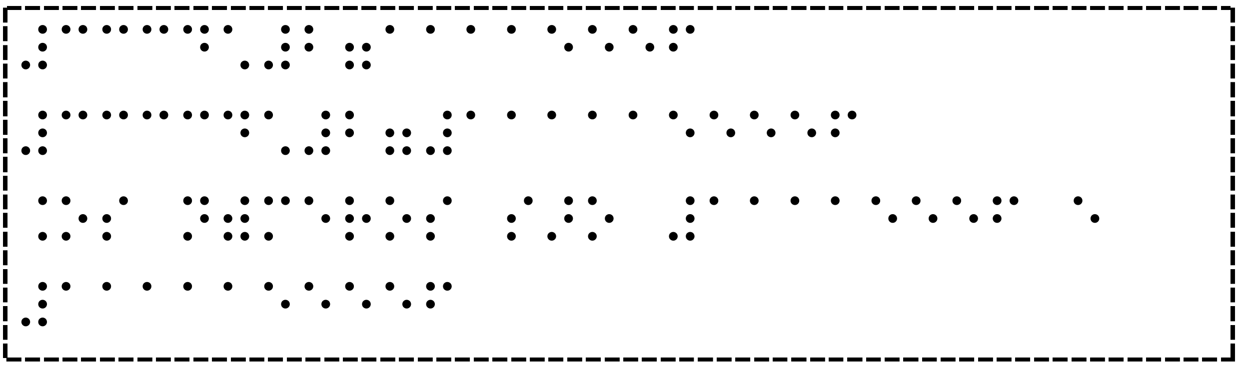


Figura 10: Resolução em Braille da atividade III do aluno Rafael

$3334^2 = 11115556$

$33334^2 = 1111155556$

Os números são 11115556 e 1111155556

Figura 10A: Transcrição do extrato da resolução da atividade III do aluno Rafael

6.3.3.5 – Considerações

Na resolução desta atividade, salienta-se que os alunos cegos foram todos selecionados como par de alunos normovisuais, o que se reveste de significação, se considerarmos a conceção que a restante turma tem dos seus colegas enquanto indivíduos com as mesmas capacidades. Salienta-se, ainda, a participação ativa de ambos os elementos dos pares e o facto de a ausência de material adequado, transcrição prévia a Braille da atividade, teria impossibilitado a sua concretização nos moldes em que aconteceu.

Os alunos Margarida e Rafael e os seus respetivos pares não manifestaram dificuldades na concretização da atividade. O mesmo já não aconteceu com o aluno Pedro e o seu par que não conseguiram realizar a atividade por não terem conseguido encontrar uma regularidade, embora tenham compreendido o seu enunciado. Todavia, todos manifestaram vontade em concretizá-la, tentando encontrar estratégias de resolução.

6.3.4 - Apresentação da Atividade IV: P*rocurar a lógica no som I*

A atividade que se segue é composta por uma sequência numérica crescente, cuja resolução passa pela audição, análise e identificação de um som comum produzido.

Tratando-se de uma atividade que recorre a um dos sentidos mais desenvolvidos pelos alunos cegos a par do tato, a sua resolução depende unicamente da capacidade de raciocínio matemático, anulando-se toda a distinção prévia existente entre aluno cego e aluno normovisual.

6.3.4.1 - Enunciado da Atividade IV

Encontra o termo seguinte da sequência sem fazeres cálculos. Só tens de as ler e encontrar uma lógica no seu som.

2	10	12	16	17	18	19	…

6.3.4.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade IV

Pretende-se com esta atividade dar a conhecer ao aluno o lado lúdico desta unidade temática, explorando-a como um jogo, sendo o vencedor o primeiro a descobrir a solução em causa. Assim sendo, aconselha-se que um dos alunos leia em voz baixa e que quem está a adivinhar apenas a ouça.

Em contexto de sala de aula, compete ao professor analisar a dinâmica da atividade, podendo ou não sugerir aos alunos que escrevam os números da sequência por extenso. Caso se observe que os alunos estão a explorar a atividade com algum dinamismo deverá ao máximo evitar tal sugestão.

A solução do problema passa, aquando da leitura, observar a escrita de todos os números da sequência iniciam-se com a letra "d", pelo que a seguir ao dezanove, o único número que começa por "d" é o duzentos.

Para uma melhor perceção da solução do problema, escreve-se os números da sequência por extenso:

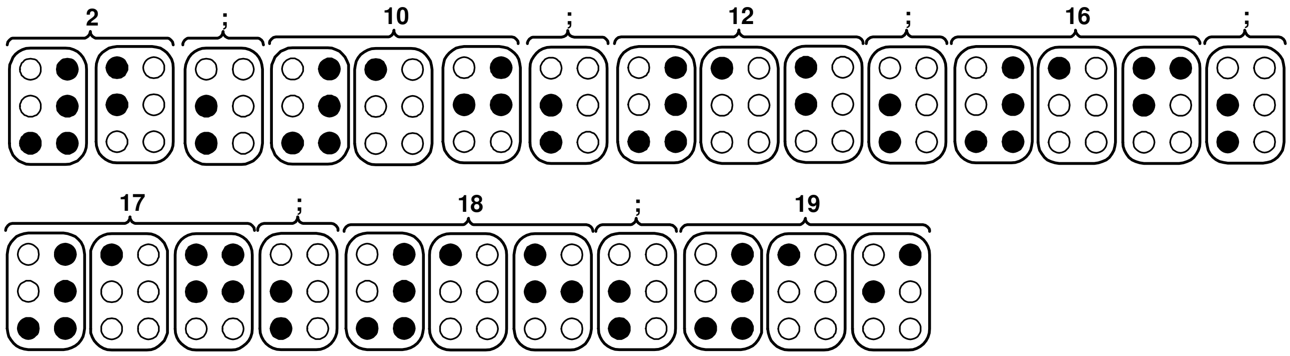
2 – **d**ois; 10 – **d**ez; 12 – **d**oze; 16 – **d**ezasseis; 17 – **d**ezassete; 18 – **d**ezoito;19 - **d**ezanove ; próximo número 200 – **d**uzentos.

Logo, a solução do problema será o número 200.

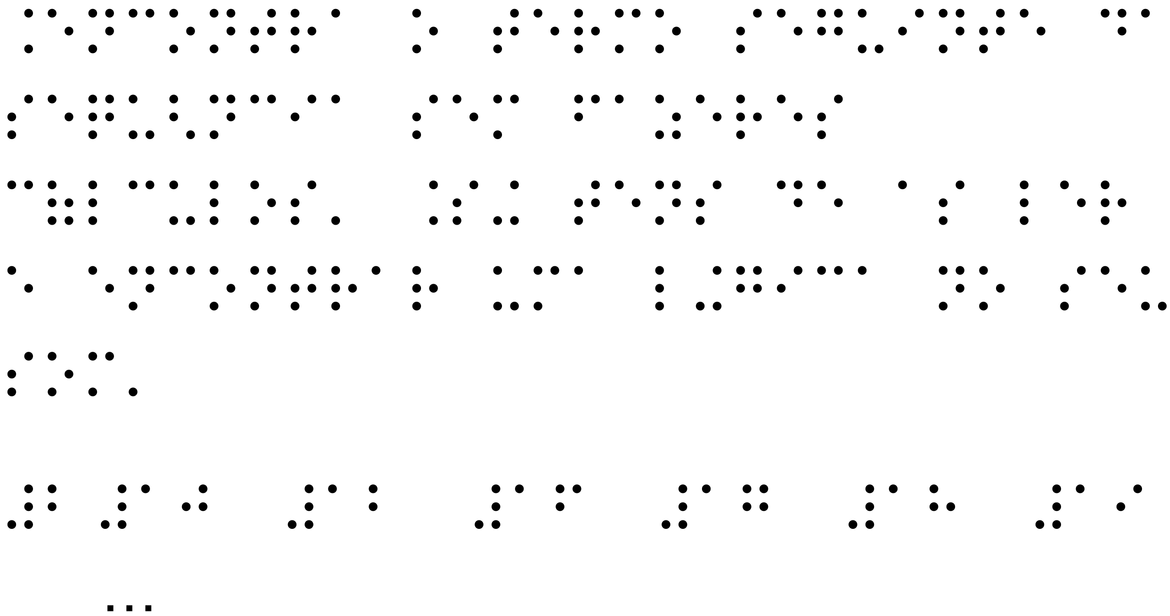
6.3.4.3 – Reformulação do enunciado da Atividade IV

Esta atividade torna-se de fácil leitura e compreensão para o aluno cego, necessitando apenas de escrever os números na sua folha e esboçar um raciocínio em busca da solução pretendida.

Em Braille a sequência ficará:



Em contexto real, o enunciado da atividade IV aparecerá da seguinte forma:



6.3.4.4 – Evidências

Margarida:

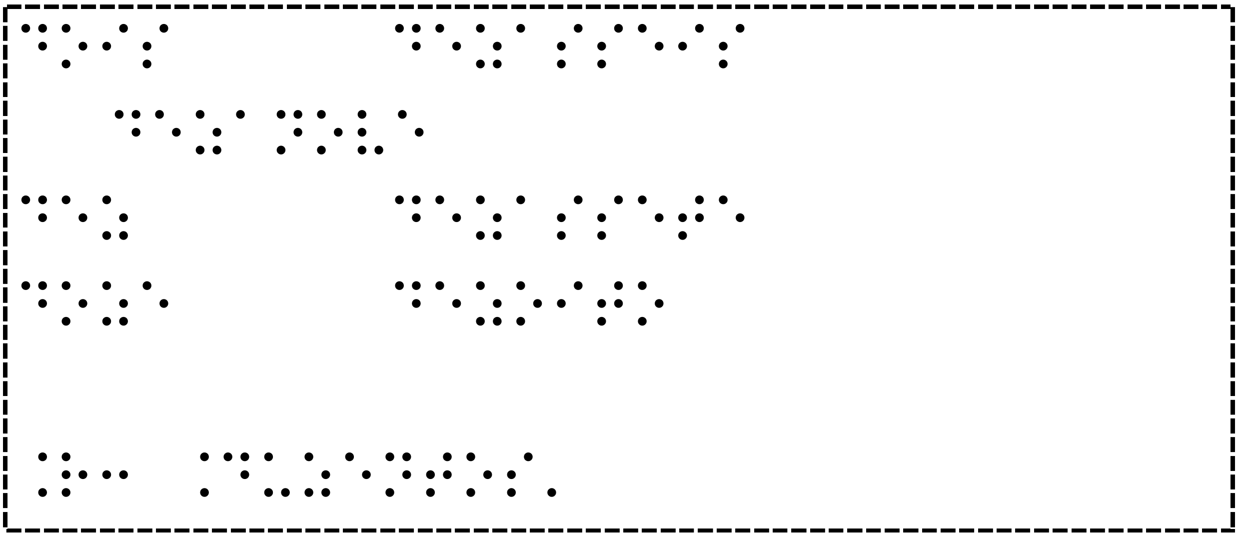


Figura 11: Resolução em Braille da atividade IV da aluna Margarida

dois	dezasseis	dezanove
dez	dezassete	
doze	dezoito	

R: Duzentos.

Figura 11A: Transcrição do extrato da resolução da atividade IV da aluna Margarida

Rafael:

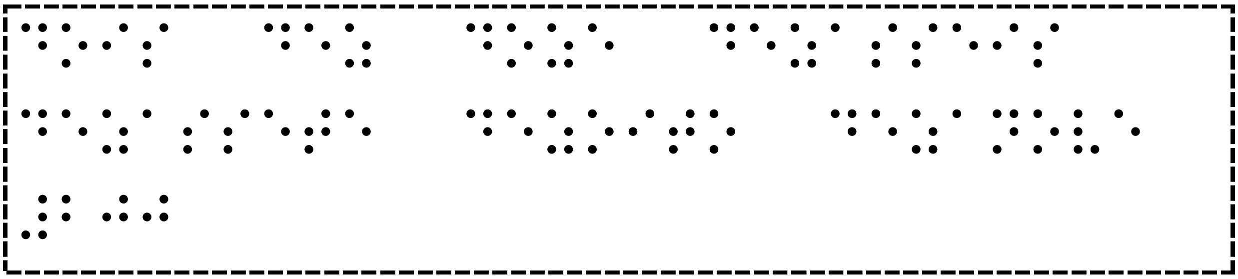


Figura 12: Resolução em Braille da atividade IV do aluno Rafael

dois dez doze dezasseis dezassete dezoito dezanove 200

Figura 12A: Transcrição do extrato da resolução da atividade IV do aluno Rafael

Após a descoberta da solução na turma, o professor que estava atento ao que os alunos escreviam e comunicavam entre eles, dirigiu-se ao aluno Pedro, tendo-o questionado relativamente ao facto de, apesar de estar a dialogar com o colega do lado, não ter escrito nada.

O aluno respondeu:

"- Andei à procura de uma lógica entre os números, como se fez nas atividades anteriores".

Professor*:* "- Mas percebeste a lógica?"

Pedro: "- Sim, agora faz sentido. Está bué engraçado! Há mais? A próxima é minha" (sorriu).

Professor*:* "Sentes que chegarias à solução com mais tempo?"

Pedro*: "*Para dizer a verdade, não sei!"

6.3.4.5 – Considerações

Esta atividade gerou um enorme entusiasmo por parte da turma. Todos os alunos se empenharam na sua resolução, tendo a solução correta sido apresentada por dois alunos cegos, Margarida e Rafael, embora o primeiro aluno a apresentar a solução oralmente, fruto do seu entusiasmo, tenha sido um aluno normovisual.

Esta atividade permitiu sentir a verdadeira inclusão no ensino, uma vez, que tendo como ponto de partida o enunciado de acesso comum, os alunos cegos evidenciaram a mesma capacidade de resolução que os restantes. Salienta-se, no entanto, as limitações inerentes às atividades de cariz mais lúdico, uma vez que o entusiasmo leva, com frequência, à apresentação oral de uma resposta, o que pode inibir os colegas que necessitem de acréscimo de tempo para a sua resolução. Sugere-se, então, que os alunos sejam alertados, no início deste tipo de atividade, para que a resposta deve ser, inicialmente, apresentada por escrito e o docente chamado a verificar a sua correção, de modo a permitir a todos o tempo adequado à sua resolução.

É de referir que não houve necessidade de sugerir aos alunos que escrevessem os números por extenso.

6.3.5 - Apresentação da Atividade V: *Procurar a lógica no som II*

Tendo em conta o sucesso da atividade IV, foram desenvolvidas inúmeras atividades desta natureza de entre as quais, a que se segue.

A resolução da atividade V, além de mobilizar a audição, análise e identificação de sons, apela também à capacidade de memorização.

6.3.5.1 - Enunciado da Atividade V

Encontra o termo seguinte da sequência sem fazeres cálculos. Só tens de as ler e encontrar uma lógica no seu som.

1									
1	1								
2	1								
1	2	1	1						
1	1	1	2	2	1				
3	1	2	2	1	1				
1	3	1	1	2	2	2	1		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

6.3.5.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade V

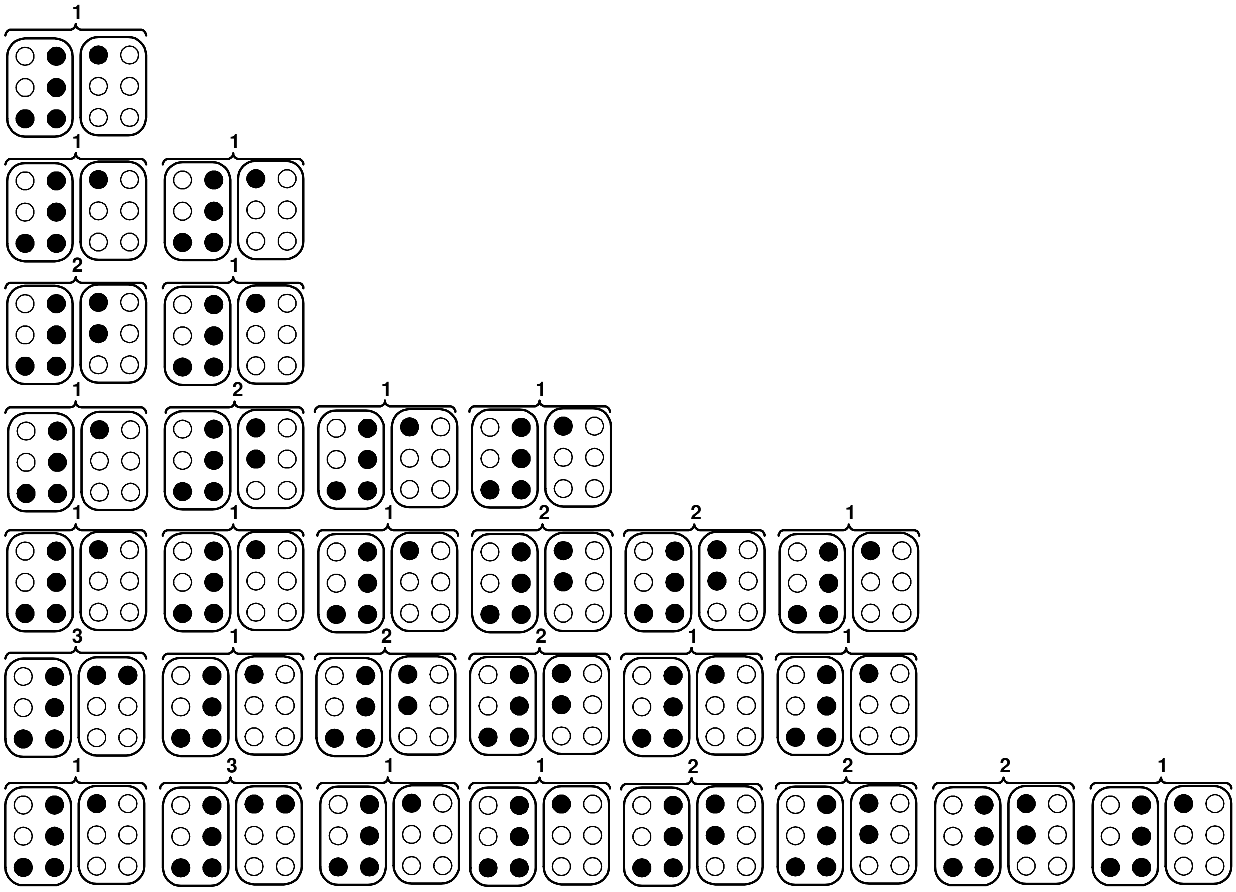
Esta atividade deverá também funcionar como um jogo, em que a regularidade deve ser lida em linha, uma vez que a linha seguinte resulta sempre da linha anterior, ou seja, fixado o número um na primeira linha, vamos lê-lo e temos "***um*** número ***um***", obtemos assim a segunda linha (**1** **1**). A linha seguinte é a leitura da linha anterior, assim sendo na terceira, vamos ler a segunda linha e temos "***dois*** números ***um***", resulta a terceira linha (**2** **1**). Para se obter a quarta linha lê-se a terceira linha e temos "***um*** número ***dois*** e ***um*** número ***um***", obtemos a quarta linha (**1** **2** **1** **1**) e assim sucessivamente.

Assim sendo a oitava linha, solução da sequência, será a obtida através da leitura da sétima linha tem-se então "***um*** número ***um***, ***um*** número ***três***, ***dois*** números ***um***, ***três*** números ***dois*** e ***um*** número ***um***" , obtendo assim a oitava linha desta regularidade (1 1 1 3 2 1 3 2 1 1).

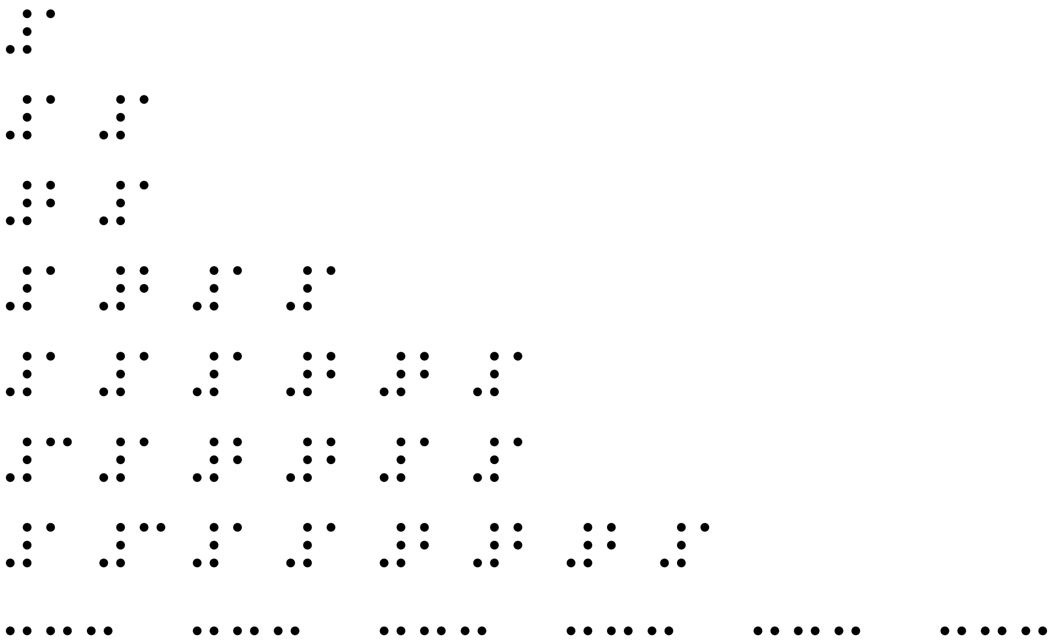
6.3.5.3 – Reformulação do enunciado da Atividade V

A leitura e a escrita desta atividade, em Braille, torna-se também muito acessível em termos de compreensão e leitura da sequência apresentada.

Em braille ficará:



Em contexto real, o enunciado da atividade V aparecerá da seguinte forma:



6.3.5.4 – Evidências

Nesta atividade, não se apresentam evidências, uma vez que nenhum aluno cego conseguiu resolvê-la e apenas um aluno da turma encontrou a solução. Tendo a participação na atividade sido bastante entusiástica, a transcrição do diálogo que se desenvolveu em sala de aula não se revestiria de interesse investigativo.

6.3.5.5 – Considerações

Este tipo de atividade desperta no aluno um enorme interesse e alguma competitividade com os outros colegas, pelo que a concretização deste modelo de atividades é essencial e, além disso, de fácil apresentação para o aluno na aprendizagem das sequências.

Tendo em conta que, como referido oportunamente, a ausência de visão leva a um maior desenvolvimento dos restantes sentidos e que os alunos cegos desenvolvem uma enorme capacidade de memorização, esta atividade tinha como objetivo o apelo à audição e à capacidade de memorização. Apesar de não ter cumprido o seu objetivo no que respeita à correta resolução da tarefa, salienta-se o entusiamo demonstrado pelos alunos e a tentativa dos alunos cegos em ajudar os restantes colegas da turma a formularem um raciocínio, cooperação que constitui, sem dúvida, um elemento fundamental quando falamos de inclusão.

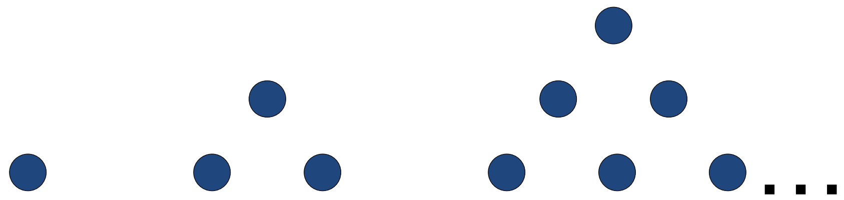
O professor, no final da concretização destas duas atividades, deverá chamar a atenção para o facto de serem apenas alguns exemplos dos muitos onde se podem observar regularidades, solicitando que individualmente arranjem uma regularidade para que os restantes elementos da turma descubram o seu padrão.

6.3.6 - Apresentação da Atividade VI: *O termo da sequência.*

Na atividade VI apresenta-se uma sequência pictórica crescente, na medida em que é composta por termos diferentes e a sua forma depende da sua ordem. Pretende-se que o aluno determine um termo de uma sequência pictórica e se familiarize a enunciados deste tipo, sejam eles apresentados, em relevo ou codificados pelo professor.

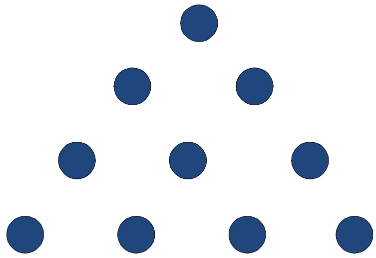
6.3.6.1 - Enunciado da Atividade VI

Determina o 4.º termo da sequência seguinte:



6.3.6.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade VI

O aluno perante o relevo fica com a perceção posicional dos círculos e visualiza a forma triangular que vão desenvolvendo em toda a sequência e chegará com facilidade à solução. Perceberá que o primeiro termo trata-se de um círculo apenas, no segundo está perante um triângulo em que a base é composta por dois círculos e um outro por cima gerando no terceiro vértice, no terceiro termo observa que a base foi aumentada de um círculo, composta agora por três círculos, dois círculos acima e ainda outro círculo acima destes dois, formando assim outro triângulo. A partir daqui e olhando os triângulos debaixo para cima, percebe-se que a sequência inicia-se com 1 círculo, o segundo termo apresenta 2 e 1 círculos e o terceiro termo é composto por 3, 2 e 1 círculos, então o quarto termo da sequência será composto por 4, 3, 2 e 1 círculos, ou seja, a solução será a seguinte:



6.3.6.3 – Reformulação do enunciado da Atividade VI

Neste tipo de atividade, embora seja possível codificar, será preferível apresentar o enunciado em relevo, devido essencialmente ao posicionamento dos círculos. A tendência inicial de um professor, quando confrontado com uma situação desta natureza, é descrevê-la, referido que os termos da sequência são compostos por círculos e que no seu conjunto vão formando triângulos. Tal não deve, contudo, acontecer sob pena de estar a facilitar a resolução da atividade ao aluno ou até mesmo a confundi-lo na compreensão do enunciado.

A melhor solução passará por se apresentar ao aluno um relevo onde esteja descrita toda a sequência.

6.3.6.4 – Evidências

Margarida:

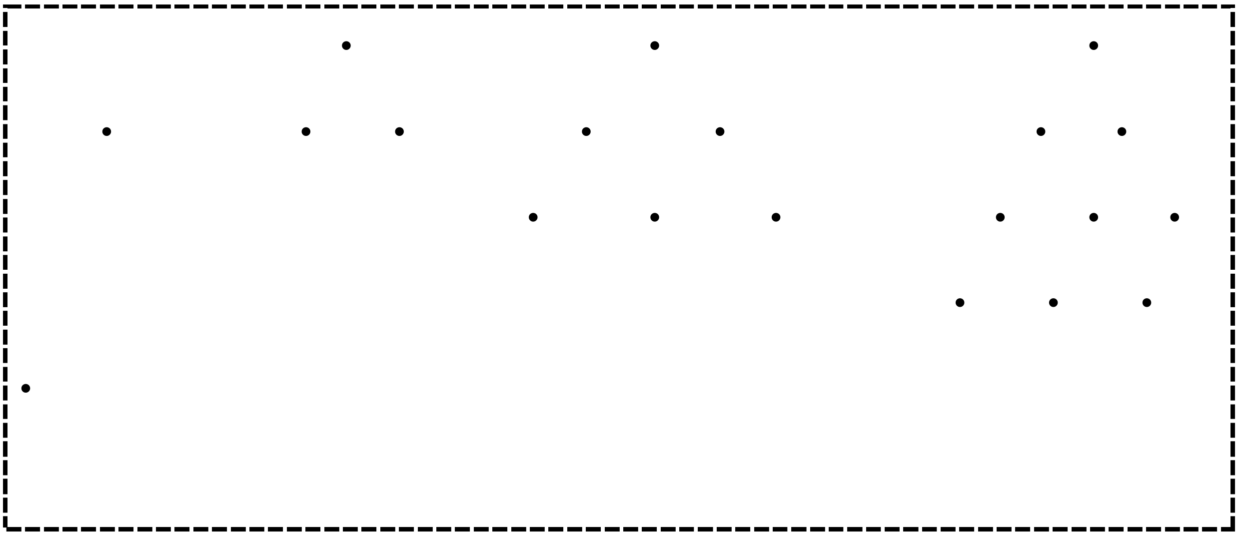


Figura 13: Resolução em Braille da atividade VI da aluna Margarida

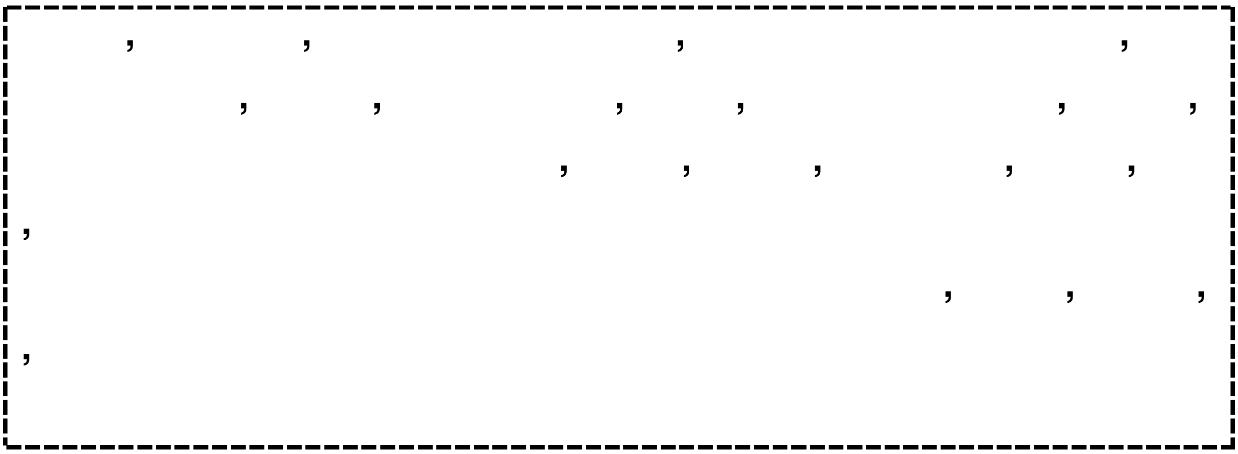


Figura 13A: Transcrição do extrato da resolução da atividade VI da aluna Margarida

Rafael:

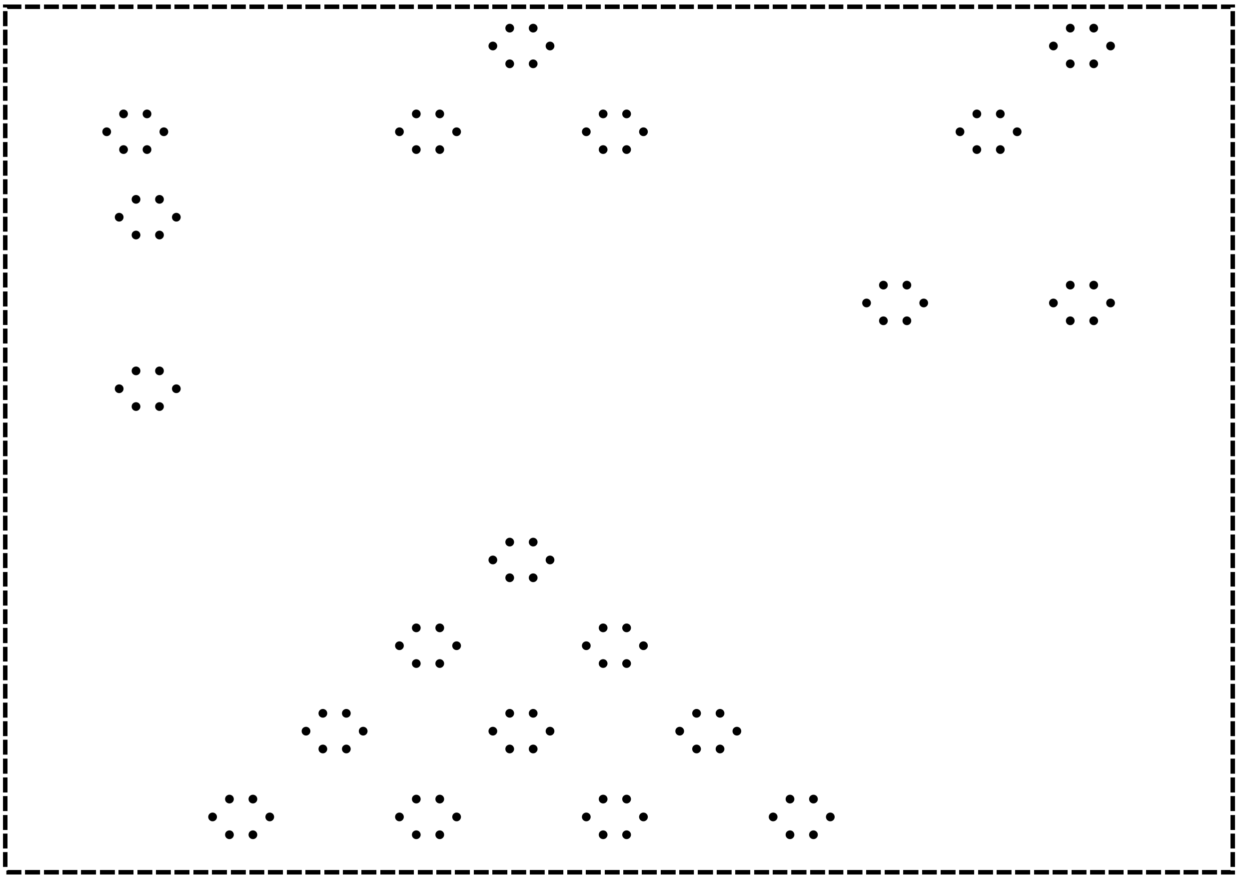


Figura 14: Resolução em Braille da atividade VI do aluno Rafael

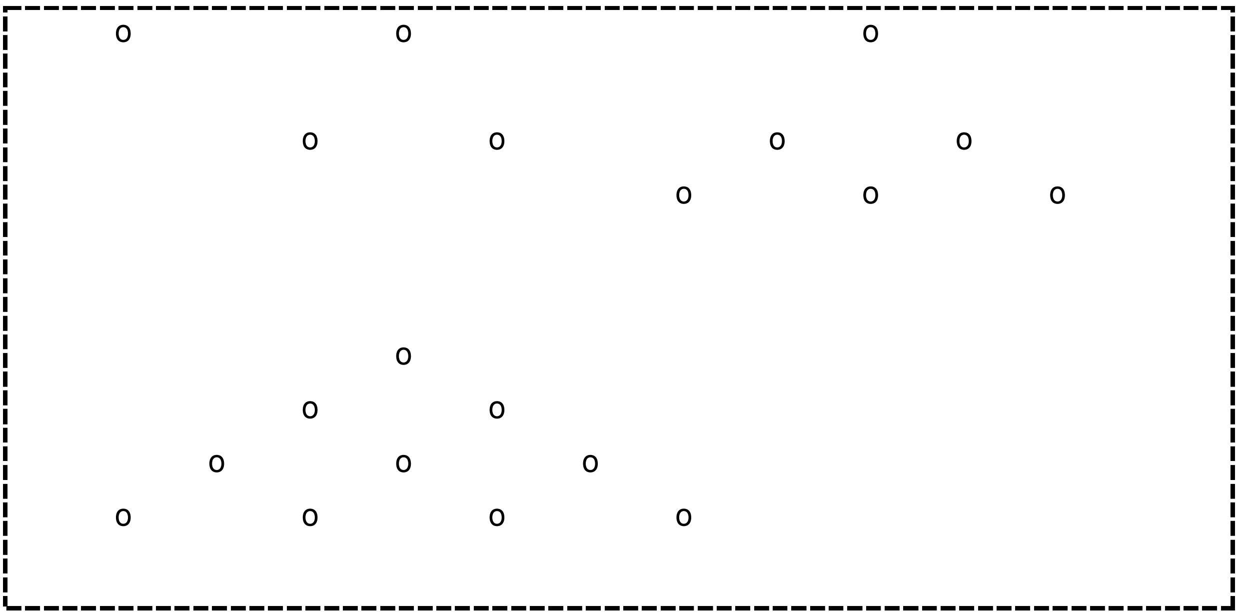


Figura 14A: Transcrição do extrato da resolução da atividade VI do aluno Rafael

Pedro:

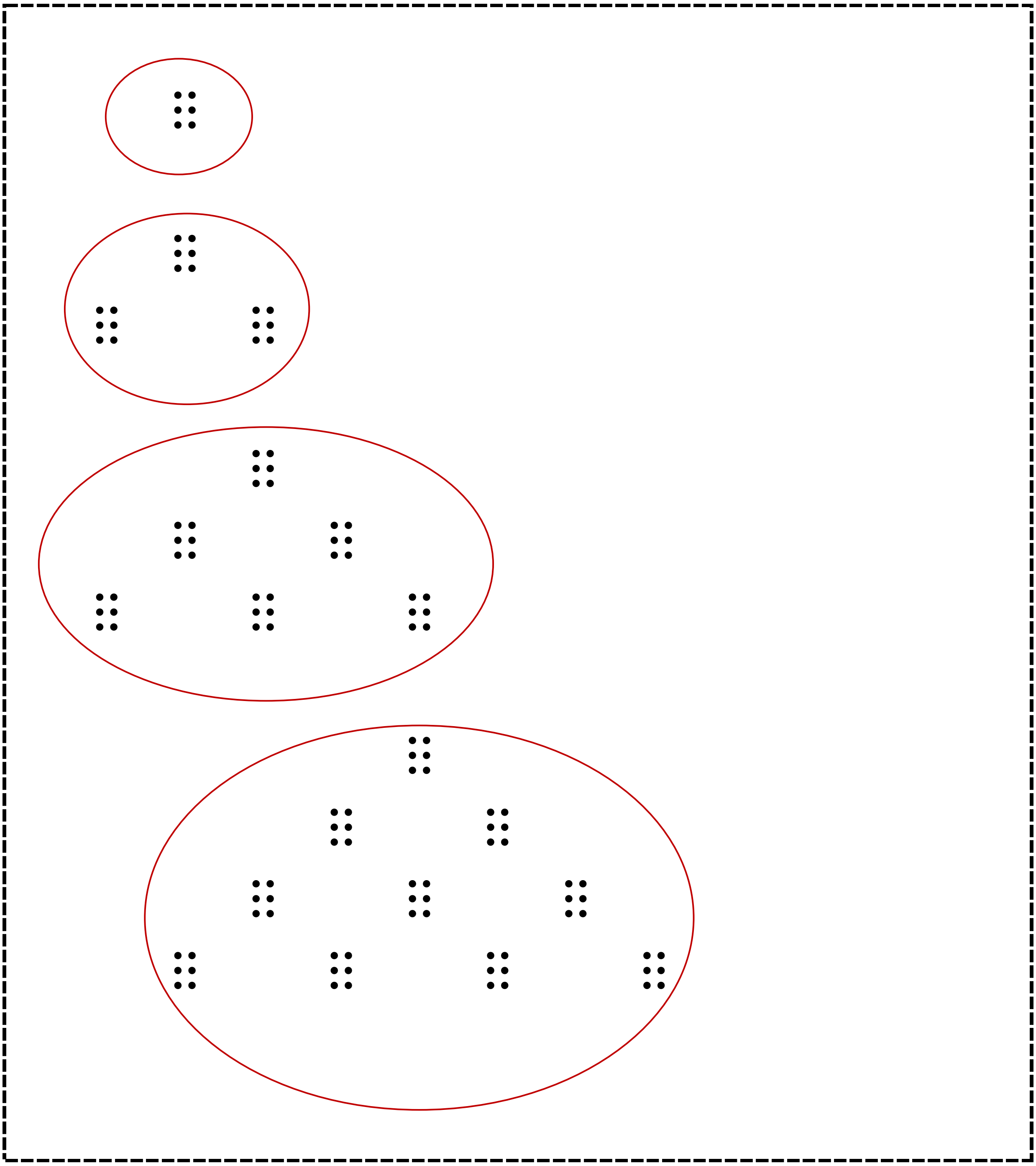


Figura 15: Resolução em Braille da atividade VI do aluno Pedro

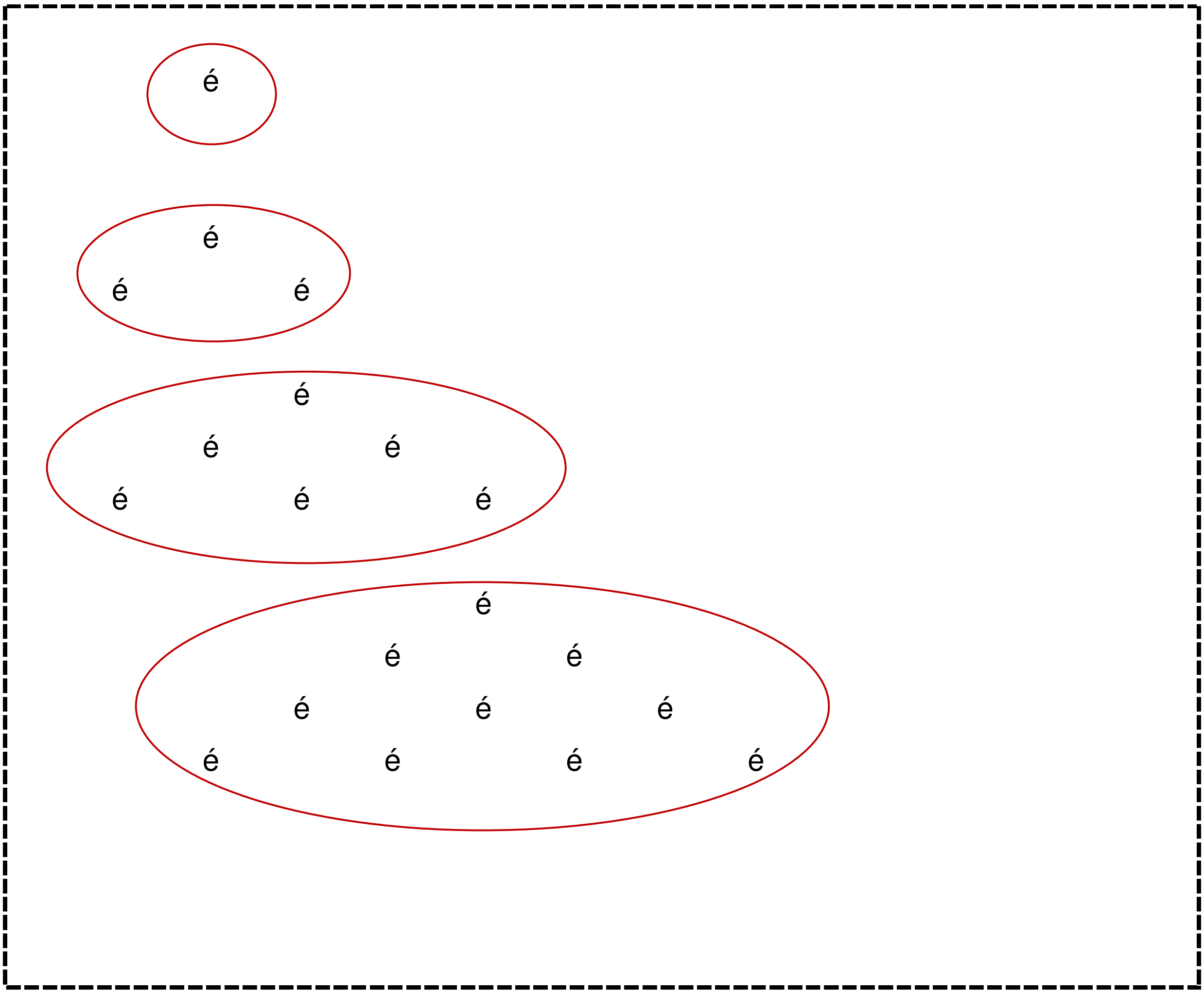


Figura 15A: Transcrição do extrato da resolução da atividade VI do aluno Pedro

6.3.6.5 – Considerações

Os alunos não manifestaram dificuldades na resolução da atividade, apenas o aluno Pedro manifestou inicialmente estar confuso com a interpretação do enunciado em relevo.

É interessante observar as diferentes formas de representação da resolução da atividade. Estas formas de representação sugerem ao professor possíveis formas de codificação de enunciados, partindo da própria criatividade dos alunos. Assim sendo, a partir das evidências, surgem três formas de representação:

- utilização do ponto 2 da célula braille, que corresponde à vírgula, foi escolhido este ponto devido à sua posição central;

- utilização dos pontos (246) e (135) da célula braille, que corresponde na grafia matemática braille ao sinal de menor (<) e sinal maior (>) e também corresponde à circunferência no sistema braille;

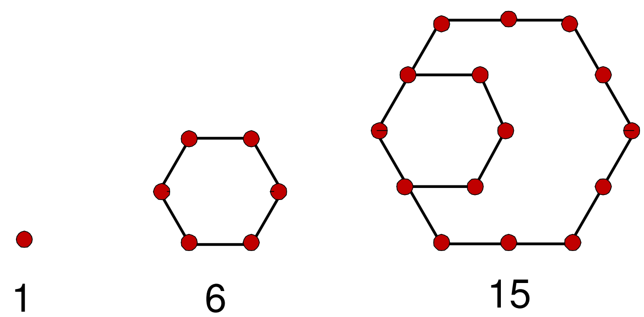
- utilização dois seis pontos (123456) da célula Braille, que corresponde ao ("é").

6.3.7 - Apresentação da Atividade VII: *Números hexagonais*

A aplicação desta atividade tem por base verificar, nesta fase do estudo, o nível de perceção dos alunos relativamente à leitura e interpretação do enunciado. À medida que a sequência pictórica crescente se vai desenvolvendo, a composição de cada termo vai sendo cada vez mais complexa. Esta atividade permite ainda, dar a conhecer ao aluno a possibilidade de conexão entre diferentes conteúdos, nesta caso as sequências e a geometria.

6.3.7.1 – Enunciado da Atividade VII

Descobre o próximo termo da sequência dos números hexagonais.

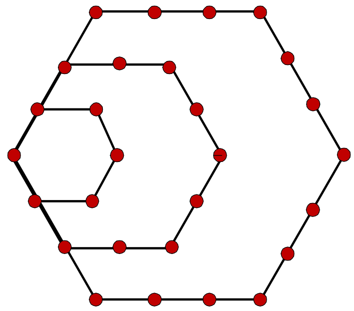


6.3.7.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade VII

Ao observar a constituição de cada termo da sequência, constata-se que o termo seguinte é obtido através de uma sobreposição de termos, ou seja, o termo anterior fará sempre parte do termo seguinte. A estratégia aplicar nesta situação será o aluno centrar-se no número de pontos que constituem o lado do hexágono maior do termo anterior, neste caso tem 3 pontos, e perceber que o hexágono maior do termo seguinte terá de lado 4 pontos. De seguida, o aluno terá de perceber quantos pontos existem no total de cada hexágono, ou seja, terá de perceber que se considera um lado do hexágono com 4 pontos, este terá 4 x 6 = 24, mas aos 24 terá de subtrair 6 pontos, para retirar uma duplicação de contagem dos pontos correspondentes aos vértices do hexágono, 24 – 6 = 18, que dá 18 pontos no total. Isto é, na contagem dos pontos, os pontos que são vértices do hexágono não se contam.

Por último, o aluno terá de adicionar os pontos que não pertencem ao hexágono maior, nesta caso são 10, perfazendo um total de 28 pontos.

Assim sendo, o termo seguinte, como se pode observar na figura abaixo será composto por 28 pontos posicionados hexagonalmente.



28

6.3.7.3 – Reformulação do enunciado da Atividade VII

Nesta atividade, a grande dificuldade do aluno passa pela compreensão esquemática da sequência, trata-se de um conjunto considerável de pontos e é estritamente necessário que o aluno perceba que, a partir do primeiro termo, as figuras geradas na sequência são hexágonos e, fundamentalmente, que no termo seguinte, figura um novo hexágono, cujo lado aumenta um círculo e que se mantém os hexágonos dos termos anteriores. Daí a necessidade de se utilizar um enunciado em relevo, para uma melhor compreensão da sequência pictórica crescente.

6.3.7.4 – Evidências

Margarida:

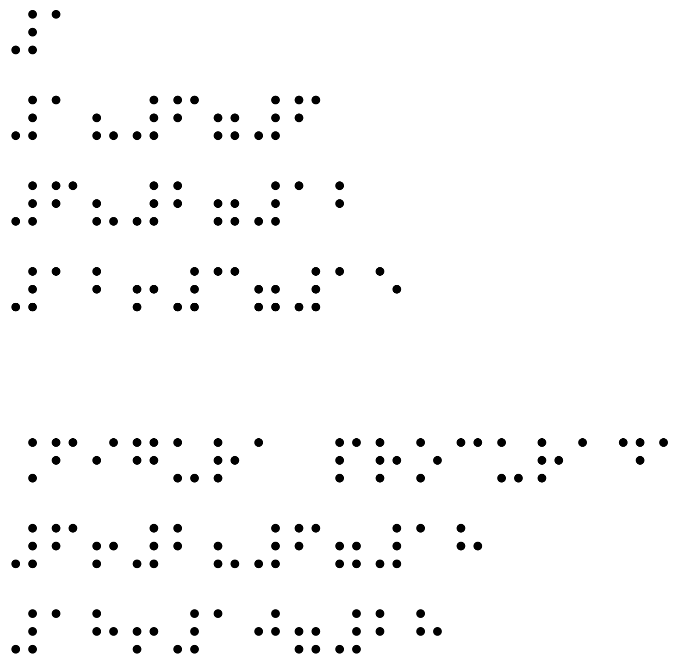


Figura 16: Resolução em Braille da atividade VII da aluna Margarida

1

1 x 6 = 6

6 x 2 = 12

12 + 3 = 15

Figura procurada

6 + 2 x 6 =18

18 + 10 = 28

Figura 16A: Transcrição do extrato da resolução da atividade VII da aluna Margarida

Rafael:

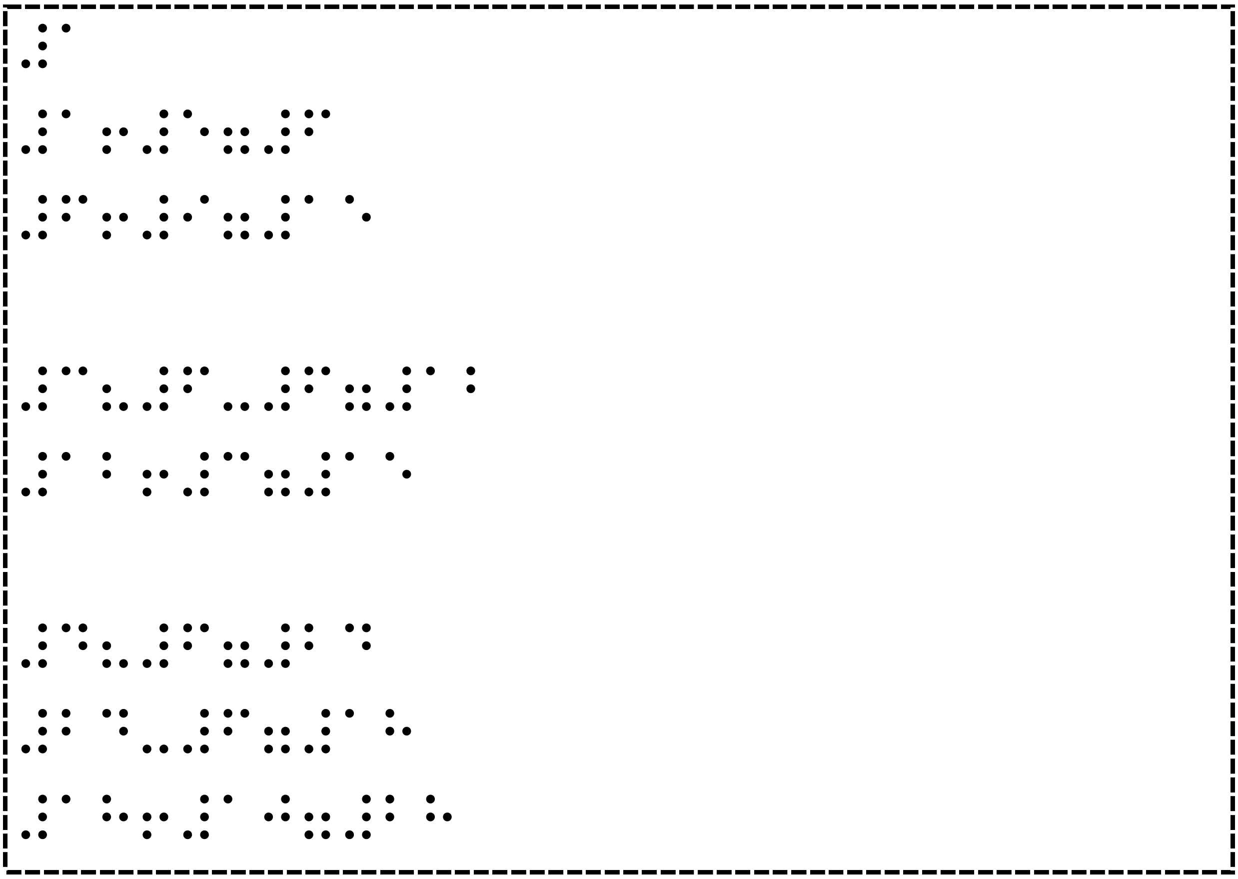


Figura 17: Resolução em Braille da atividade VII do aluno Rafael

1

1 + 5 = 6

6 + 9 = 15

3 x 6 – 6 =12

12 + 3 =15

4 x 6 = 24

24 – 6 = 18

18 + 10 = 28

Figura 17A: Transcrição do extrato da resolução da atividade VII do aluno Rafael

Pedro:

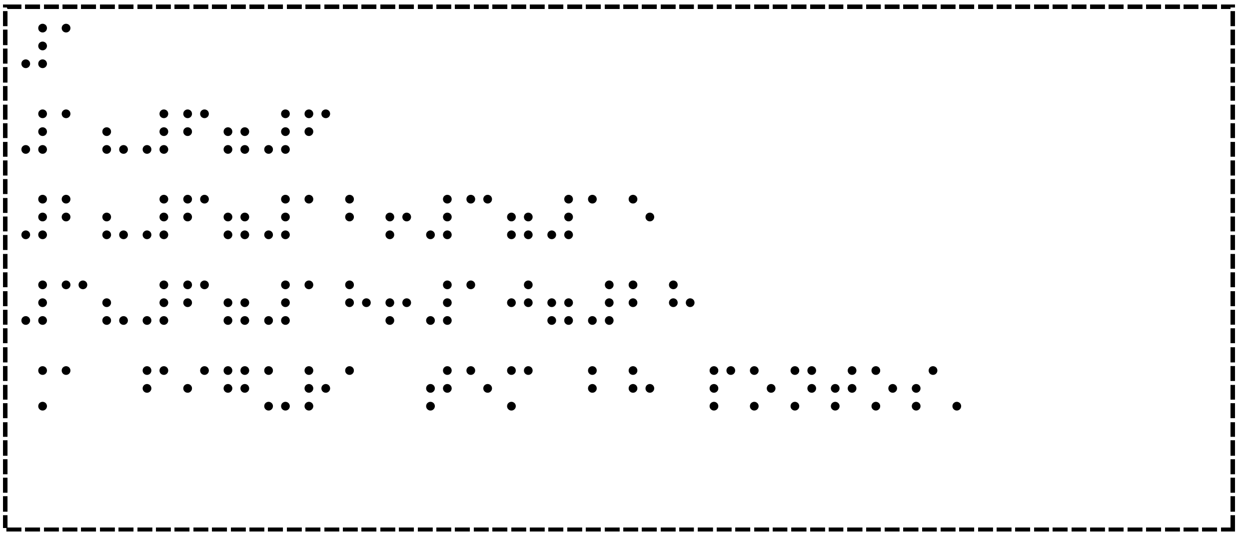


Figura 18: Resolução em Braille da atividade VII do aluno Pedro

1

1 x 6 =6

2 x 6 =12 + 3 =15

3 x 6 = 18 + 10 = 28

A figura tem 28 pontos.

Figura 18A: Transcrição do extrato da resolução da atividade VII do aluno Pedro

6.3.7.5 – Considerações

Inicialmente, os alunos manifestaram alguma compreensão do enunciado, demorando algum tempo a familiarizarem-se com a sequência em estudo. Salienta-se que, nesta primeira fase, o tempo despendido pelos alunos cegos na compreensão do enunciado foi bastante superior à dos colegas de turma. A partir daí, não evidenciaram dificuldades na sua resolução, verificando-se um recurso sistemático ao enunciado em relevo, pelo que o tempo de resolução foi também manifestamente superior ao dos restantes colegas da turma. Em situações como estas, em que os alunos com NEE necessitem de mais tempo para a resolução de uma atividade, é fundamental ter outras atividades similares a apresentar aos elementos da turma que forem concluindo a sua tarefa, de modo a possibilitar a todos o desenvolvimento das suas competências.

O aluno Rafael, no início da sua resolução, manifesta querer encontrar uma lei de formação. Todavia, conta o número de pontos de cada lado (3) e multiplica pelo número de lados do hexágono (6) e retira os 6 pontos que foram duplamente contabilizados e soma os restantes pontos através da figura que se encontra no enunciado, obtendo os 28 pontos.

O aluno Pedro, apresenta outro processo de raciocínio. Sabe que cada lado é composto por três pontos, contudo para não existir repetição de contagem, considera apenas dois em cada um dos lados (3x6=18) e soma os restantes pontos através da figura do enunciado, obtendo também os 28 pontos.

A aluna Margarida, utiliza uma estratégia idêntica à utilizada pelo aluno Pedro.

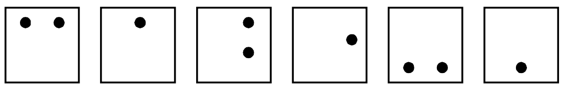
6.3.8 - Apresentação da Atividade VIII: *QI (Coeficiente de Inteligência)*

No enunciado da atividade, aparece uma sequência pictórica repetitiva, sendo pedido aos alunos para encontrarem a imagem seguinte da sequência. Todavia, só com os termos apresentados não é possível ter uma perceção de que a sequência irá repetir-se, uma vez que existe uma alternância de termos, termos com dois pontos e termos com um ponto, e dá-se essa repetição somente a partir do termo de ordem nove.

Pretende-se com esta atividade desenvolver no aluno a capacidade de perceção do enunciado e a capacidade de abstração, não se limitando a encontrar padrões de forma contínua, mas também de forma alternada.

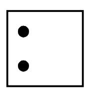
6.3.8.1 – Enunciado da Atividade VIII

O Gonçalo decidiu fazer um teste para medir o seu QI (coeficiente de inteligência). Uma das questões pedia para indicar a próxima imagem da sequência:



6.3.8.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade VIII

A sequência pictórica anterior obedece a um padrão de alternância. Por um lado, os quadrados de dois pontos alternam com os quadrados de um ponto, o que implica que a próxima imagem tenha obrigatoriamente dois pontos, por outro lado, todos os quadrados incluindo os de dois pontos, vão sofrendo rotações de 90º, no sentido dos ponteiros do relógio (sentido negativo).

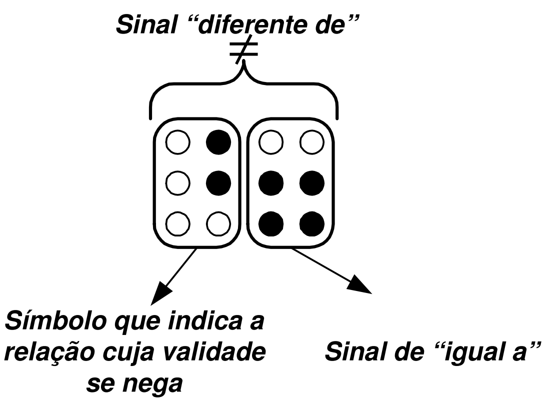
Assim, pode concluir-se que a próxima imagem terá de ser: .

6.3.8.3 – Reformulação do enunciado da Atividade VIII

Ao olhar para as diferentes imagens da sequência, estas lembram imediatamente a célula Braille, mas apenas com quatro pontos. Assim sendo, trabalhar-se-á apenas com os pontos 1, 2, 4 e 5 da célula Braille. A dificuldade para os alunos cegos reside nas imagens compostas por um só ponto, uma vez que a sua posição não se encontra definida na célula Braille. Pelo exposto, a melhor solução para definir a segunda imagem será sugerir ao aluno que imagine um ponto entre os pontos 1 e 4 da célula Braille; na quarta imagem, o ponto entre os pontos 4 e 5; na sexta imagem o ponto entre os pontos 2 e 5. Para as restantes imagens, pode sugerir-se para a primeira imagem a letra **c** (1,3), para a terceira o sinal (4,5), que se antepõe ao símbolo que indica a relação, cuja validade se nega e; para a quinta, imagem o sinal de pontuação “dois pontos”.

Alerta-se para o facto de o sinal (4,5) utilizado para a terceira imagem, não ser do conhecimento do aluno, pelo que se poderá aproveitar para ensinar mais um símbolo, dando como exemplo a representação do sinal “diferente de”, em que se utiliza o sinal de igual (pontos 2356) precedido do sinal (4,5), sinal este que faz a negação do sinal de igual e então, obtemos o sinal de diferente.

Esquematizando, temos:



6.3.8.4 – Evidências

Para a resolução desta atividade, no seu conjunto, os alunos basearam-se em processos meramente mentais, não havendo deste modo evidências a apresentar.

A aluna Margarida, conseguiu resolver a atividade com sucesso, tendo demorado bastante tempo na sua concretização.

Relativamente aos alunos Rafael e Pedro, estes concentraram-se apenas em visualizar os termos da sequência de forma continuada, não conseguindo, deste modo, observá-los de uma forma alternada, daí não apresentarem a imagem pedida.

6.3.8.5 – Considerações

Neste tipo de sequências, pictóricas, os alunos cegos revelam muitas dificuldades ao nível da compreensão do enunciado. Neste caso, a estratégia utilizada na reformulação do enunciado facilitou a sua compreensão, não constituindo, por isso, o enunciado um obstáculo no processo de resolução da atividade para os alunos.

Encontrar um padrão em sequências deste tipo é uma tarefa muito difícil para alunos cegos. A visualização de que há uma alternância na sequência, faz-se essencialmente observando-a no seu todo. Os alunos normovisuais conseguem-no fazer, para os alunos cegos, a dificuldade é acrescida. Assim, como forma de colmatar as dificuldades sentidas, sugere-se uma forma de codificação que incida na realidade concreta dos alunos, tal como descrito no subcapítulo *6.3.8.3*. Observou-se, com esta atividade, que, perante a atividade codificada, os alunos cegos procuram essa visualização no seu todo, na medida em que colocam as duas mãos sobre a folha e com alguma rapidez movem-nas de um lado para o outro, embora, para o efeito, necessitem, certamente, do apoio do professor, que pode ir facultando informações e/ ou descrições adicionais.

Após a concretização de atividades desta natureza, o aluno deverá ser capaz de construir e representar, por esquema e simbolicamente, os termos de sequências simples, bem como, traduzir, por escrito e oralmente, os raciocínios desenvolvidos. Assim sendo, o aluno estará em condições de compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e a sua representação, utilizando símbolos matemáticos adequados; de determinar o termo geral de uma sequência numérica; de determinar termos de várias ordens a partir do termo geral e de simplificar expressões algébricas.

É de todo conveniente que o professor, neste momento, faça a definição de sequência numérica, definindo-a como "*listas ordenadas e finitas de números. Caso esse número de elementos da lista seja infinito dá-se-lhe o nome de sucessão."* Note-se que o conceito de sucessão só será abordado no ensino secundário.

6.3.9 - Apresentação da Atividade IX: *Sequência com retângulos*

De seguida, apresenta-se uma nova atividade de natureza exploratória e investigativa que estará dividida em duas partes. Trata-se de uma atividade simples em termos de compreensão do enunciado por parte do aluno, pois poderá produzi-la na sua folha com relativa facilidade.

Pretende-se, com a realização desta atividade, que o aluno consiga formular e testar conjeturas matemáticas na exploração da situação proposta; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos; usar o raciocínio "visual" na exploração da situação proposta; compreender a noção de termo geral da sequência numérica em questão; determinar os primeiros termos da sequência; representar e analisar situações usando símbolos algébricos; escrever simbolicamente um termo geral da sequência em causa; determinar, nas sequências da situação dada, o valor de um termo específico, conhecida a ordem desse termo e por último determinar a ordem de um termo específico, conhecido o valor desse termo.

Dada a natureza da atividade, sugere-se que a mesma seja realizada em pequenos grupos

6.3.9.1 - Enunciado da Atividade IX

Atividade IX: Parte I

Observa a seguinte sequência construída com retângulos.

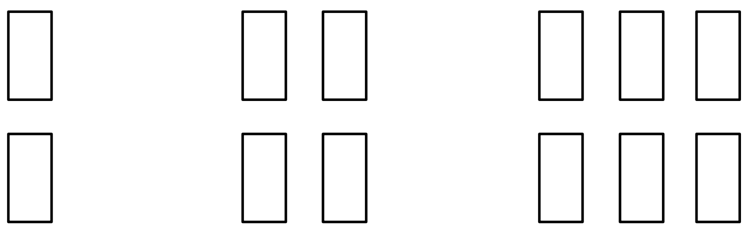


Fig.1 Fig.2 Fig.3

a) Quantos retângulos terá a figura seguinte?

b) Quantos retângulos formam a figura 10? E a figura 50? Explica o teu raciocínio.

c) Nesta sequência, existirá alguma figura composta por 157 retângulos? Se existir, indica o número da figura.

d) Nesta sequência, existirá alguma figura composta por 324 retângulos? Se existir, indica o número da figura.

e) Encontra um processo que permita determinar o número de retângulos da figura, dependendo do número da figura? Explica-o.

Atividade IX: Parte II

Observa a seguinte sequência:

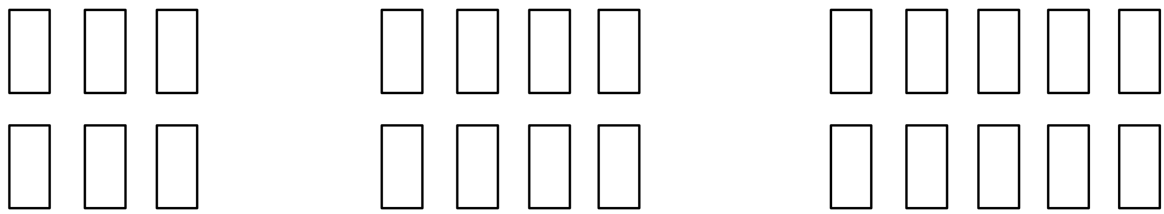


Fig.1 Fig.2 Fig.3

Descreve um processo que permita determinar o número de retângulos de cada figura, dependendo do número da figura.

6.3.9.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade IX

Num momento inicial, pretende-se que o aluno comece por discutir o número de retângulos que vai observando. À medida que o número da figura aumenta e, no decurso da resolução da tarefa, o aluno pode optar por registar as descobertas em esquemas de “figuras”, como as do enunciado.

É expectável que o aluno resolva as quatro primeiras alíneas sem grandes dificuldades e estabeleça uma relação entre o número da figura e o respetivo número de retângulos. É provável que as dúvidas do aluno comecem a surgir, fundamentalmente na tradução simbólica da generalização da sequência, na resolução da alínea e), nomeadamente se o aluno não estiver familiarizado com trabalhos de natureza investigativa. Nesse caso, pode ser necessária a intervenção do professor, que pode sugerir a organização dos dados sob a forma de tabela, por exemplo. Porém, a construção de uma tabela que auxilie o raciocínio não é, por vezes, um processo simples e intuitivo; nesse caso, o professor pode sugerir que, na coluna da esquerda, por exemplo, se coloque o número da figura e na coluna da direita se coloque o número de retângulos respetivo.

Na construção da generalização da situação, o professor pode sugerir, numa fase inicial, a tradução do *procedimento* adotado, em linguagem natural e, só depois, a sua tradução simbólica. Pretende-se que o aluno entenda e escreva simbolicamente o que ocorre ao número de retângulos de cada figura, à medida que o número da figura aumenta, usando numa fase inicial o modo recursivo, por exemplo. Contudo, à medida que o número da figura aumenta, espera-se que o aluno sinta necessidade de construir um processo que lhe permita, de forma rápida, obter um termo de uma ordem qualquer, pois o uso recursivo é um processo moroso, nomeadamente na determinação de termos de ordem elevada.

Para construir o termo geral da sequência, sem uso recursivo, pretende-se que o aluno estabeleça uma relação entre o número da figura e o número de retângulos que a constitui. Esta relação poderá começar por ser um processo mental, que depois será escrito em linguagem natural e, finalmente, traduzido em linguagem simbólica. Essa tradução simbólica pode passar por representar a expressão *"n.º da figura"* por uma letra. Poder-se-á recorrer a situações já conhecidas do aluno onde também se usam letras para representar números, por exemplo, fórmulas de áreas e volumes. Com esta analogia, será mais fácil ao aluno concluir que a expressão *"n.º da figura"* poderá ser representada por uma letra, por exemplo, onde n = 1, 2, 3, 4, 5. Nesta fase, o professor pode formalizar os conceitos de *termo* e *ordem do termo de uma sequência*. Assim sendo, chama-se *termo geral* ou *expressão geradora da sequência numérica* à expressão que gera um número finito e ordenado de termos da sequência. É o termo genérico de ordem $\boldsymbol{n}$ (n-ésimo termo), sendo $\boldsymbol{n}$ um qualquer número natural.

Dever-se-á ter em atenção que o aluno, na sua generalidade, tem alguma dificuldade em perceber a distinção entre o conceito de termo e o de ordem do termo. Sugere-se que o professor defina termo da sequência ao número que aparece na sequência em questão e refira que ordem do termo da sequência se trata de um conceito posicional, ou seja, ordem do termo refere-se à posição em que se encontra o número na sequência, por exemplo, se está em primeiro, segundo, terceiro, …, nonagésima, …, n-ésima posição, etc. Imediatamente de seguida, alerta-se o aluno para o facto de fazer todo o sentido de o ***n*** pertencer ao conjunto dos números naturais, uma vez que não existe numa tabela classificativa o segundo virgula dois lugares, por exemplo, mas sim o primeiro lugar, o segundo lugar, o terceiro lugar, etc, isto é, só números inteiros positivos.

No decurso da discussão e validação dos resultados, após a obtenção dos termos gerais em causa, o professor pode pedir ao aluno a determinação de termos de diferentes ordens, com recurso aos termos gerais, para que os alunos compreendam melhor a utilidade dessas expressões geradoras. Durante a discussão e validação dos resultados, o professor pode optar por dar início ao trabalho com expressões algébricas equivalentes e simplificações algébricas, partindo dos termos gerais das duas sequências da tarefa. Deste modo, com a diversidade de abordagens possíveis à sequência da Parte II, poder-se-ão obter expressões algébricas equivalentes, como as seguintes: $(n+2)+(n+2)$, $6+(2n-2)$, $2n+4$ e $(n-1)\times 2$.

A situação apresentada na parte I poderá ser abordada da seguinte forma:

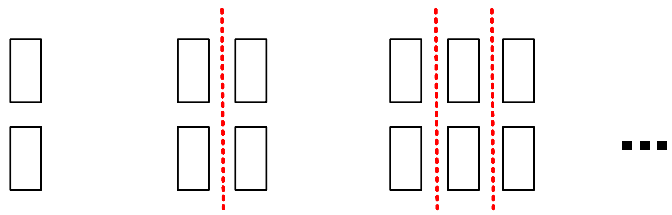


Fig.1 Fig.2 Fig.3

2 retângulos	4 retângulos	6 retângulos
1×2	2×2	3×2

Ou seja,

$$\boxed{n.^{o}\ da\ figura \times 2 \rightarrow n \times 2}$$

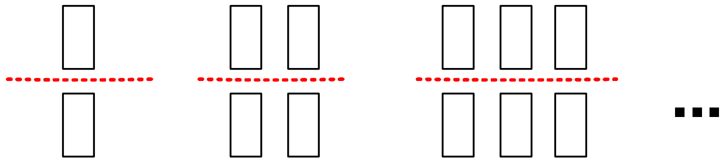


Fig.1 Fig.2 Fig.3

2 retângulos	4 retângulos	6 retângulos
2×1	2×2	2×3

Ou seja,

$$\boxed{2 \quad \times \quad n.^{o}\ da\ figura \ \rightarrow\ 2\times n}$$

A situação apresentada na parte II poderá ser abordada da seguinte forma:

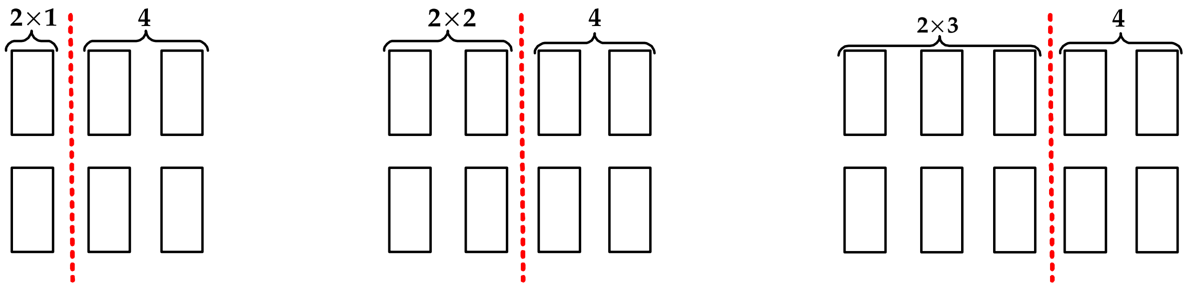


Fig.1 Fig.2 Fig.3

$$2\times1+4 \ ,\ 2\times2+4 \ ,\ 2\times3+4 \ , \dots ,\ 2\times n+4 \ ,\ \dots$$

Ou recorrendo à sequência pictórica para escrever a sequência numérica 6, 8, 10, 12, 14, … e procurar uma expressão geradora recorrendo à expressão geradora da sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, …, que os alunos já conhecem da sequência anterior.

N.º da figura	1	2	3	4	5	…
N.º de retângulos	6	8	10	12	14	…

+2 +2 +2 +2

$$6, 8, 10, 12, 14, \ldots \longleftarrow \underbrace{\underbrace{\textit{Múltiplos de 2}}_{2n}\textit{ superiores a 4}}_{2n+4}$$

Assim sendo, a expressão analítica que permite determinar o número de retângulos utilizados em qualquer figura é $\mathbf{2}n+\mathbf{4}$.

No entanto, é possível outras formas de abordagem associada ao termo geral $\mathbf{2}n+\mathbf{4}$. Uma delas é a que se apresenta a seguir:

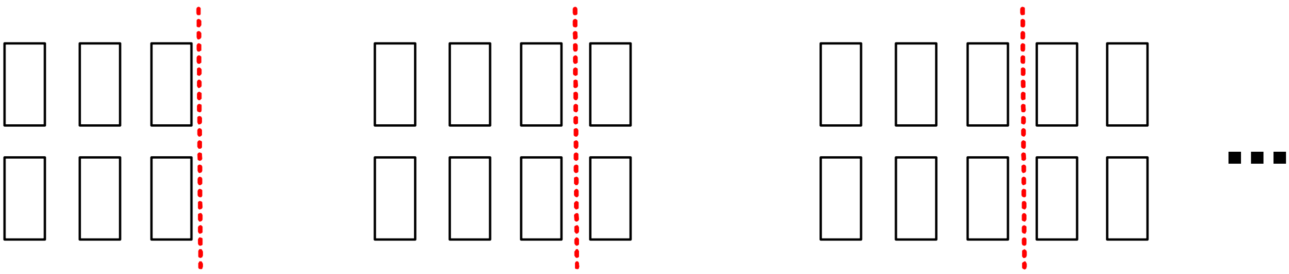


Fig.1 Fig.2 Fig.3

Trata-se de uma sequência associada à regularidade: 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

$$6, 8, 10, 12, 14, \ldots \longrightarrow 6+0\ ;\ 6+2\ ;\ 6+4\ ;\ 6+6\ ;\ 6+8\ ;\ \ldots\ ;\ 6+(2n-2)\ ;\ \ldots\ ;\ 2n+4$$

Contudo, o aluno poderá explorar esta situação utilizando a seguinte tabela:

1.º termo	$\mathbf{6}$
2.º termo	$\mathbf{6+2=6+1\times 2}$
3.º termo	$\mathbf{6+(2+2)=6+2\times 2}$
4.º termo	$\mathbf{6+(2+2+2)=6+3\times 2}$
5.º termo	$\mathbf{6+(2+2+2+2)=6+4\times 2}$
…	
50.º termo	$\mathbf{6+(2+2+...+2)=6+49\times 2}$
…	
Termo de ordem *n*	$\mathbf{6+(\underbrace{2+2+...+2}_{n\text{-}1\ vezes})=6+(}n\mathbf{-1)\times 2}$

O professor deverá pedir ao aluno que observe a sequência e, nesse mesmo instante, deverá alertá-lo para o facto de existir a possibilidade de determinarmos o termo seguinte a partir do primeiro termo da sequência, ou seja, fixa-se o número de retângulos do primeiro termo (6).

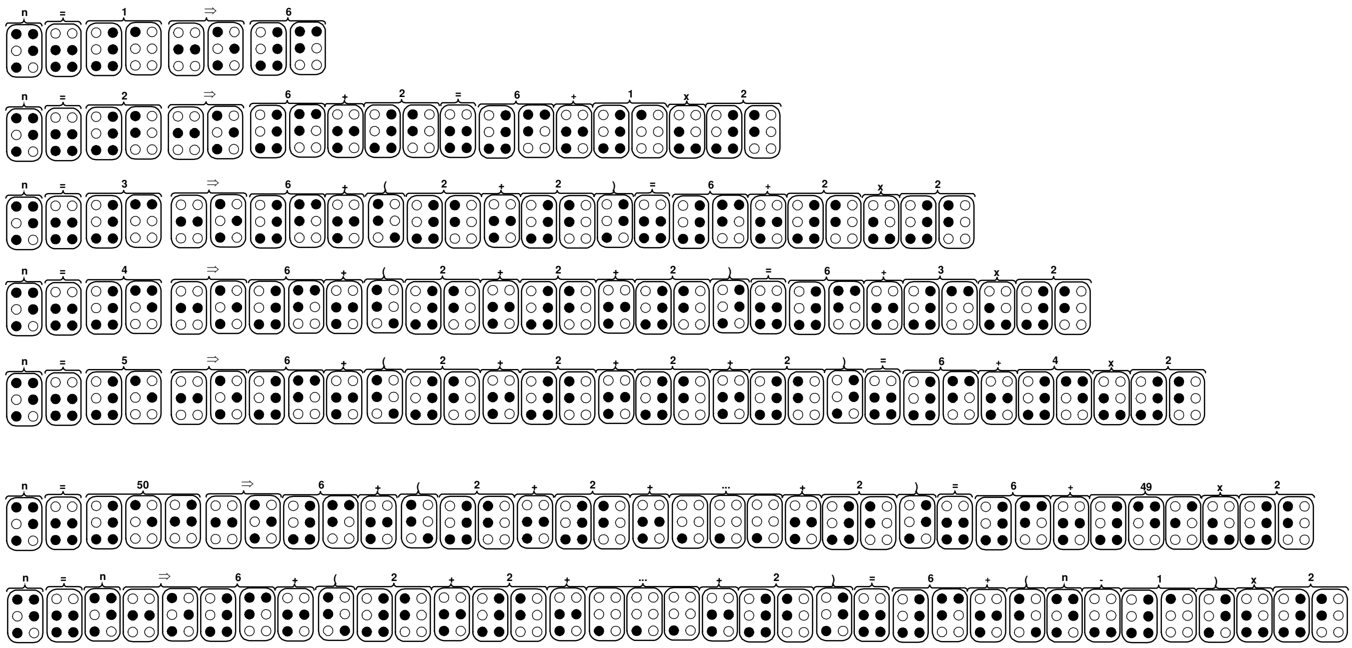
Assim sendo, o segundo termo será o número de retângulos do primeiro termo mais dois, o terceiro, o número de retângulos do primeiro mais quatro e assim sucessivamente. De seguida, pede-se ao aluno para tomar atenção ao número de retângulos que restam em cada termo da sequência e conclui-se que, neste caso, se está perante uma simples “tabuada do dois”, ou então, perante os múltiplos de dois. Sabe-se, então, que a expressão geradora será do tipo $\mathbf{6}+\textit{tabuada do dois}$, ou seja, 6+2x1; 6+2x2; 6+2x3; etc. Será pertinente, neste ponto, introduzir a noção de ***n*** como um “*contador*”. Se se observar a tabuada do dois, constata-se que existe um valor fixo (2) multiplicado por um contador, isto é, entende-se por contador, uma contagem sequencial de números naturais e, uma vez que o ***n*** se trata de um número natural, então ***n*** aparecerá na expressão geradora, multiplicado a dois e, desta forma, a expressão passará a ser do tipo 6+2xn.

Todavia, esta não será a expressão algébrica final, pois a tabuada do dois não começa em 2x1, mas sim em 2x0 e, então, ter-se-á obrigatoriamente de trabalhar o ***n***, ou seja o ***contador***. Ter-se-á, então, de pensar da seguinte forma: se o meu

contador começa em 1, o que tenho de fazer para começar em 0 em vez de 1? Simples, deverei retirar um ao meu ***contado***r, ou seja, ***n***-1. Então, a expressão geradora que tínhamos determinado irá sofrer alteração, onde está ***n***, substitui-se por (***n***-1) e passará a ser 6+2(***n***-1), expressão equivalente a 2***n***+4.

Fará todo o sentido pedir ao aluno para construir a tabela atrás descrita e, a partir do momento em que o aluno possua a noção de ordem do termo, será mais vantajoso optar por escrever n = 1, em substituição de 1.º termo, permitindo, assim, simplificar a escrita e ao mesmo tempo se vai aperfeiçoando a linguagem simbólica da matemática para conteúdos programáticos posteriores.

A tabela tomará a seguinte forma na grafia Braille:



Uma outra abordagem associada ao termo geral $2n+4$ pode ser:

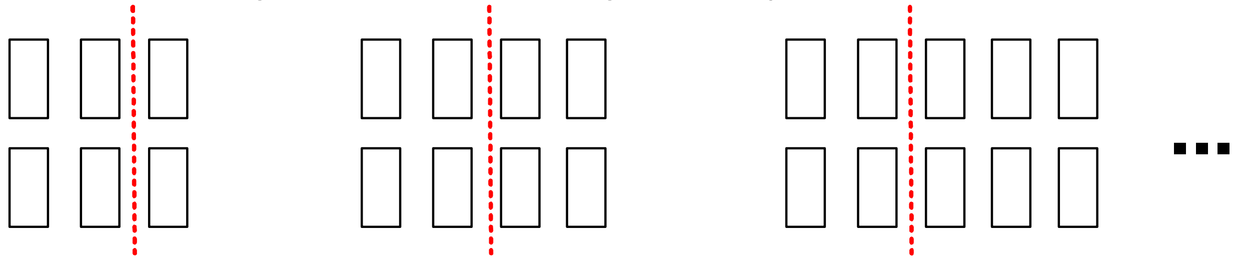


Fig.1 Fig.2 Fig.3

6, 8, 10, 12, 14, ... $\longrightarrow$ 4+2 ; 4+4 ; 4+6 ; … ; 4+2n ; …

No entanto, este termo geral $2n+4$ poderá partir da sequência:

3, 4, 5, 6, 7, 8, ... $\longleftarrow$ *Números naturais superiores a 2*

A expressão que permite gerá-lo é $n+2$:

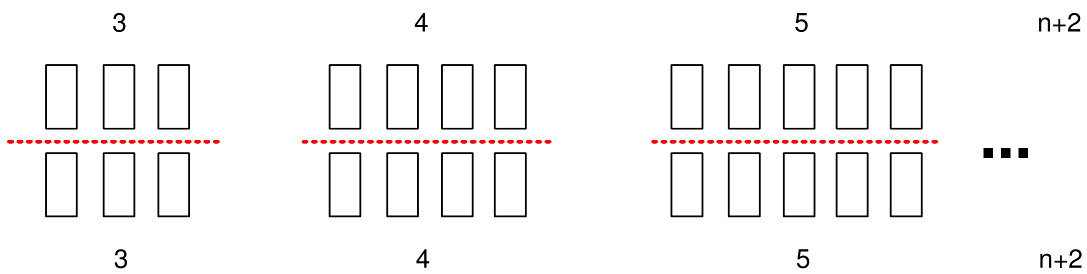


Fig.1 Fig.2 Fig.3

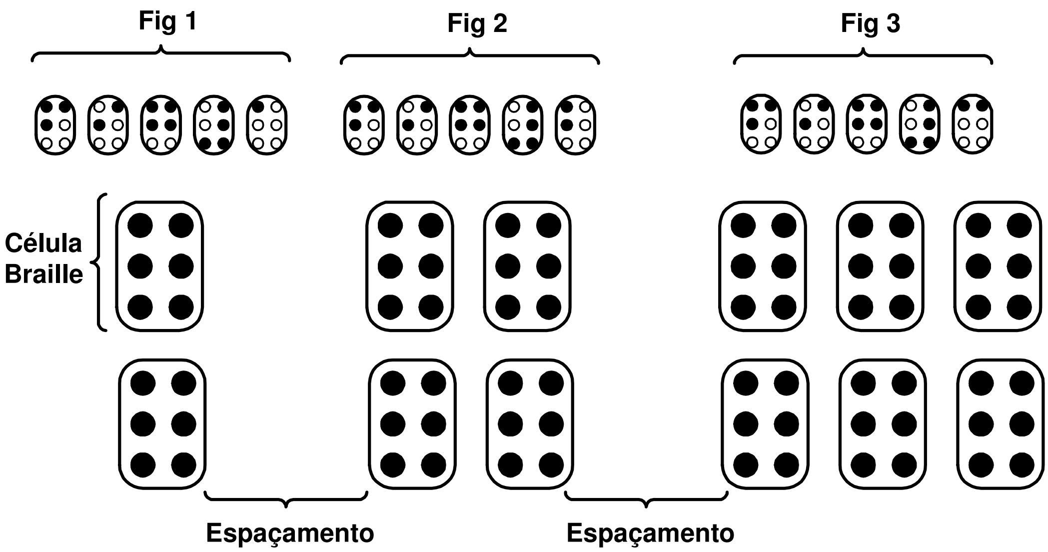
Assim sendo, $(n+2)+(n+2)=2(n+2)=2n+4$

6.3.9.3 – Reformulação do enunciado da Atividade IX

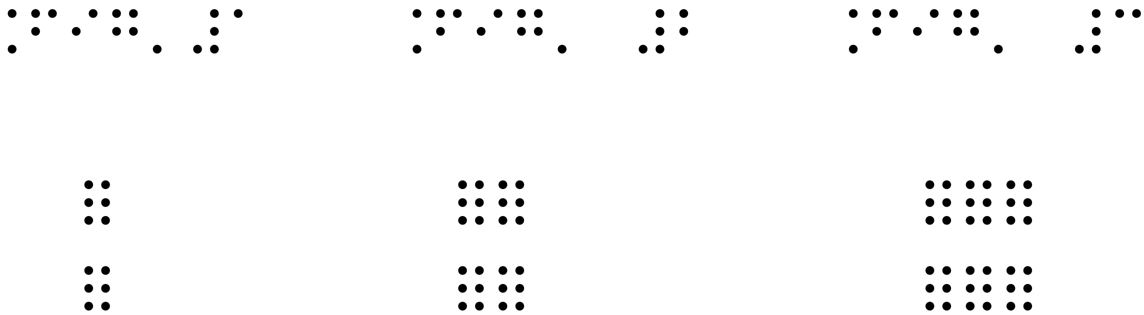
Como em qualquer atividade, é essencial que o aluno visualize corretamente o enunciado de modo a poder compreendê-lo, pelo que, nesta situação, a perceção da mesma se faz de forma simples, explicando ao aluno que, na parte I, se trata de uma sequência pictórica onde são apresentadas três figuras com retângulos, relativamente às quais se poderá utilizar a célula Braille como forma de representação de um retângulo ou utilizando a simbologia Braille que define um retângulo, pontos ⠯⠽ (12346) (13456), em que a primeira figura é composta por dois retângulos, um por cima do outro; na segunda figura trata-se de uma duplicação horizontal da primeira; e a terceira figura representa uma triplicação horizontal da primeira.

Esquematizando, temos:

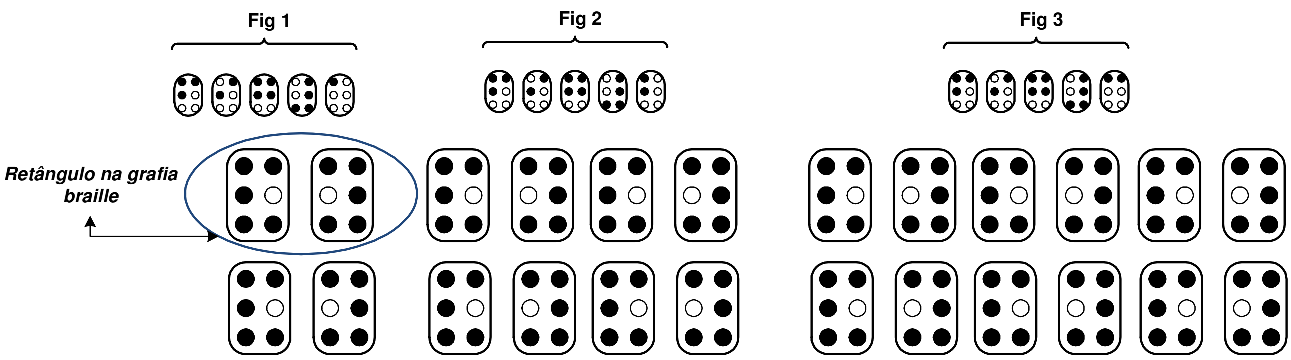
<u>**1.º Caso – Parte I**</u>: Utilização da célula Braille como representação de um retângulo.



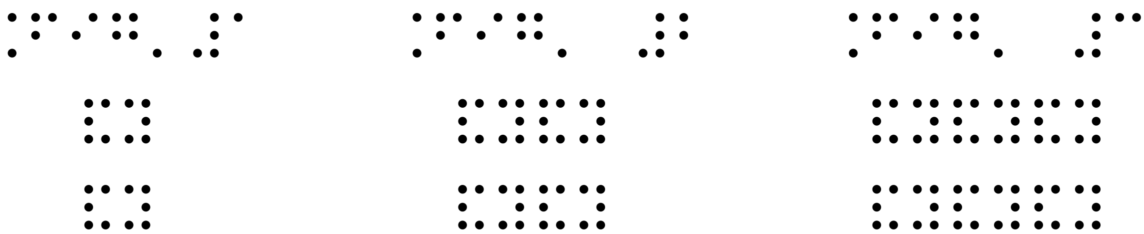
Em contexto real, a situação surgirá da seguinte forma:



<u>2.º Caso – Parte I</u>: Utilização da grafia Braille que define retângulo.



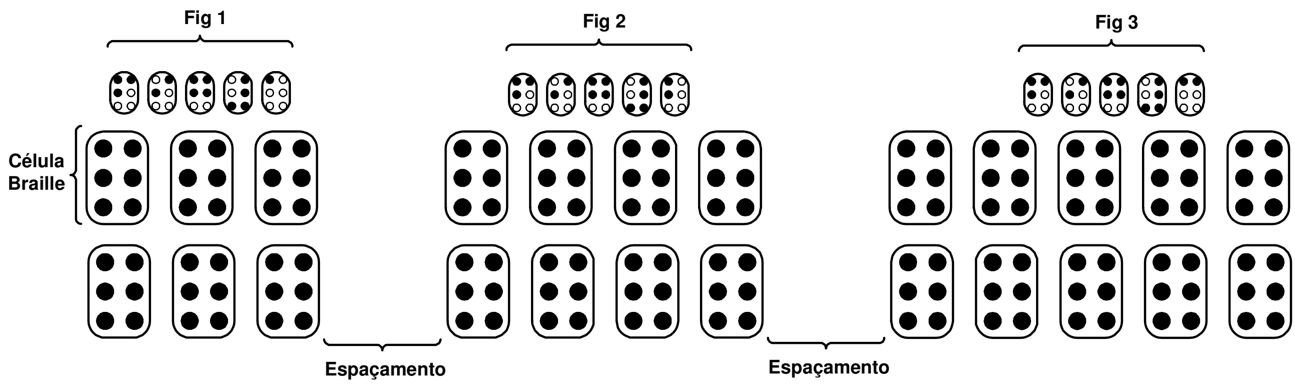
Em contexto real, a situação surgirá da seguinte forma:



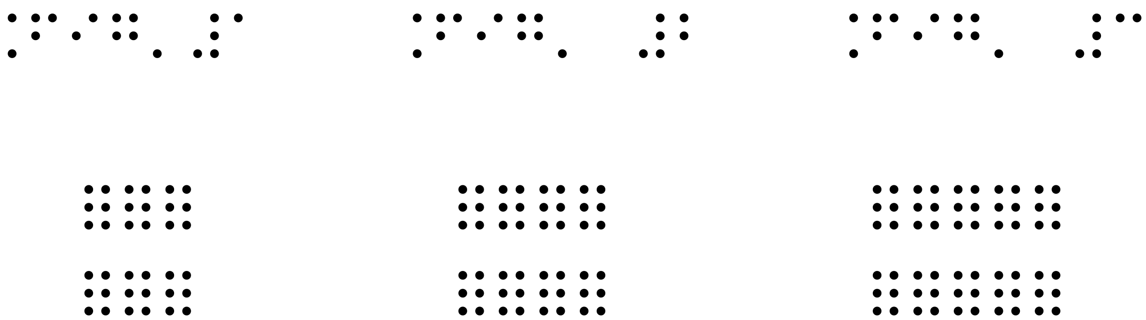
Relativamente à descrição da sequência apresentada na parte II, pode utilizar-se, como referência, a figura 1 da sequência representada na parte I, ou seja, a figura 1 é uma triplicação horizontal da figura 1 da parte I ; ou então, uma representação idêntica da figura 3 da sequência da parte I, a figura dois é uma quadruplicação horizontal da figura 1 da parte I e a figura três é uma quintuplicação horizontal da figura 1 da parte I.

Esquematizando temos:

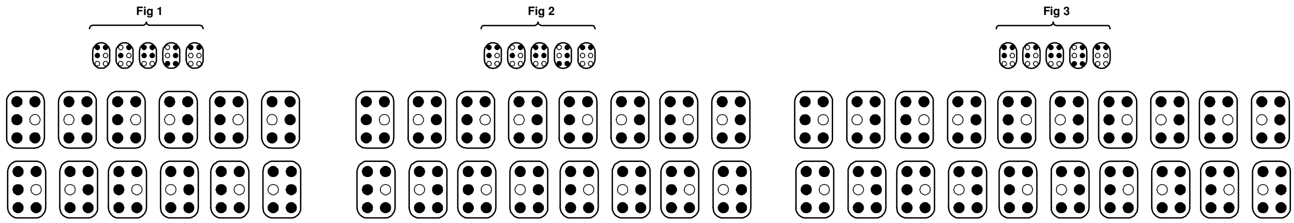
<u>1.º Caso – Parte II</u>: Utilização da célula braille como representação de um retângulo.



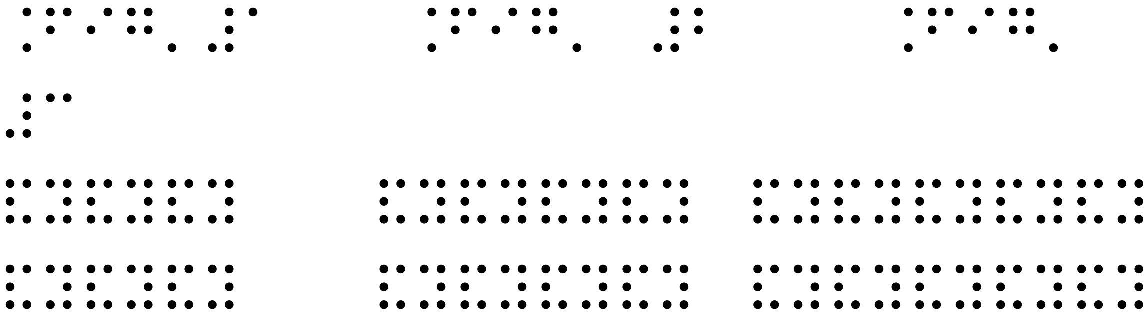
Em contexto real, a situação surgirá da seguinte forma:



2.º Caso – Parte II: Utilização da grafia Braille que define retângulo.



Em contexto real, a situação surgirá da seguinte forma:



Como se pode constatar, a melhor estratégia de representação das duas sequências atrás apresentadas será a que se encontra explanada nos primeiros casos, tanto da parte I, como da parte II, na medida em que permite simplificar em muito a escrita Braille.

6.3.9.4 – Evidências

6.3.9.4.1 - Estratégias usadas para a sequência da parte I cujo termo geral é *2n*

Na resolução da alínea b) desta atividade, os alunos podem utilizar uma *abordagem aditiva* e uma *abordagem multiplicativa*, para o cálculo do número de retângulos de cada figura, como se exemplifica na seguinte resolução:

***1.ª Situação*:**

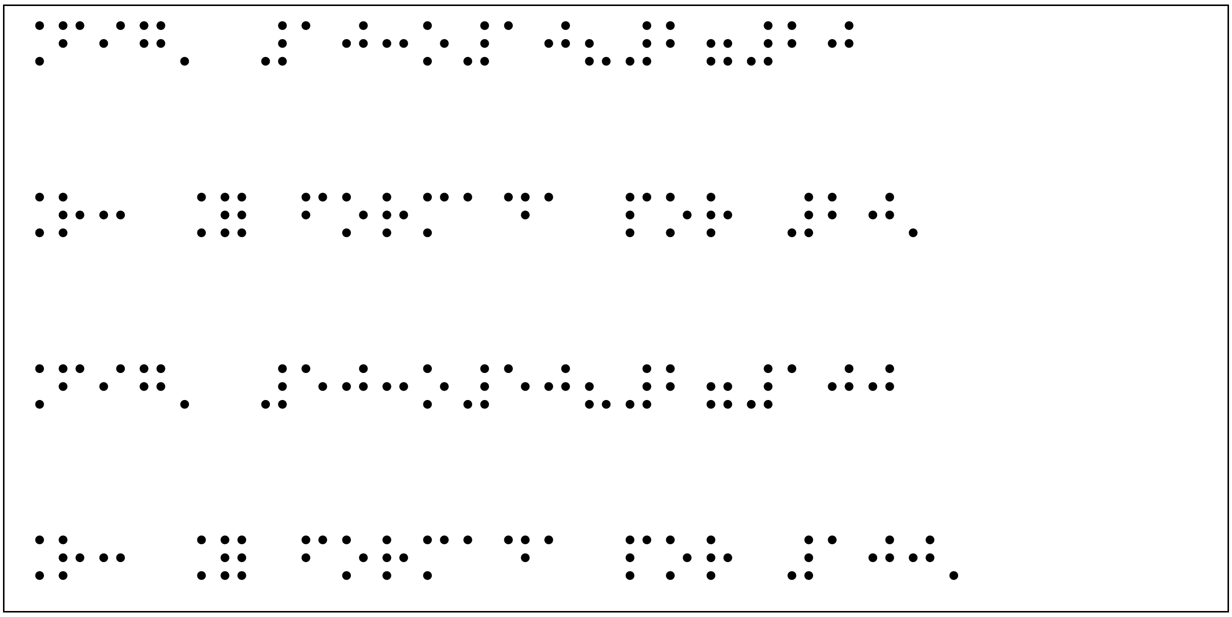


Fig. 10 ⇒ 10 x 2 = 20   R: É formada por 20.
Fig. 50 ⇒ 50 x 2 = 100   R: É formada por 100.

***2.ª Situação*:**

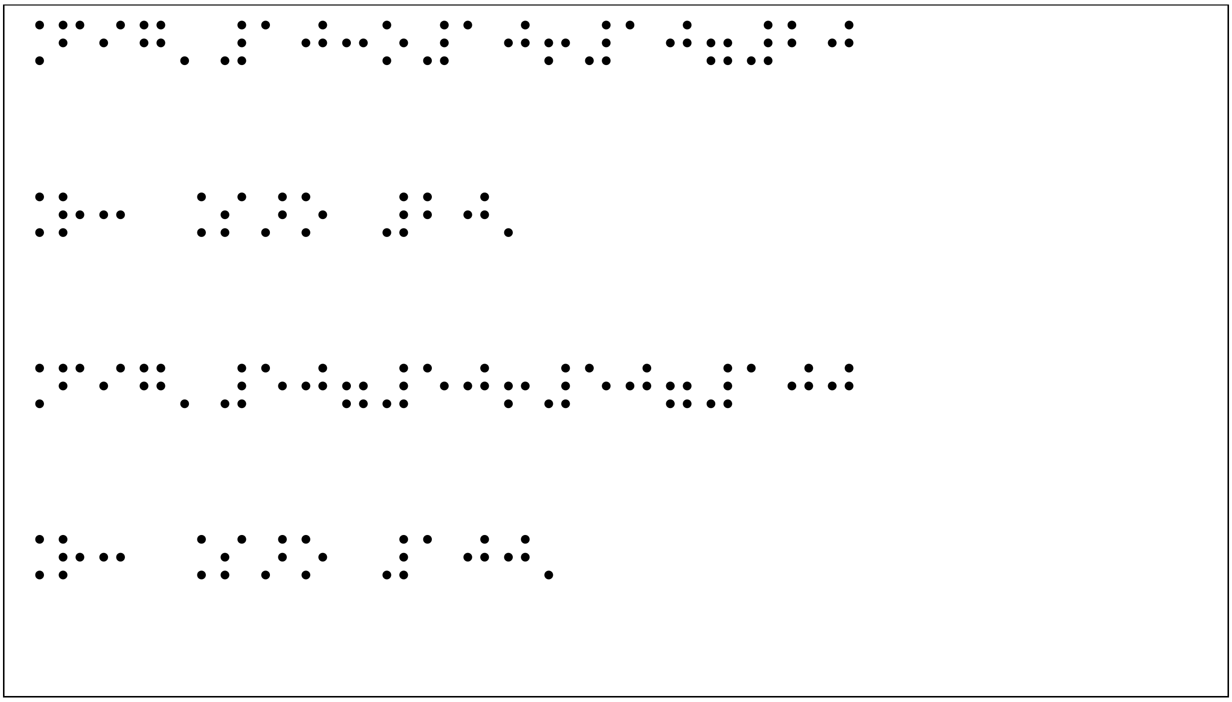


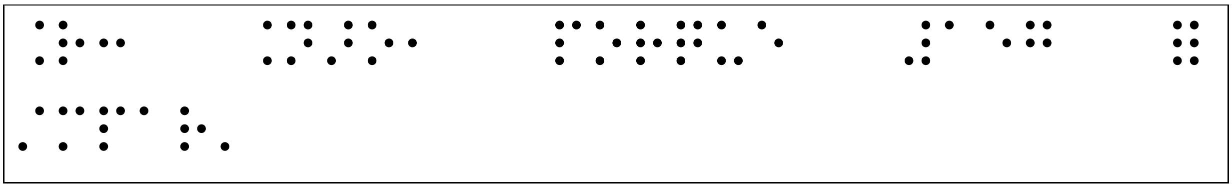
Fig. 10 ⇒ 10 + 10 = 20

R: São 20.

Fig. 50 ⇒ 50 + 50 = 100

R: São 100.

No que refere à alínea c), a forma mais rápida de resolver a questão, atendendo à natureza da sequência, é constatar que todos os termos da sequência são números pares e que 157 é um número ímpar.



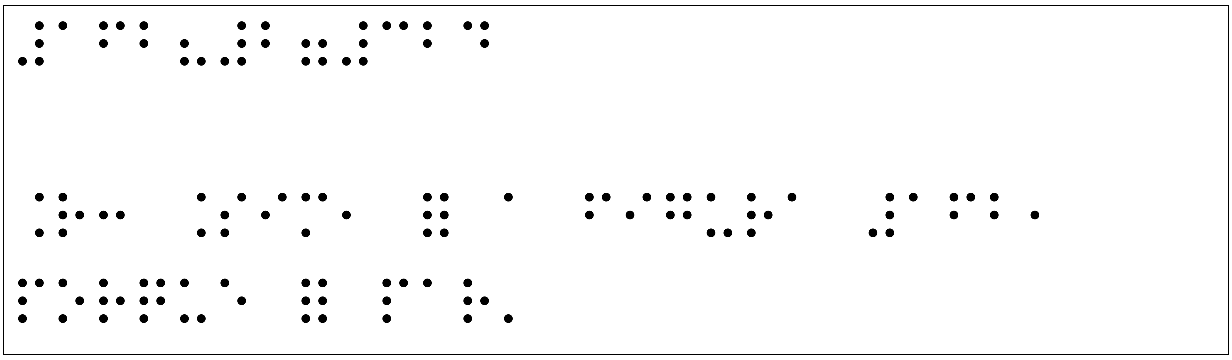
R: Não, porque 157 é ímpar.

Nas situações em que é solicitado ao aluno para averiguar se um dado valor numérico é termo da sequência, quando este ainda não conhece o termo geral, o professor poderá começar por fazer uma “aproximação” ao valor dado e depois dar continuidade à sequência. Por exemplo, para verificar se 175 é termo da sequência:

$$\mathbf{2 \times 75 = 150}$$

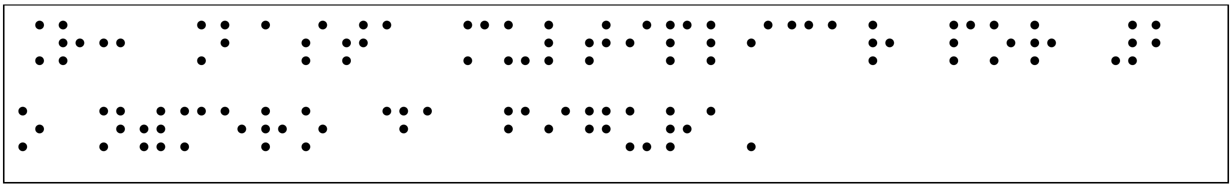
$$\mathbf{150,\ 152,\ 154,\ 156,\ 158,\ \ldots}$$

No que refere à resolução da alínea d), o valor 162 pode surgir por um processo intuitivo de tentativa e erro. O recurso às operações inversas poderá ser feito com exemplos simples como o seguinte ($\frac{\mathbf{324}}{\mathbf{2}} = \mathbf{162} \quad e \quad \mathbf{162} \in IN$).



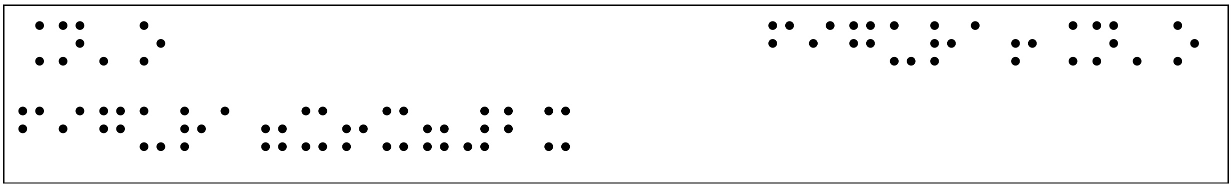
162 x 2 = 324	R: Sim, é a figura 162, porque é par.

Antes da escrita simbólica do processo, os alunos podem fazer a tradução em linguagem natural, tal como se apresenta a seguir.



R: Basta multiplicar por 2 o número da figura.

Esta etapa intermédia é essencial, pelo menos nos exemplos iniciais, pois pode facilitar a escrita da expressão algébrica, tal como aconteceu neste caso, o aluno apresentou o seu raciocínio da seguinte forma:



N.º figura + N.º figura = $x + x = 2x$

Pode-se então observar que todo o raciocínio evidenciado pelo aluno conduziu-o à obtenção da tão desejada expressão algébrica ou analítica através de um processo meramente natural e simbólico.

6.3.9.4.2 - Estratégias usadas para a sequência da parte II cujo termo geral é *2n+4*

Nesta sequência os alunos podem começar por observar uma invariância na passagem de uma figura para a seguinte (“o resto 4”).

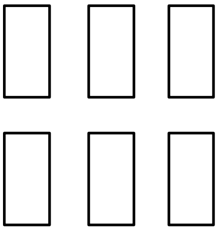


Fig.1

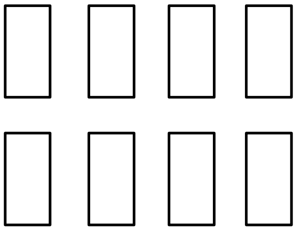


Fig.2

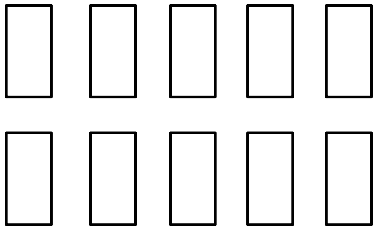
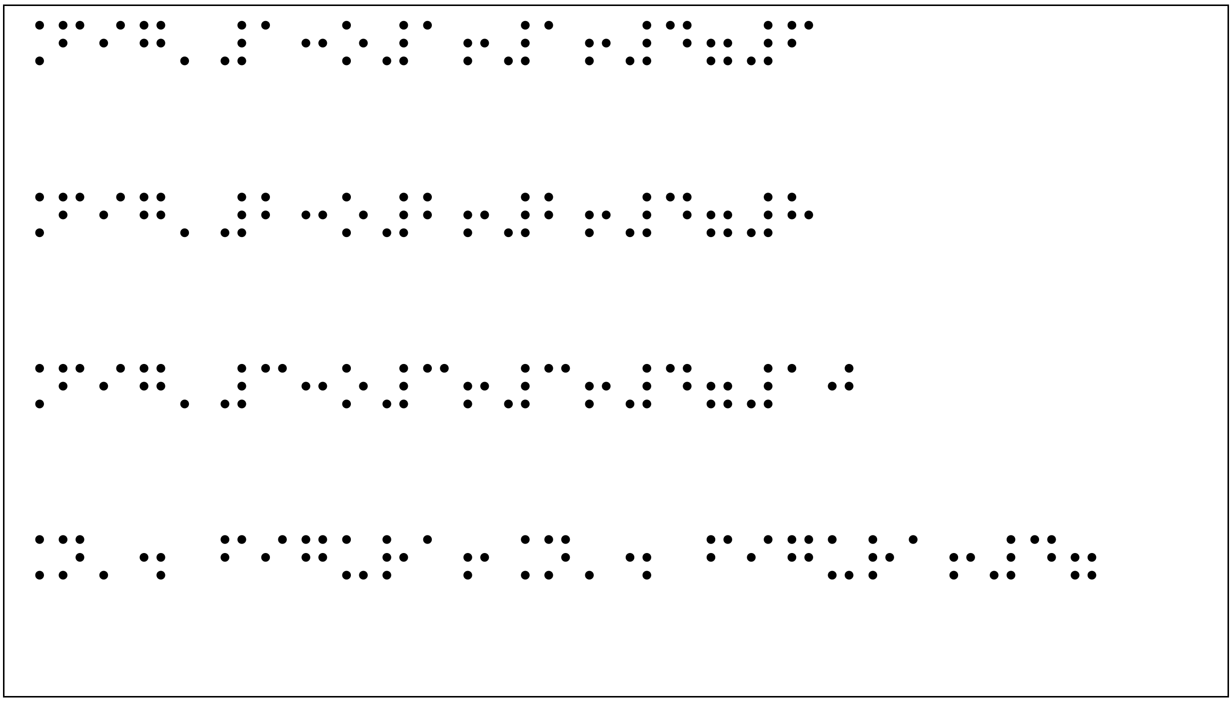


Fig.3

O aluno descreve o raciocínio seguinte:



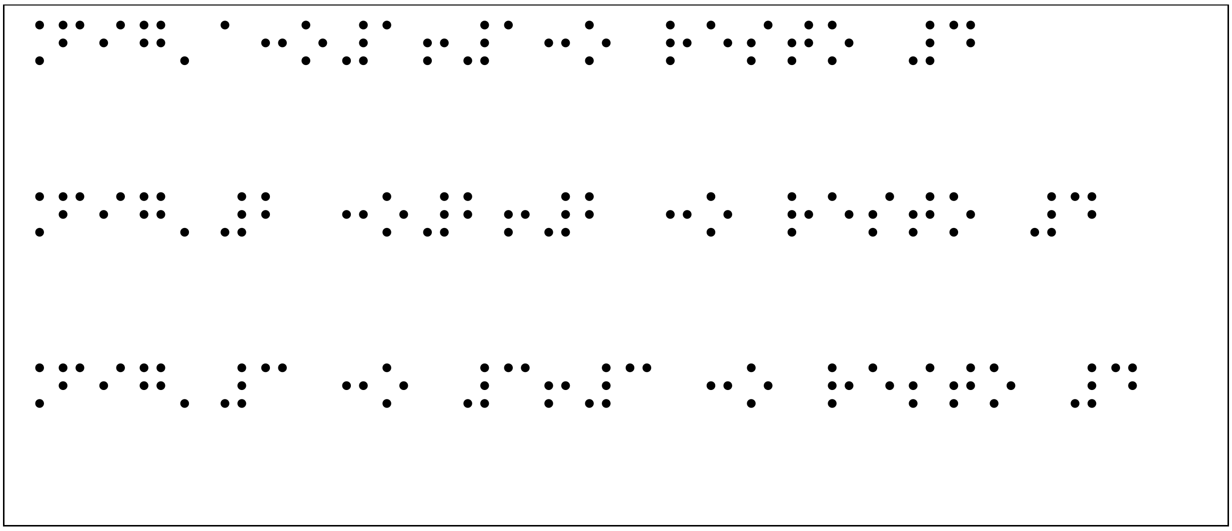


Fig.1 $\Rightarrow$ 1 + 1 + 4 = 6

Fig.2 $\Rightarrow$ 2 + 2 + 4 = 8

Fig.3 $\Rightarrow$ 3 + 3 + 4 = 10

N.º figura + N.º figura + 4 =

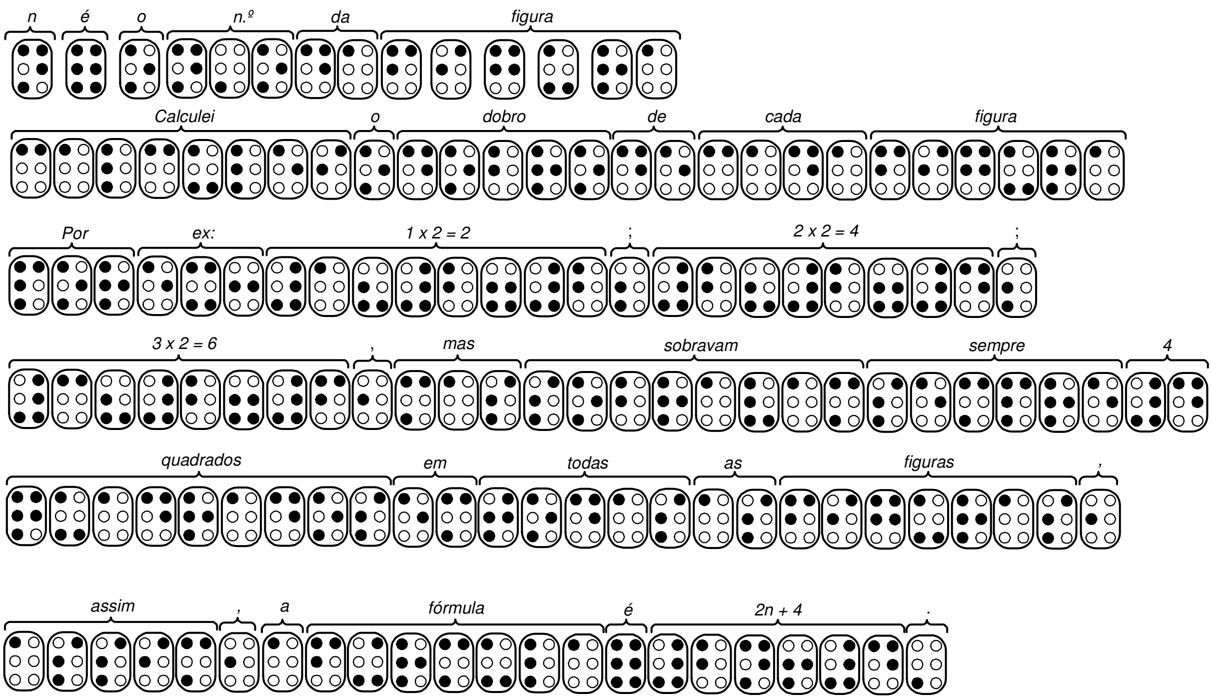
Fig.1 $\Rightarrow$ 1 + 1 $\Rightarrow$ resto 4

Fig.2 $\Rightarrow$ 2 + 2 $\Rightarrow$ resto 4

Fig.3 $\Rightarrow$ 3 + 3 $\Rightarrow$ resto 4

Existe ainda, a possibilidade de o aluno verificar que o cálculo do número de retângulos pode determinar-se através da soma do número da figura com ele próprio e adicionando 4 unidades *(n.º da figura + n.º da figura + 4*). Assim sendo, conseguem descobrir um processo que lhes permite determinar o número de retângulos em cada figura. Porém, é possível que lhes surjam algumas dificuldades na tradução algébrica desta situação e na construção da respetiva expressão simbólica. É natural que os alunos testem as suas conjeturas apenas para os primeiros casos - provavelmente, para os casos indicados no enunciado, tal como na situação apresentada.

Os alunos podem ainda encontrar processos que lhes permitam determinar o número de retângulos de cada figura, escrevendo-os em linguagem corrente e depois fazendo a sua tradução em linguagem simbólica, tal como se exemplifica:



Contudo, na situação apresentada, o aluno comete uma imprecisão, bastante frequente na maioria dos alunos, em relação ao significado da letra ao escrever o processo em linguagem natural dizendo: *"calculei o dobro de cada figura …"*. O professor deve deixar bem claro que a letra não representa um nome, ou uma abreviatura para uma palavra, mas sim um número – na situação em causa deveria dizer-se *"calculei o dobro do número de cada figura"* ou *"duas vezes o número da figura"*.

Os alunos poderão escrever primeiramente o *procedimento* em linguagem natural e só depois a tradução simbólica. Porém, nesta etapa, poderá haver alunos com dificuldade, tal como, referir que o número de retângulos de cada figura se obtém através de: $n.^{o}\ da\ figura \times n.^{o}\ da\ figura$ ou $figura + figura$ ou $o\ dobro\ da\ figura$, etc. Face a respostas deste género, o professor deve intervir, promovendo discussões como a seguinte:

Após a aceitação por parte do aluno de que o número da figura, ordem do termo, pode ser representado por uma letra, o professor poderá fazer a seguinte questão: Qual é afinal a expressão pretendida? A resposta na generalidade da turma é ***n+n*** e por incrível que possa parecer um dos alunos cegos indica a expressão ***2xn***, pelo que o professor lhe pergunta porquê? E a resposta do aluno, porque se trata da mesma letra. De seguida o professor poderá referir que por convenção o sinal multiplicativo entre um número e uma letra pode ser eliminado, ficando a expressão apenas ***2n***. Recorda-se para o perigo nesta eliminação de sinal na grafia braille, neste caso não haverá esse problema, mas se porventura estivéssemos a trabalhar com a variável ***a*** em vez de ***n***, não se poderia fazer essa eliminação devido ao facto, de a expressão tomar outro significado, ou seja, ***2a***, em braille, significaria o número **21**, ou seja, existirá sempre perigo na grafia matemática braille quando se toma como variável uma das dez primeiras letras do alfabeto.

A escrita de $\mathbf{2}\times n$ a partir da expressão $n+n$ poderá ser feita de forma intuitiva, tendo em consideração que $n+n$ representa duas vezes o "objeto" *n*. Nesta fase, alguns alunos poderão evidenciar ainda uma interpretação bastante rudimentar do conceito de "variável" (como um número generalizado).

Alguns alunos poderão chegar à expressão $\mathbf{6}+(n-\mathbf{1})\times\mathbf{2}$ após a construção e a análise de tabelas como a seguinte:

N.º da figura	N.º de quadrados
1	**6** $6+0=6+(1-1)\times 2$
2	**8** $6+2=6+(2-1)\times 2$
3	**10** $6+4=6+(3-1)\times 2$
…	…
n	$6+(n-1)\times 2$

6.3.9.5 – Considerações

A maioria dos alunos evidencia uma enorme dificuldade no que respeita ao processo de generalização simbólica, independentemente de serem ou não cegos. Prender-se-á esta questão, segundo alguns estudos, com a maturidade dos mesmos.

Assim sendo, é de extrema importância o professor estar consciente de que a escrita do processo em linguagem natural é uma etapa essencial que antecede a simbolização e que lhe pode dar significado.

A necessidade de introduzir letras no processo de generalização simbólico é também uma etapa importante no caminho para a formalização e escrita simbólica de uma generalização. O professor poderá fomentar a inserção de letras, recorrendo a situações com que o aluno já esteja familiarizado e onde as letras também são utilizadas para representar números, tal como acontece nas fórmulas de determinação de áreas e volumes, por exemplo. Todavia, é fundamental que o aluno compreenda a importância e saiba trabalhar corretamente o termo geral de uma sequência numérica. Esta importância só ficará bem clara, quando o aluno tem de determinar termos de elevada ordem, numa fase em que ainda desconhece o termo geral da sequência e, como tal, usará processos recursivos e morosos para calcular esses termos de elevada ordem. Assim sendo, a questão tempo é essencial para a resolução de problemas desta natureza, quer para os alunos cegos, quer para os restantes. O professor terá obrigatoriamente de conceder o tempo necessário a todas as etapas levadas a cabo pelo aluno. Deverá, ainda, ter uma participação ativa na resolução das primeiras tarefas deste tipo, questionando o aluno relativamente ao trabalho que está a desenvolver e assegurando-se de que questões de outra ordem, tal como dificuldades no cálculo, não interfiram no seu raciocínio.

6.3.10 - Apresentação da Atividade X: O triângulo retângulo de números ímpares

Nesta fase da aprendizagem, os alunos no geral, e tendo em conta que este tema sobre sequências já foi trabalhado em ciclos de ensino anteriores, o aluno já deverá ser capaz construir e representar, por esquema e simbolicamente, os termos de uma sequência de valores simples e traduzir, por escrito e oralmente, os raciocínios desenvolvidos.

Pretende-se, com a realização desta atividade, que o aluno consiga reconhecer o padrão numérico associado à formação do triângulo de números dado; escrever os primeiros termos da sequência dos números ímpares; reconhecer a sequência dos quadrados perfeitos; identificar cada termo da sequência de quadrados perfeitos com o resultado da soma de números ímpares consecutivos até à ordem desse termo; determinar o valor de um termo específico, conhecida a ordem desse termo, na sequência de quadrados perfeitos; usar a linguagem matemática para representar algebricamente o termo geral da sequência de quadrados perfeitos e ainda usar a linguagem matemática para representar algebricamente o termo geral da sequência da soma dos primeiros números pares consecutivos.

Pretende-se ainda, que os alunos identifiquem a sequência da soma de números ímpares consecutivos com a sequência de quadrados perfeitos. O professor pode pedir aos alunos que registem todos os raciocínios e decisões num relatório que poderá recolher no final da aula, caso o considere pertinente.

Nesta atividade, os dados já estão organizados numa tabela, em que a coluna da esquerda se refere ao número (n) da linha da torre e a coluna da direita se refere ao valor da soma dos números ímpares consecutivos até ao valor do número da linha (até n).

Por se tratar de uma atividade de natureza exploratória e investigativa, no final da mesma deverá ser feita uma exploração de uma possível extensão da atividade, determinação de um processo que permita obter a soma de números pares consecutivos. O professor pode propor, de modo análogo ao explorado para os números ímpares, a construção de uma tabela onde a coluna da esquerda seja referente ao número da linha (n) e a coluna da direita seja referente ao valor da soma dos (n) primeiros números pares consecutivos.

É ainda de referir que esta extensão prevê o estabelecimento da generalização, a escrita simbólica da mesma e o uso da expressão obtida para o cálculo da soma de um determinado número de pares consecutivos, dada uma linha específica da tabela, e não em sentido contrário, por se tratar de uma expressão de segundo grau que ao ser manuseada no sentido inverso, dado um valor específico da soma dos primeiros pares consecutivos, determinar o número da linha da tabela, ou seja, o número de parcelas da soma em causa, não seria exequível, em termos analíticos, no sétimo ano de escolaridade, atendendo ao currículo nacional.

Na discussão conjunta, o professor deve fomentar nos alunos a capacidade de comunicarem, de forma coerente e clara, o seu pensamento matemático, bem como a capacidade de analisarem e avaliarem as estratégias e o pensamento matemático usado por outros na resolução da atividade.

6.3.10.1- Enunciado da Atividade X

Observa o seguinte triângulo retângulo de números ímpares:

1
1 3
1 3 5
1 3 5 7
1 3 5 7 9
1 3 5 7 9 11
_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

a) Escreve a sétima linha.

b) Adiciona os números de uma mesma linha e completa a tabela que se segue com os resultados.

Linha n.º	**Soma dos números da linha**
1	1
2	4
3	
4	
5	
6	
7	

c) Observando os resultados obtidos, indica qual a soma dos números da oitava linha do triângulo, sem a escrever.

d) Qual é o número da linha do triângulo cuja soma dos números é 100?

e) Consegues encontrar um processo que nos indique a soma dos números de uma determinada linha do triângulo, dependendo do número da linha? Explica-o.

6.3.10.2 – Análise e estratégia de resolução da Atividade X

As alíneas a), b) e c) desta atividade estão formuladas de modo a promover o raciocínio intuitivo do aluno, são de resposta rápida e simples. Na alínea d) pretende-se que o aluno determine o número da linha do triângulo cuja soma dos números seja 100. Por último, na alínea e) pretende-se que o aluno encontre uma expressão algébrica que relacione a soma dos números de uma determinada linha do triângulo, dependendo do número da linha.

De seguida, apresenta-se a resolução da atividade:

a) A sétima linha do triângulo de números será: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

b) Após a adição dos números de uma mesma linha tem-se que:

Linha n.º	Soma dos números da linha
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

c) A soma dos números da oitava linha será: 64.

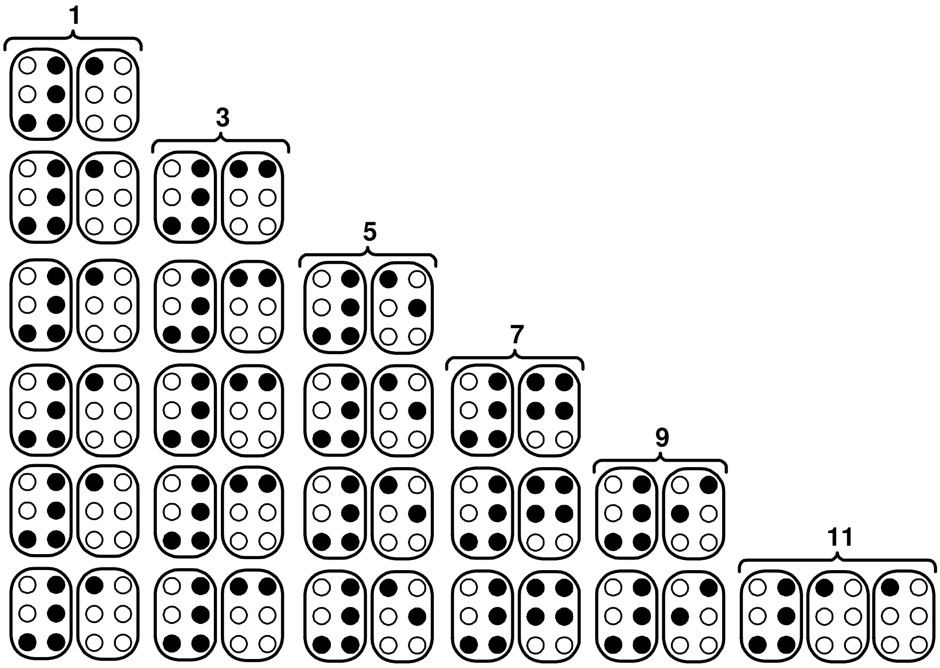
d) A linha do triângulo cuja soma dos números é 100 é a 10.ª linha.

e) A soma de uma determinada linha do triângulo é sempre o número dessa linha ao quadrado. Trata-se de uma sequência de quadrados perfeitos. Ou seja, na linha ***n***, a soma dos números será $n \times n = n^2$.

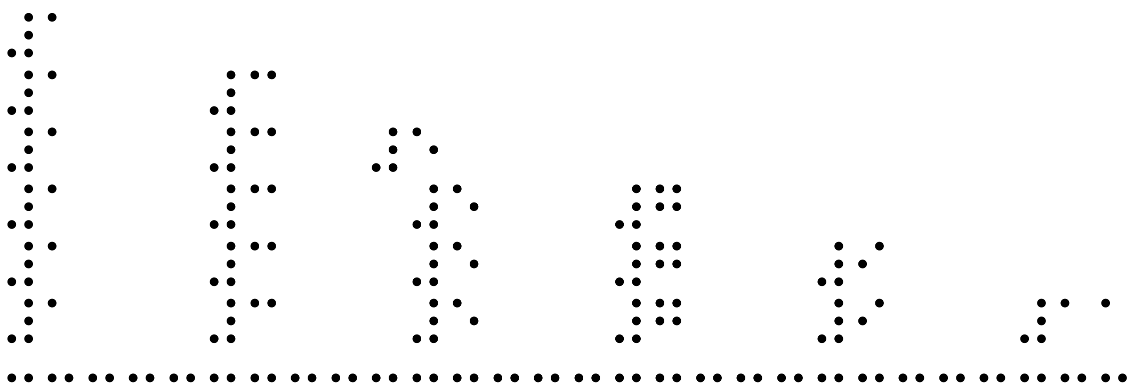
6.3.10.3 – Reformulação do enunciado da Atividade X

Uma vez mais, esta atividade encontra-se também direcionada ao aluno cego inserido numa turma de ensino regular, exemplo fácil de compreensão do enunciado, sem baixar o grau de complexidade. É um exercício que não exige um trabalho prévio do professor no que diz respeito ao enunciado, basta ditá-lo e o aluno construirá, na sua folha, com muita facilidade, o triângulo retângulo de números ímpares.

Esquematizando, em Braille aparecerá da seguinte forma:



Em contexto real, a situação surgirá da seguinte forma:



6.3.10.4 – Evidências

Margarida

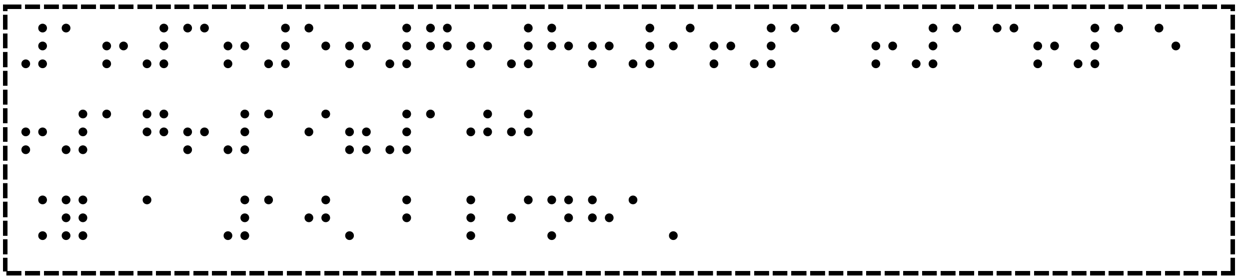


Figura 19: Resolução em Braille da alínea d) da atividade X da aluna Margarida

1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100

É a 10.ª linha

Figura 19A: Transcrição do extrato da resolução da alínea d) da atividade X da aluna Margarida

Da observação do extrato constata-se que aluna Margarida, na resolução da alínea d), utilizou a estratégia de ir somando os números ímpares consecutivos, começados em 1, e verificou que a soma dos dez primeiros números ímpares consecutivos é 100.

Rafael

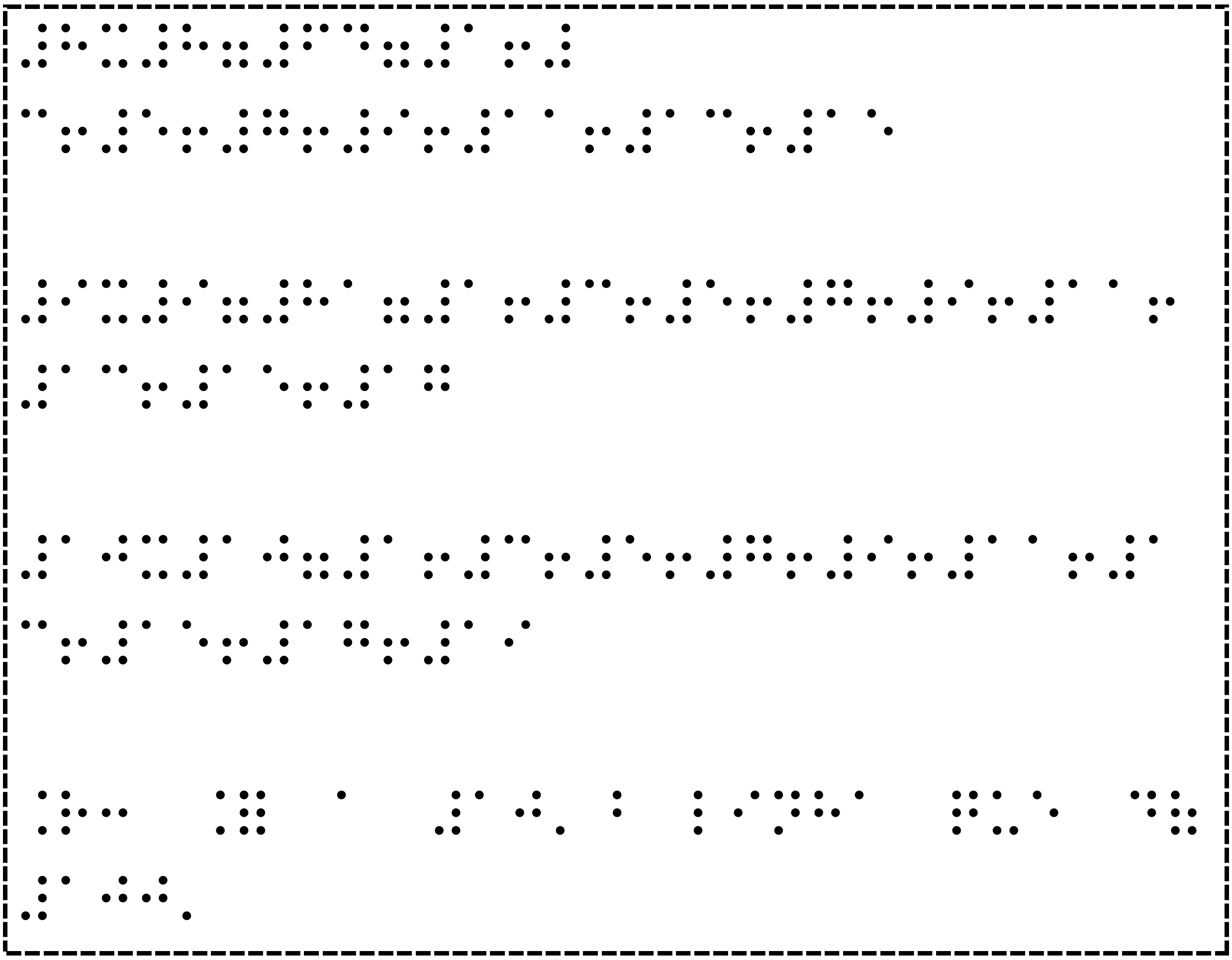


Figura 20: Resolução da alínea b) da atividade X do aluno Rafael

8 x 8 = 64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15

9 x 9 = 81 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17

10 x 10 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19

R: É a 10.ª linha que dá 100.

Figura 20A: Transcrição do extrato da resolução da alínea b) da atividade X do aluno Rafael

Na alínea b) onde é pretendido a soma dos ímpares consecutivos para as sete primeiras linhas da tabela, o aluno Rafael optou por determinar a soma dos oito, dos nove e dos dez primeiros números ímpares consecutivos, reconhecendo cada soma com o quadrado de oito, de nove e de dez, respetivamente.

Margarida

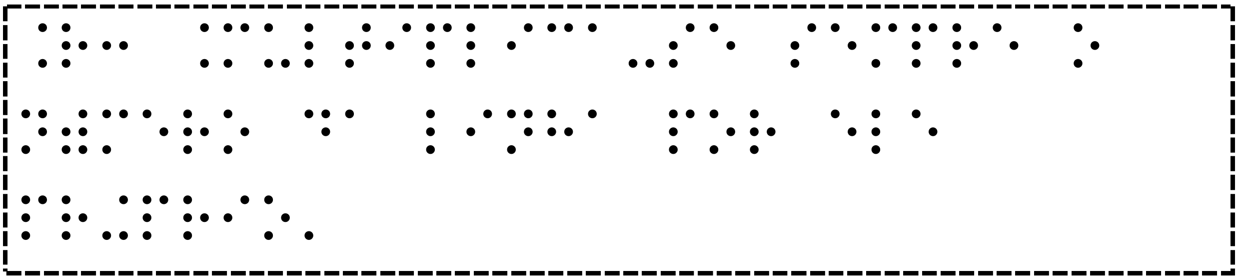


Figura 21: Resolução da alínea d) da atividade X da aluna Margarida

R: Multiplica-se sempre o número da linha por ele próprio.

Figura 21A: Transcrição do extrato da resolução da alínea d) da atividade X da aluna Margarida

Pedro

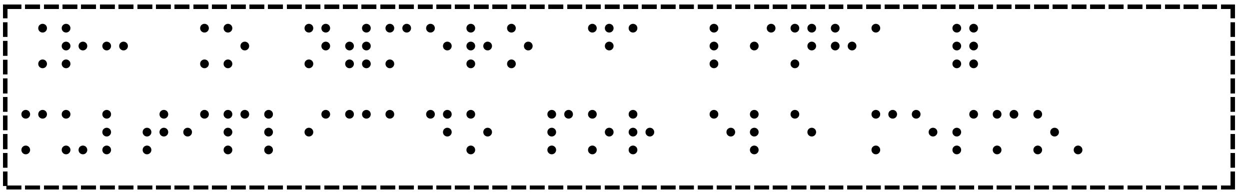


Figura 22: Resolução da alínea d) da atividade X do aluno Pedro

R: O número da linha é multiplicado por ele mesmo.

Figura 22A: Transcrição do extrato da resolução da alínea d) da atividade X do aluno Pedro

No que respeita à alínea d), observa-se que os alunos Margarida e Pedro, utilizando a linguagem natural, começam por explicar o que acontece ao valor da soma dos números de uma determinada linha.

Contudo, os alunos manifestaram dificuldades na passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica, pelo que se sugere um prolongamento da torre dos ímpares e da tabela do enunciado até à linha *n,* da seguinte forma:

Linha 1 → 1

Linha 2 → 1 3
Linha 3 → 1 3 5
Linha 4 → 1 3 5 7
Linha 5 → 1 3 5 7 9
…
Linha *n* → -----------------------------

Linha n.º	**Soma dos números da linha**
1	1
2	1 + 3 = 4
3	1 + 3 + 5 = 9
4	1 + 3 + 5 + 7 = 16
5	1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
…	…
N	?

Sugere-se que aquando da escrita simbólica da generalização, o professor promova um debate, em que os alunos comecem por explicar o que acontece ao valor da soma dos números de uma determinada linha, essencialmente através de linguagem natural, designando, posteriormente, o número de uma linha qualquer do triângulo por uma letra, por exemplo *n*.

Professor: **"**Se olharmos para linha número um, o que acontece à soma dos números dessa linha?"
Margarida: "É 1."
Professor: **"**Certo! Agora se olharmos para a linha número dois, o que acontece à soma dos números dessa linha?"

Margarida: “É 1+3, logo será 4.”

Professor: “Correto. Então como podemos relacionar o número da linha, que neste caso é 2, com o resultado da soma dos ímpares dessa linha, que é 4?”

Pedro: “É o dobro.”

Professor: “Sim, poderá ser. Mas se considerarmos a linha número três, a soma dos números ímpares dessa linha continua a ser o dobro de 3?”

Pedro: “Será sempre o dobro.”

Margarida: “Não. Para ser o dobro tinha de dar 6, logo para dar 9 tem de ser o quadrado.”

Pedro: “Tem razão. Pois 2 ao quadrado dá quatro e assim mantém-se a lógica.”

Professor: “Correto. Assim sendo, vejamos a linha 4.”

Margarida: “É o quadrado de 4 que é 16.”

Professor: “Certo. E para a linha n, como será?”

Margarida: “Será o quadrado de n, que é n^2.”

Como se pode constatar perante a discussão, o aluno Pedro remete a situação para a terceira linha, dizendo com muita convicção que se tratava do dobro, uma vez que tinha ocorrido na segunda linha. Induções desta natureza levam obrigatoriamente a que o professor alerte os seus alunos para os perigos a que estes estão sujeitos, aquando de certas generalizações por eles tomadas a partir de um número ínfimo de casos. Deve fomentar-se nos alunos uma saudável desconfiança quando trabalham com sequências e determinam generalizações.

A construção de respostas à última alínea, pode advir da exploração de processos que revelem uma ligação de modelos já trabalhados anteriormente, noutras generalizações, de outras sequências. Realça-se a importância que tem a experiência matemática vivida pelos alunos na construção de uma relação simbólica com significado matemático.

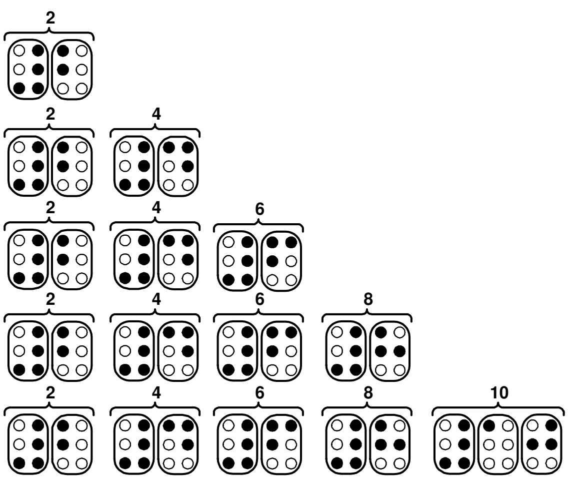
6.3.10.4.1 - Exploração da extensão da Atividade X

Tendo em conta a dificuldade subjacente nesta extensão da atividade no que diz respeito ao pensamento matemático e à estratégia de ensino da mesma, apresenta-se de seguida um processo que indique o valor da soma dos *n* primeiros pares consecutivos.

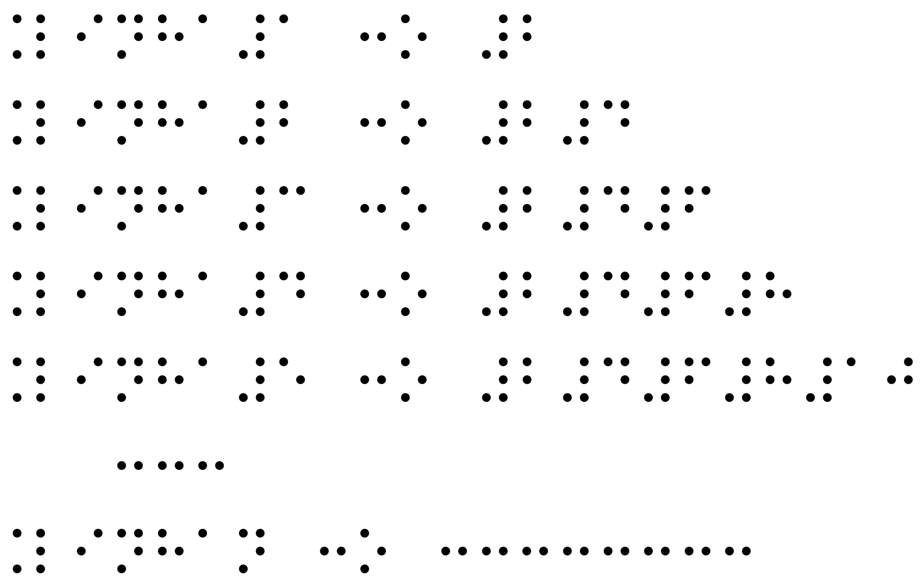
Assim sendo, propõe-se ao aluno, numa primeira fase, que descreva um triângulo retângulo com números pares consecutivos, tal como fez para o triângulo retângulo de números ímpares. Ou seja,

Linha 1 → 2
Linha 2 → 2   4
Linha 3 → 2   4   6
Linha 4 → 2   4   6   8
Linha 5 → 2   4   6   8   10
…
Linha *n* → -----------------------------

Assim, em Braille ficará:



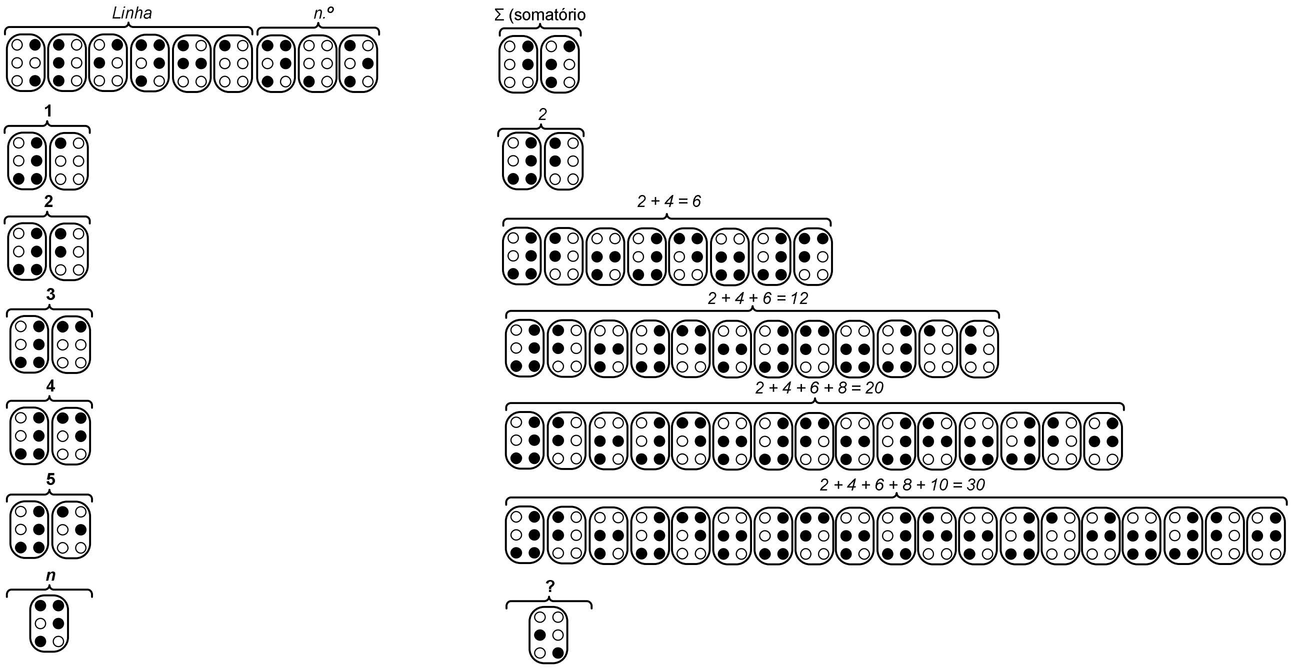
Em contexto real, o triângulo aparecerá da seguinte forma:



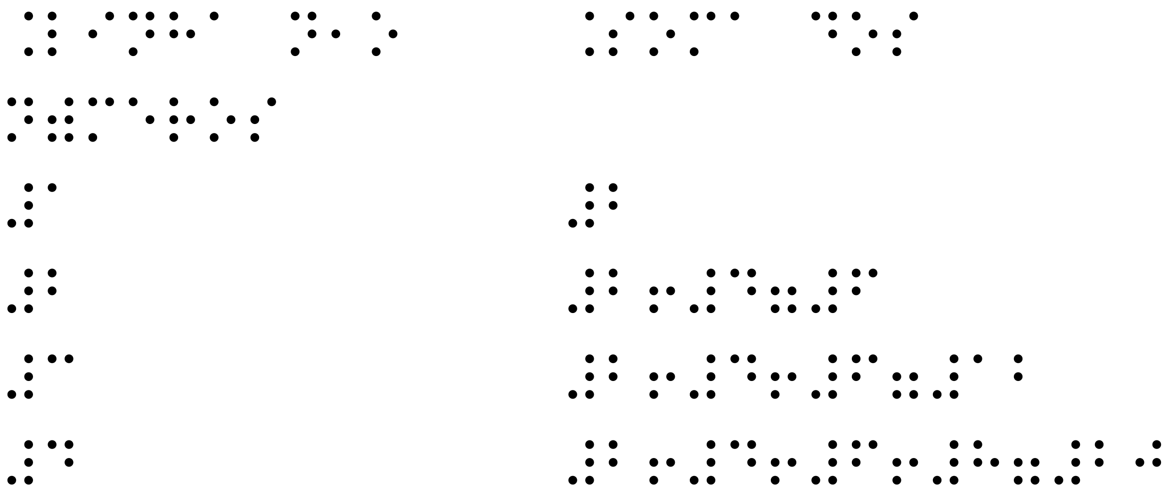
Numa segunda fase, e estando o aluno a visualizar os números pares consecutivos, propõe-se que se construa uma tabela com duas colunas, em que a primeira refere-se ao número da linha e a segunda à soma dos números que contém a linha. Ou seja:

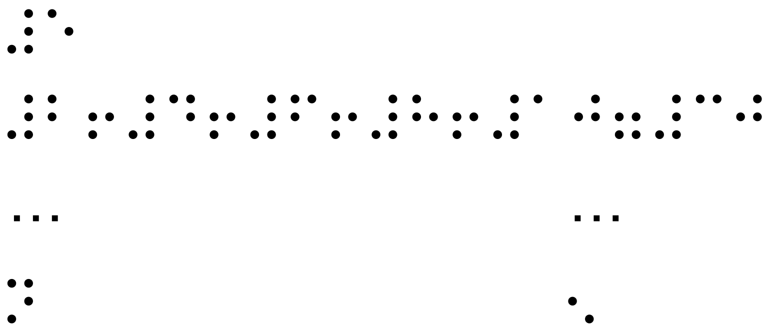
Linha n.º	**Soma dos números da linha**
1	2
2	2 + 4 = 6
3	2 + 4 + 6 = 12
4	2 + 4 + 6 + 8 = 20
5	2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30
…	…
n	?

Em Braille,



Em contexto real, a tabela surgirá da seguinte forma:





Repare-se que, na identificação dada à segunda coluna, utilizou-se o símbolo de somatório como forma de simplificação e ao mesmo tempo podemos de uma forma progressiva ir introduzindo nova simbologia.

Para a exploração da soma dos primeiros números pares consecutivos, pode ser considerada a generalização obtida para a soma dos primeiros números ímpares consecutivos, procedendo do seguinte modo:

Linha n.º	**Soma dos números da linha**
1	2 $\quad \mathbf{1^2+1=2}$
2	2 + 4 = 6 $\quad \mathbf{2^2+2=6}$
3	2 + 4 + 6 = 12 $\quad \mathbf{3^2+3=12}$
4	2 + 4 + 6 + 8 = 20 $\quad \mathbf{4^2+4=20}$
5	2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 $\quad \mathbf{5^2+5=30}$
…	…
n	? $\quad n^2+n$

6.3.10.5 – Considerações

A estratégia de reformulação do enunciado foi bem sucedida, uma vez que os alunos manifestaram uma boa compreensão do mesmo. Devido à complexidade da atividade e sua extensão, houve a necessidade de uma abordagem diferente na sua resolução por parte do professor, apresentando estratégias. Constataram-se algumas dificuldades dos alunos nomeadamente, no que se refere à transição da linguagem natural para a linguagem algébrica e na capacidade de comunicarem o seu pensamento matemático, de uma forma clara e coerente.

O professor deve estar consciencializado de que o uso da linguagem algébrica como forma de comunicar se trata de um processo que se desenvolve gradualmente. Convém, essencialmente, desenvolver desde logo nos alunos, a capacidade de comunicarem o seu pensamento matemático, de forma coerente e clara, ao professor e aos colegas, percebendo, deste modo, que os símbolos atuam como facilitadores dessa comunicação.

6.4 – Análise dos resultados obtidos no Miniteste de Avaliação de Conhecimentos – *Sequências e Regularidades*

O Miniteste de avaliação de conhecimentos consiste em resolver três questões no âmbito do tópico *Sequências e Regularidades*, sendo que a primeira questão trata-se de uma sequência numérica em tabela, a segunda questão é dado a conhecer um termo geral de uma sequência e a terceira e última questão trata-se de uma sequência pictórica.

É de referir que a aplicação do Miniteste de avaliação foi feito em momentos diferentes para cada um dos alunos, estando o professor presente em todos eles, questionando o aluno no final da realização do mesmo sobre todos os processos de raciocínio por eles desenvolvidos.

Evidências da questão 1.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*

Margarida

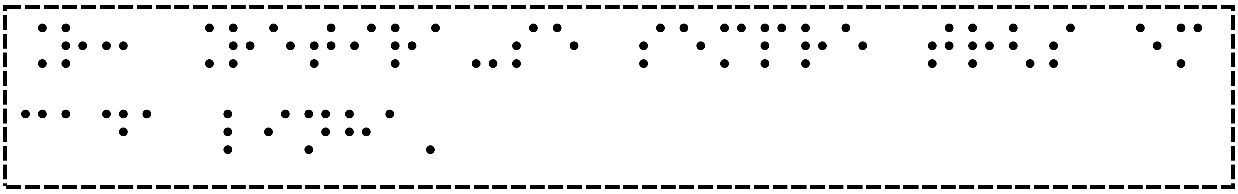


Figura 23: Extrato da resolução em Braille da questão 1.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

R: Retira-se sempre três em cada linha.

Figura 23A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

A aluna Margarida identifica um padrão presente na sequência desta questão, como se observa no seu extrato de resolução e imediatamente refere, que o melhor seria determinar o termo geral, uma vez que será um meio facilitador para resolver as futuras questões.

Rafael

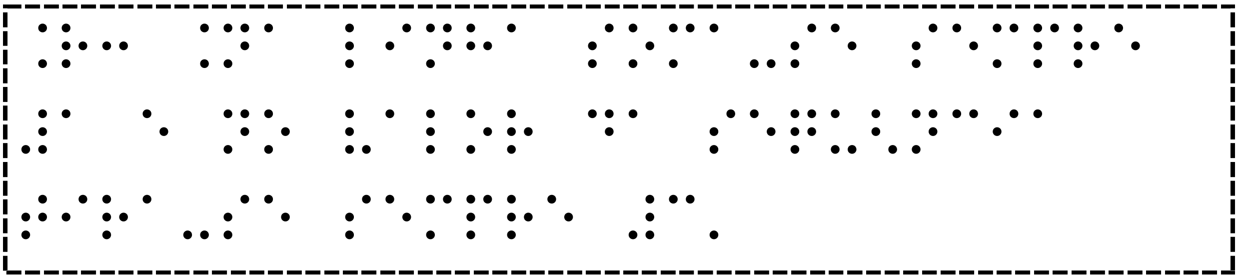


Figura 24: Extrato da resolução em Braille da questão 1.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

R: Na linha soma-se sempre 1 e no valor da sequência tira-se sempre 3.

Figura 24A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

O Rafael manifesta algumas dificuldades na resolução desta questão, apenas consegue encontrar regularidades em cada uma das linhas.

Através da observação do seu extrato de resolução, constata-se que ele procura uma caraterística repetitiva que seja semelhante a todos termos, procurando um padrão que os caracterize.

Todavia, quando confrontado com a procura de uma relação entre o número da linha e o termo da sequência, o aluno consegue somente verificar que quando o número da linha é ímpar, o termo correspondente da sequência é par e deixa de procurar outras relações que permitam obter o termo geral da sequência.

Pedro

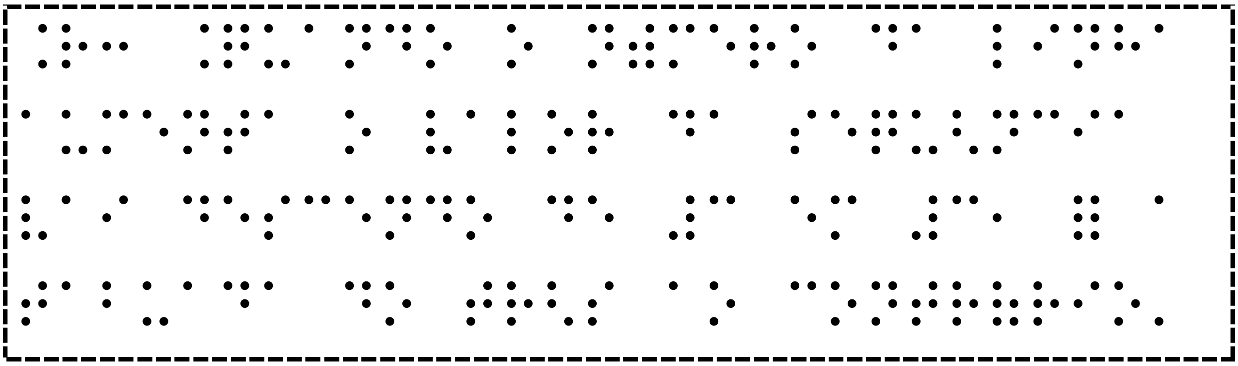


Figura 25: Extrato da resolução em Braille da questão 1.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

R: Quando o número da linha aumenta o valor da sequência vai descendo de 3 em 3, é a tabuada do três ao contrário.

Figura 25A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

O aluno Pedro tenta procurar padrões que caraterizem a construção da sequência. Assim sendo, encontra na segunda linha (valor da sequência) uma diferença de três unidades entre cada termo da sequência e identifica os múltiplos de três.

<u>Evidências da questão 1.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*</u>

Margarida

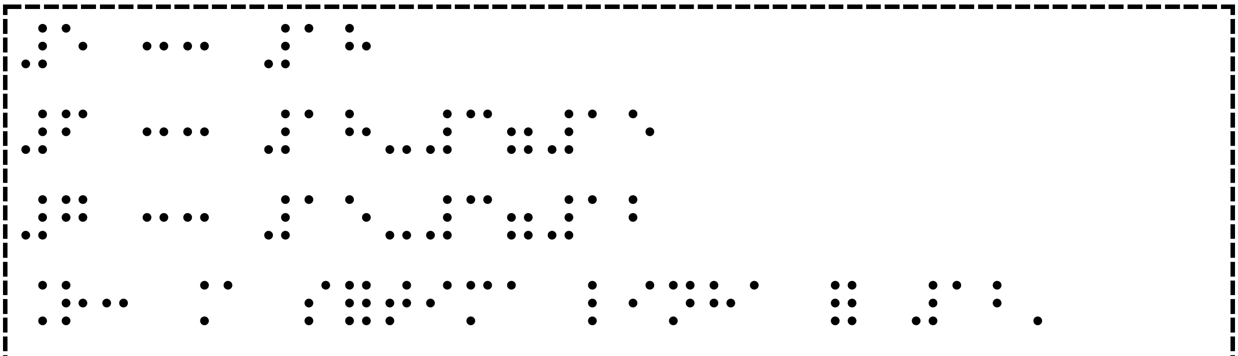


Figura 26: Extrato da resolução em Braille da questão 1.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

5 --- 18

6 --- 18 - 3 = 15

7 --- 15 – 3 = 12

R: A sétima linha é 12.

Figura 26A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

Uma vez que o termo pretendido não se encontra muito longe do último termo dado, a aluna continua a construção da sequência até chegar à sétima linha.

Rafael

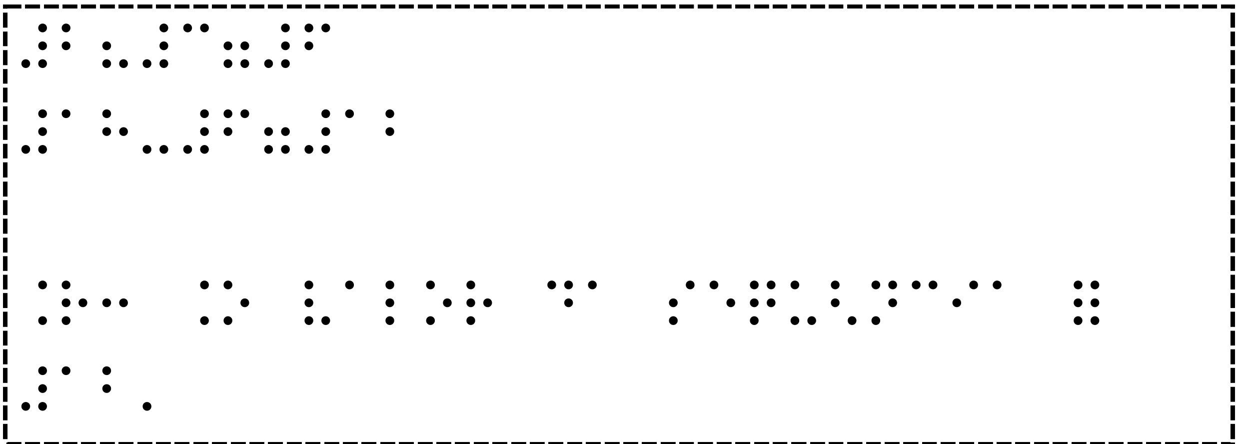


Figura 27: Extrato da resolução em Braille da questão 1.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

2 x 3 = 6

18 - 6 = 12

R: O valor da sequência é 12.

Figura 27A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

Na resolução desta questão, o Rafael realiza as seguintes operações matemáticas: Uma vez que faltam duas linhas e como em cada linha se subtrai 3 unidades, significa que irá retirar o dobro de três (6) à última linha da tabela e assim determina o valor da sequência correspondente à sétima linha.

Pedro

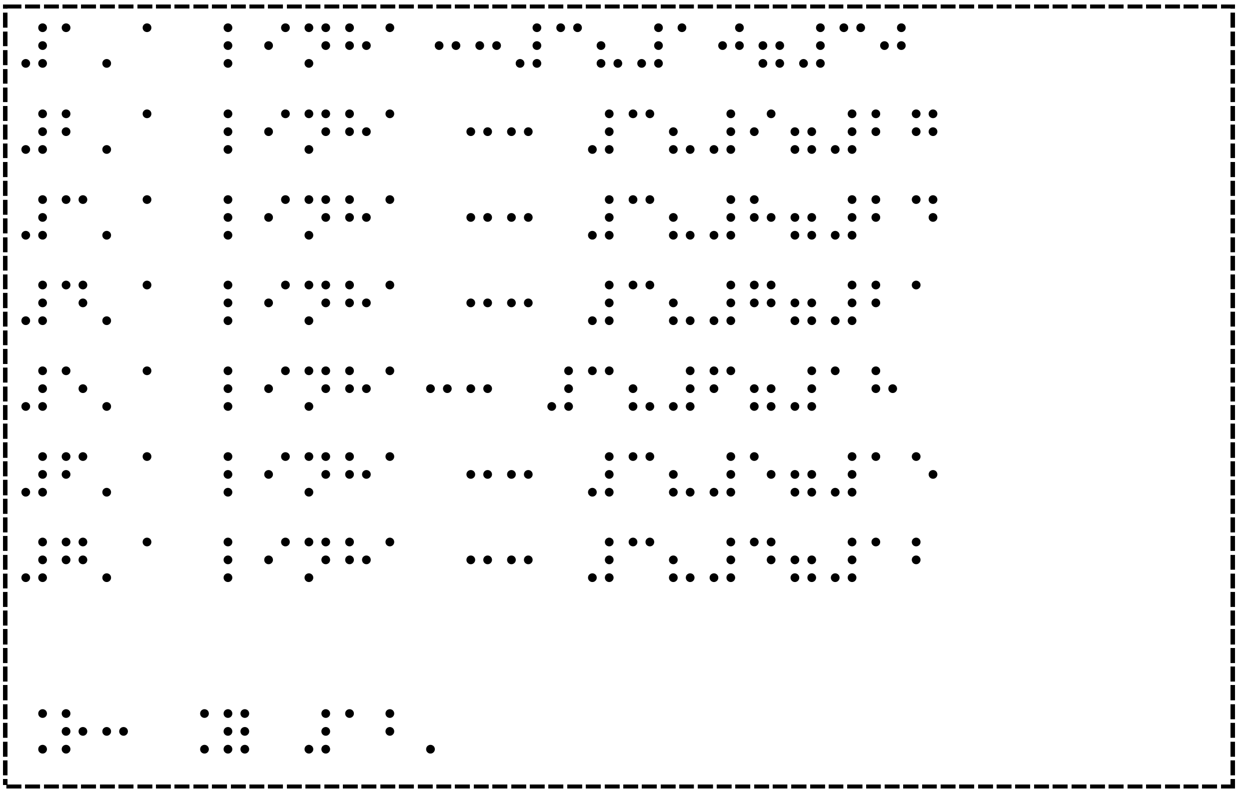


Figura 28: Extrato da resolução em Braille da questão 1.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

1ª linha -- 3 x 10 = 30

2ª linha -- 3 x 9 = 27

3ª linha – 3 x 8 = 24

4ª linha – 3 x 7 = 21

5ª linha – 3 x 6 = 18

6ª linha – 3 x 5 = 15

7ª linha – 3 x 4 = 12

R: É 12.

Figura 28A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

O aluno Pedro, ao constatar que os termos da sequência correspondem à tabuada do três de ordem contrária, opta por continuar a construir a sequência através da repetição deste padrão e assim chega ao encontro do termo de ordem sete. É de referir que ao mesmo tempo que escrevia na sua folha, verbalizava a tabuada do três.

<u>Evidências da questão 1.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*</u>

Margarida

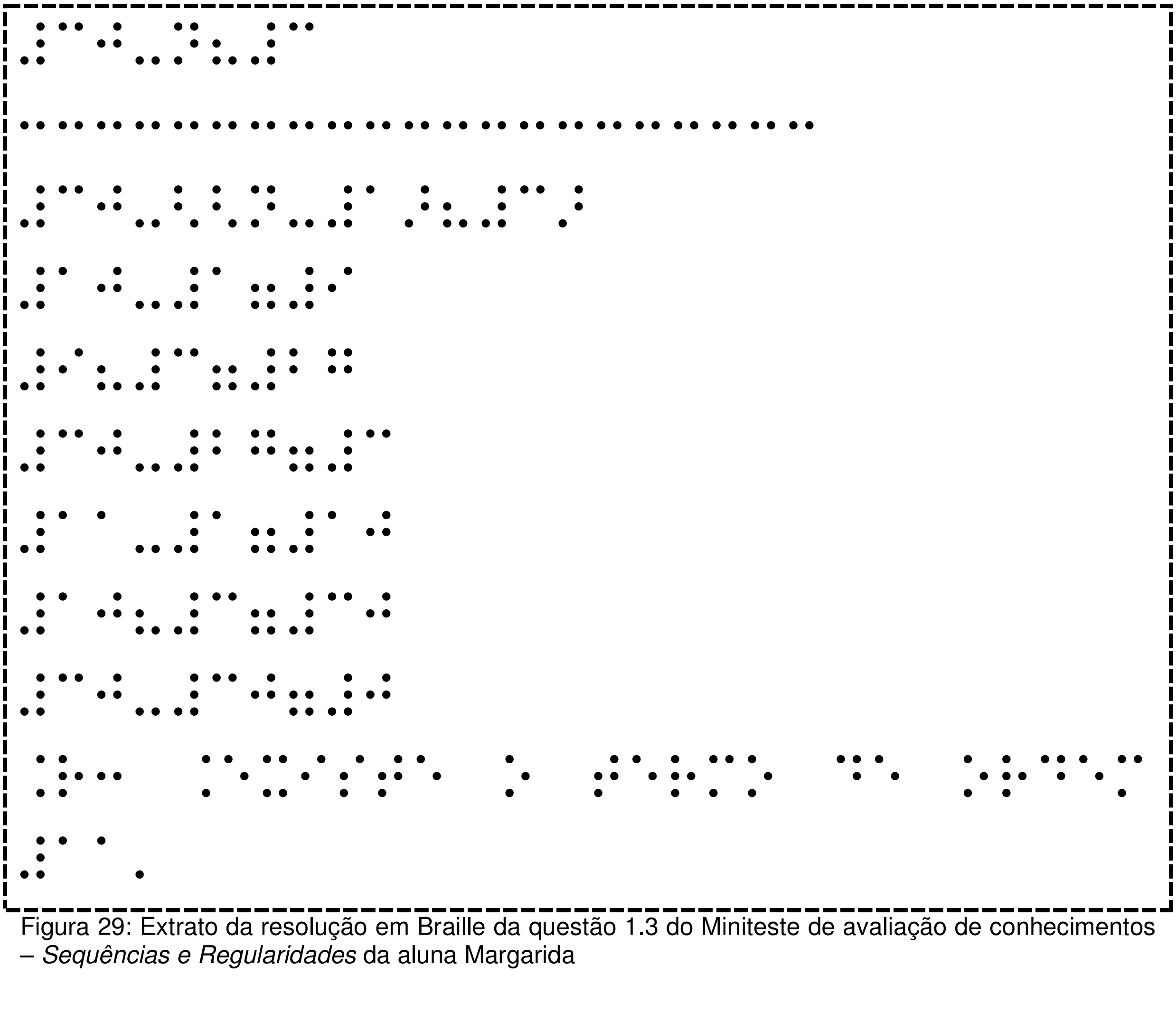


Figura 29: Extrato da resolução em Braille da questão 1.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

30 – n x 3

----

30 – ((n – 1) x 3)

10 – 1 = 9

9 x 3 = 27

30 - 27 = 3

11 – 1 = 10

10 x 3 = 30

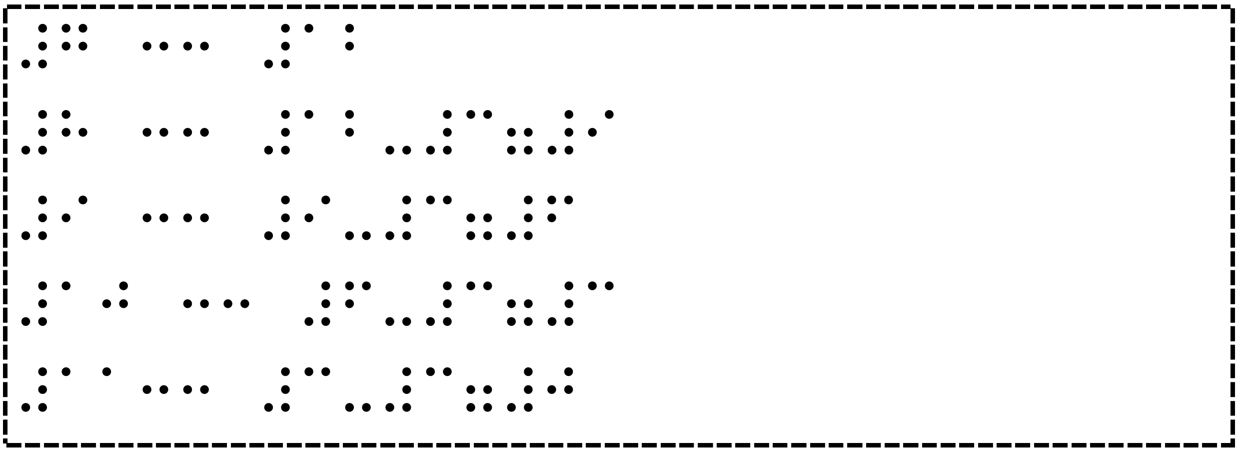
30 – 30 = 0

R: Existe o termo de ordem 11.

Figura 29A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

A aluna Margarida, desde cedo manifestou estar interessada em determinar a regra geral. Aqui começa por pensar em várias expressões, tendo presente que o número trinta e a multiplicação por três estarão presentes. Se se reparar, a primeira expressão que a aluna escreve é 30 - *n* x 3, mas acaba por perceber que não é possível através de cálculos mentais.

Rafael



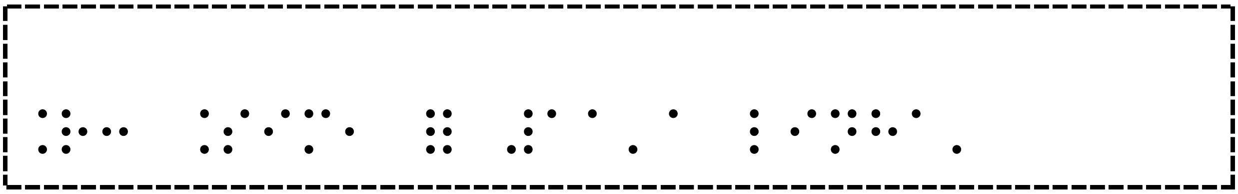


Figura 30: Extrato da resolução em Braille da questão 1.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

7 -- 12

8 -- 12 – 3 = 9

9 – 9 – 3 = 6

10 – 6 – 3 = 3

11 – 3 – 3 = 0

R: Sim, é 11ª linha.

Figura 30A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

O aluno Rafael, na determinação da linha que corresponde ao termo zero continua o padrão existente e constrói todos os termos da sequência, subtraindo sempre três até chegar à linha onze.

Pedro

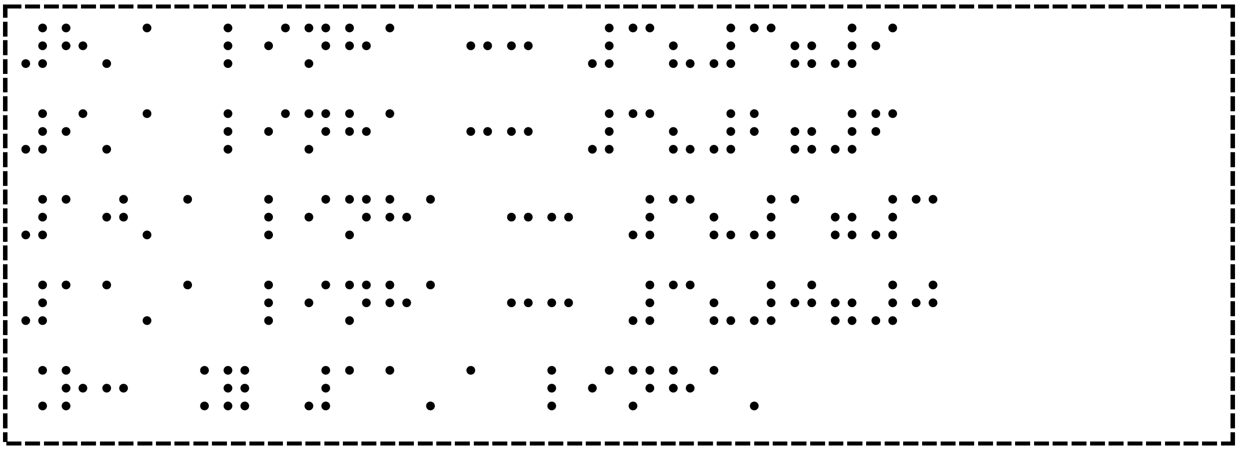


Figura 31: Extrato da resolução em Braille da questão 1.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

8ª linha -- 3 x 3 = 9

9ª linha -- 3 x 2 = 6

10ª linha – 3 x 1 = 3

11ª linha – 3 x 0 = 0

R: É 11ª linha.

Figura 31A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

O aluno Pedro, à semelhança do aluno Rafael dá continuidade à construção de todos os termos da sequência até ao termo zero.

Evidências da questão 1.4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*

Margarida

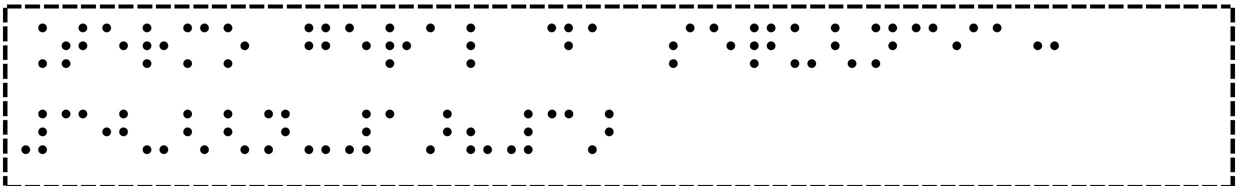


Figura 32: Extrato da resolução em Braille da questão 1.4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

Termo geral da sequência:

30 – ((n – 1) x 3)

Figura 32A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1.4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

Aquando da correção do Miniteste de avaliação, solicitou-se à aluna Margarida que descrevesse o raciocínio que desenvolveu para obter aquela expressão.

A aluna referiu: "*O número 30 corresponde ao início, depois multipliquei por 3, por que dá-me o número de três que retiramos e n-1 é para ficar igual ao número da linha.*"

A aluna revela, deste modo uma enorme facilidade em procurar e descrever uma regra geral, o que aponta um raciocínio algébrico bem desenvolvido.

Relativamente aos alunos Rafael e Pedro apoiaram-se numa construção recursiva da sequência e não conseguiram estabelecer uma relação algébrica entre o número da linha e o termo da sequência, o que os impediu de construírem uma expressão geral.

<u>Evidências da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*</u>

Margarida

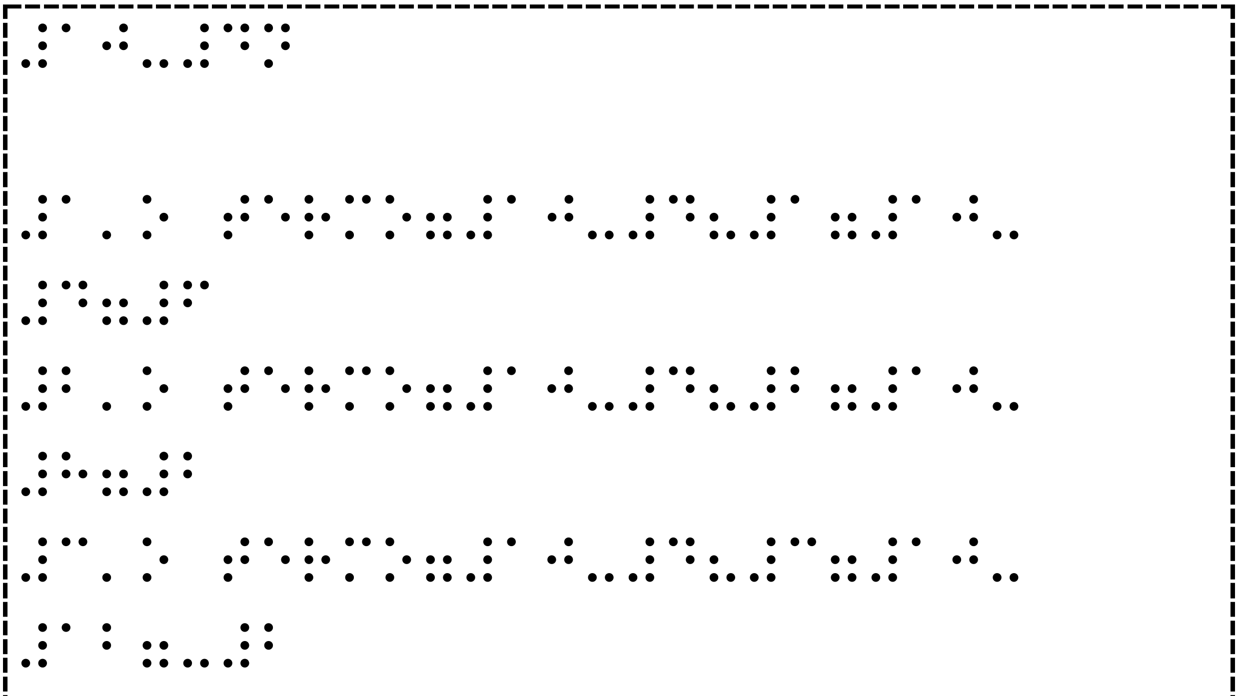


Figura 33: Extrato da resolução em Braille da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

10 - 4n

$1^{\underline{o}}$ termo = 10 – 4 x 1 = 10 – 4 = 6

$2^{\underline{o}}$ termo = 10 – 4 x 2 = 10 – 8 = 2

$3^{\underline{o}}$ termo = 10 – 4 x 3 = 10 – 12 = -2

Figura 33A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

Rafael

Figura 34: Extrato da resolução em Braille da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

10 – 4 x 1 = 6

10 – 4 x 2 = 2

10 – 4 x 3 = -2

Figura 34A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

Pedro

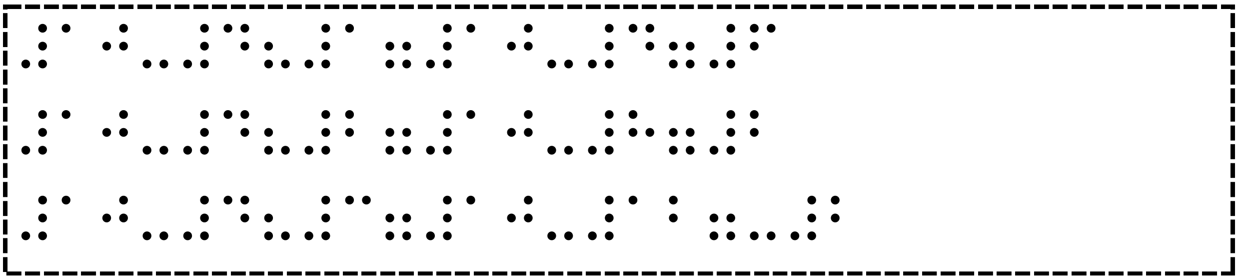


Figura 35: Extrato da resolução em Braille da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

10 – 4 x 1 = 10 – 4 = 6

10 – 4 x 2 = 10 – 8 = 2

10 – 4 x 3 = 10 – 12 = -2

Figura 35A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

Todos os alunos evidenciaram saber determinar termos a partir de um termo geral dado.

Evidências da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*

Margarida

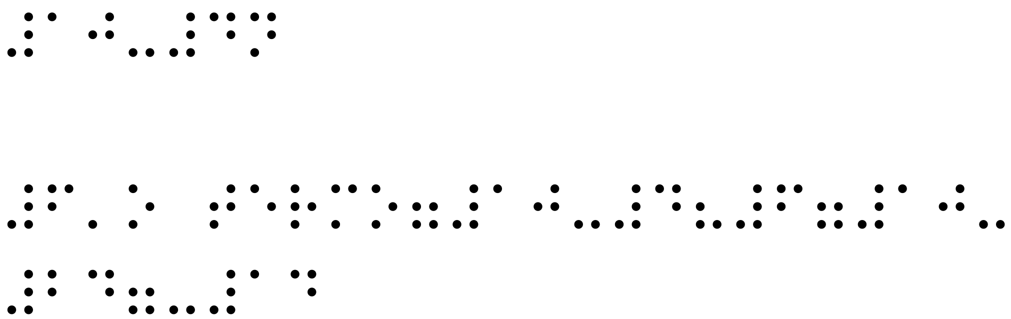


Figura 36: Extrato da resolução em Braille da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

10 - 4n

6º termo = 10 – 4 x 6 = 10 – 24 = -14

Figura 36A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

Rafael

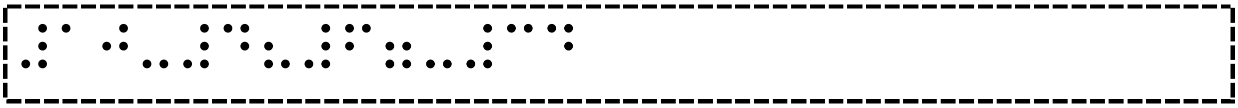


Figura 37: Extrato da resolução em Braille da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

10 – 4 x 6 = -34

Figura 37A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

Pedro

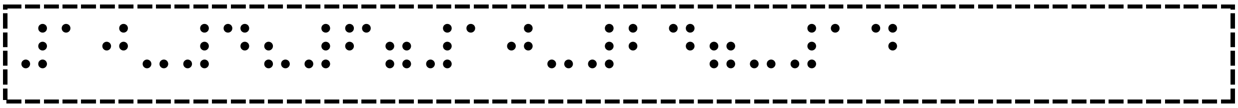


Figura 38: Extrato da resolução em Braille da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

10 – 4 x 6 = 10 – 24 = -14

Figura 38A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

Mais uma vez, todos os alunos souberam determinar um termo de uma dada ordem, conhecido o termo geral da sequência. Refere-se apenas, que o aluno Rafael cometeu um erro de cálculo.

<u>Evidências da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*</u>

Margarida

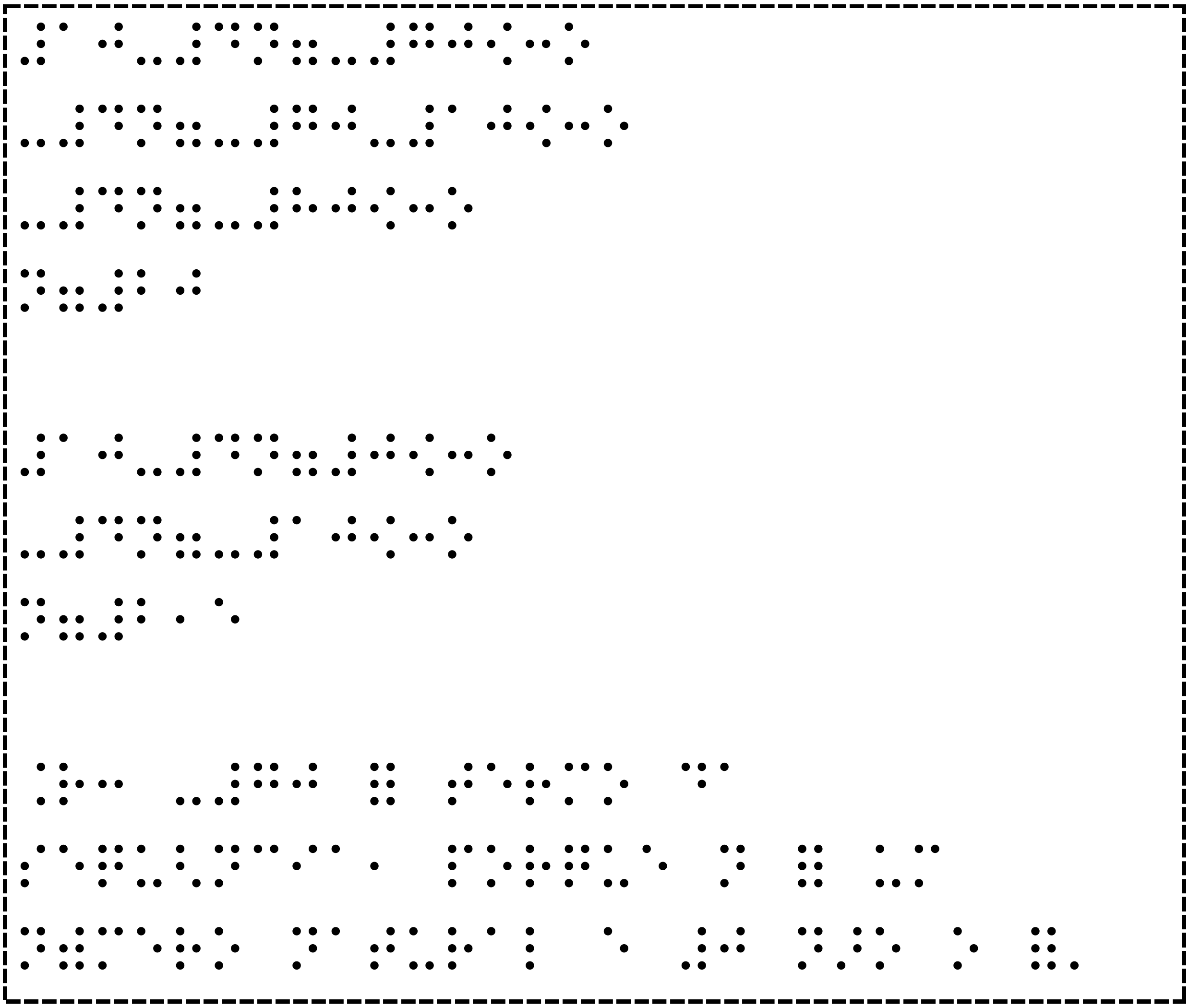


Figura 39: Extrato da resolução em Braille da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

$10 - 4n = -70 \Leftrightarrow$

$-4n = -70 - 10 \Leftrightarrow$

$-4n = -80 \Leftrightarrow$

$n = 20$

$10 - 4n = 0 \Leftrightarrow$

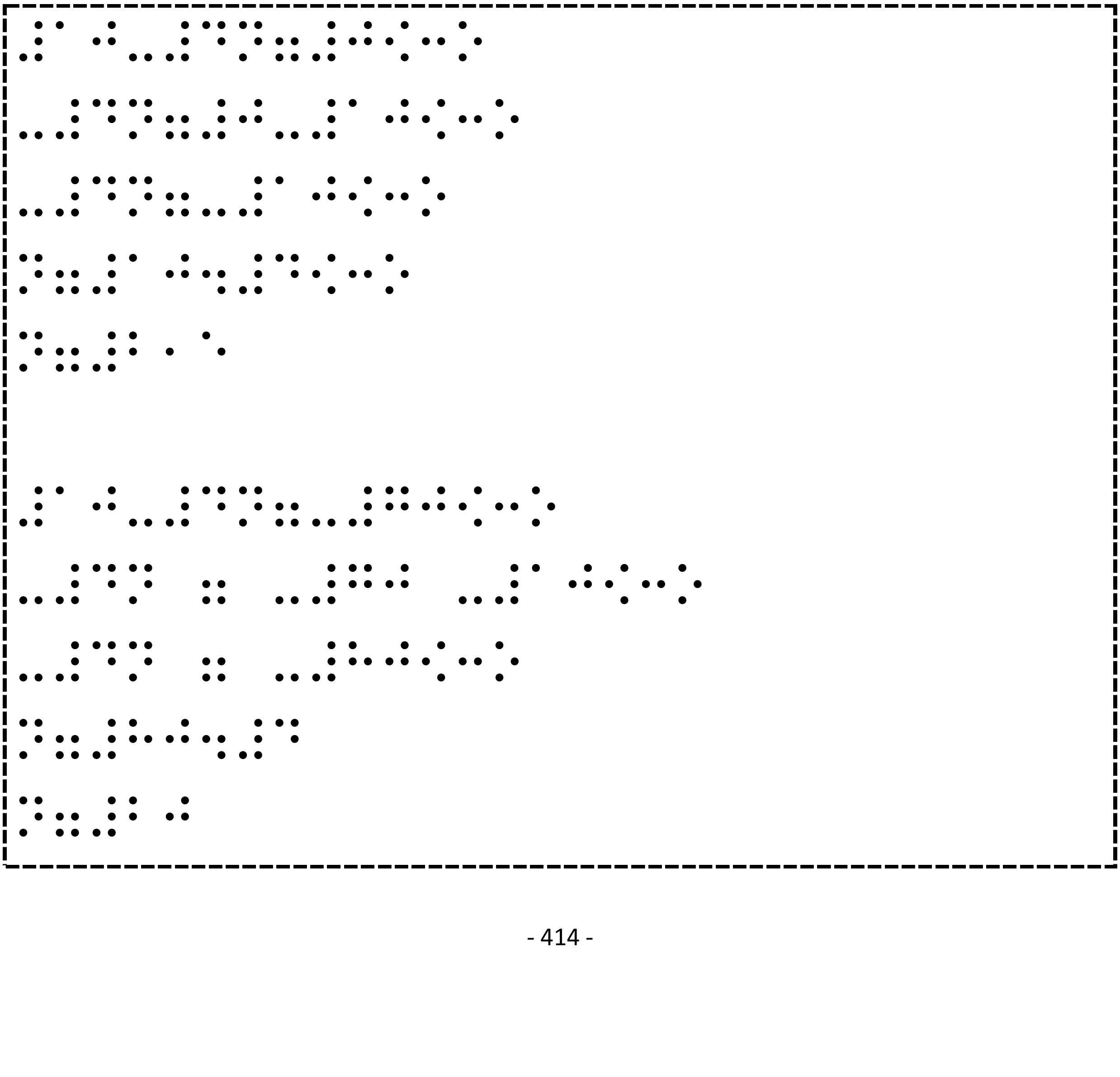
$-4n = -10 \Leftrightarrow$

$n = 2,5$

R: -70 é termo da sequência, porque n é um número natural e 0 não o é.

Figura 39A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

Rafael



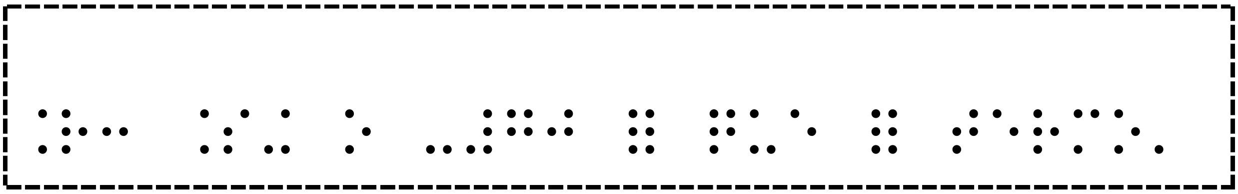


Figura 40: Extrato da resolução em Braille da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

$10 – 4n = 0 \Leftrightarrow$

$-4n = 0 -10 \Leftrightarrow$

$-4n = -10 \Leftrightarrow$

$n= \frac{10}{4}$

$10 - 4n = -70 \Leftrightarrow$

$-4n = -70 -10 \Leftrightarrow$

$-4n = -80 \Leftrightarrow$

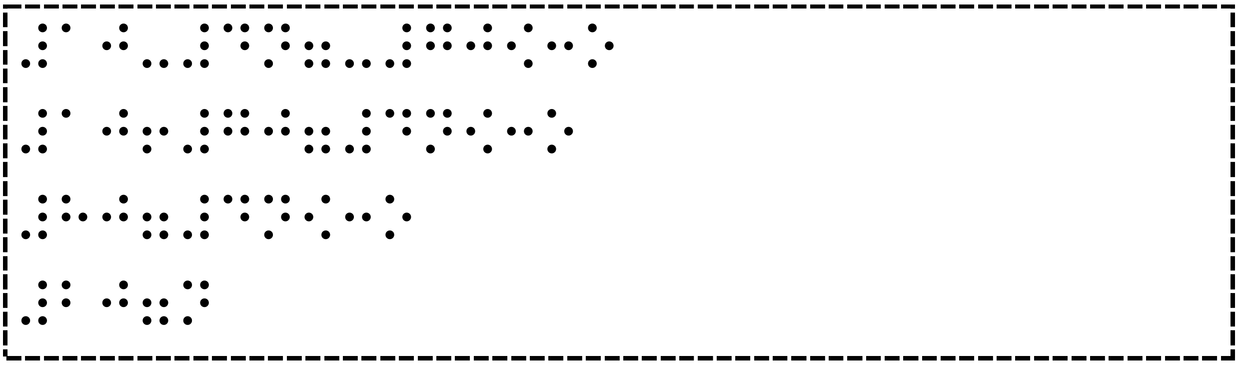
$n = \frac{80}{4}$

$n = 20$

R: Só o -70 é que é termo.

Figura 40A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

Pedro



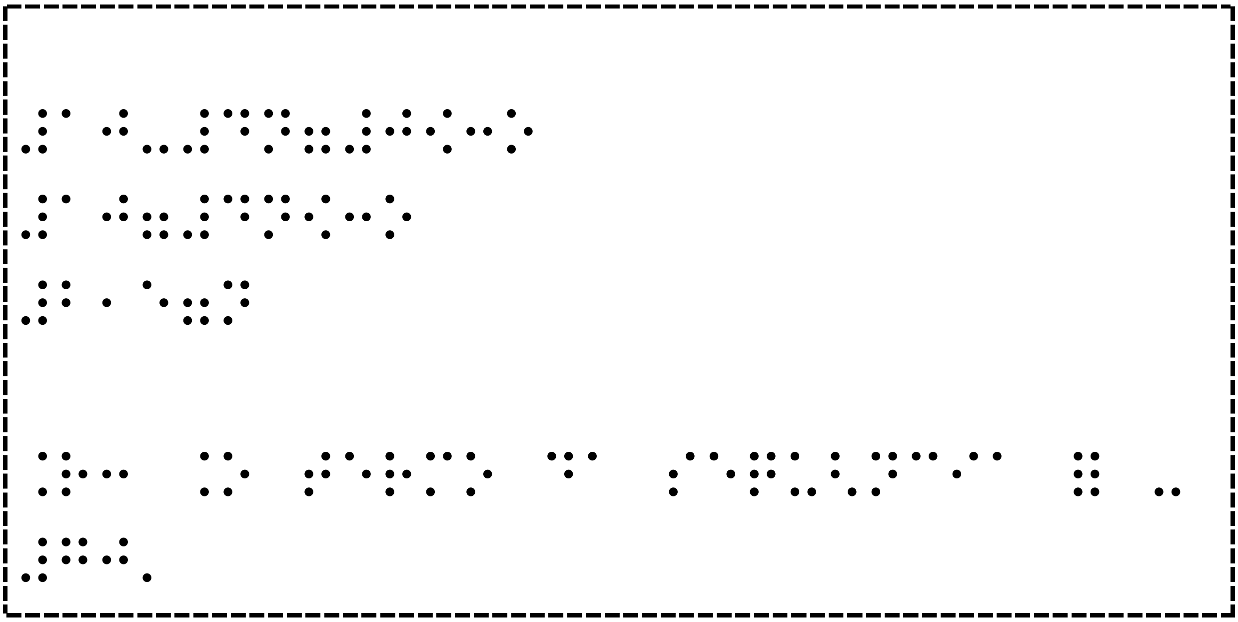


Figura 41: Extrato da resolução em Braille da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

$10 - 4n = -70 \Leftrightarrow$

$10 + 70 = 4n \Leftrightarrow$

$80 = 4n \Leftrightarrow$

$20 = n$

$10 – 4n = 0 \Leftrightarrow$

$10 = 4n \Leftrightarrow$

$2{,}5 = n$

R: O termo da sequência é -70.

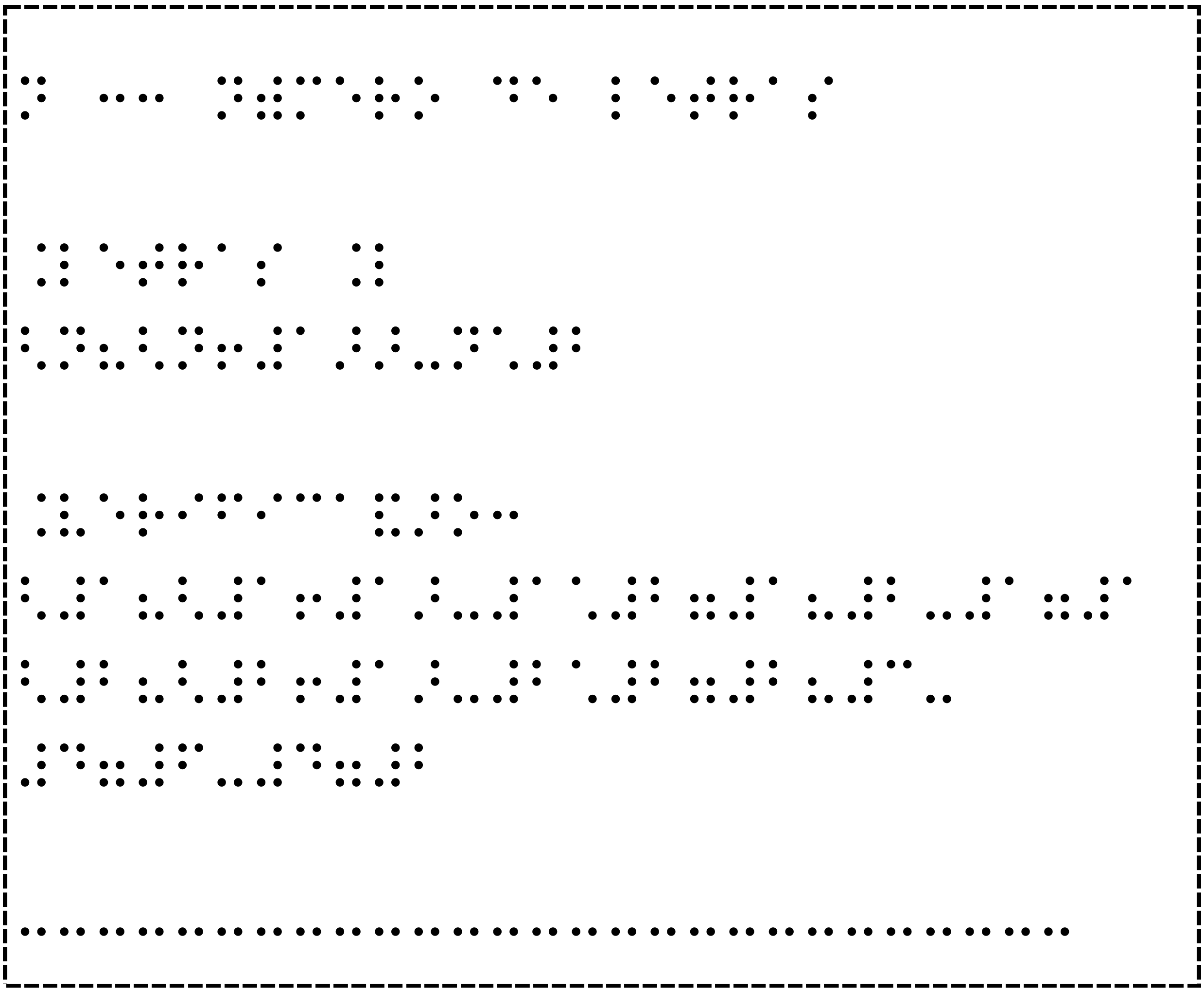
Figura 41A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

Na questão 2.3, os alunos não evidenciaram quaisquer dificuldades de resolução, tendo demonstram que entenderam bem o conceito de termo e ordem do termo de uma sequência. Contudo, apenas a aluna Margarida evidencia, na sua resolução, o motivo pela qual os números a verificar são ou não termos da sequência, embora no enunciado não seja pedida qualquer justificação.

<u>Evidências da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*</u>

Na realização desta questão, a aluna Margarida começa por procurar padrões na figura e refere que "*quando aumenta uma linha, aumenta uma coluna ou então, quando há mais um L, forma-se quadrados de B com mais uma unidade do que o anterior*". Mais uma vez, procura encontrar a expressão algébrica, raciocínio que faz mentalmente e quando tenta explicar como aumenta o número de letras L e de letras B, observa que as letras B formam quadrados perfeitos e então terá de utilizar a expressão n^2, e a partir daí escreve na sua folha:

Margarida



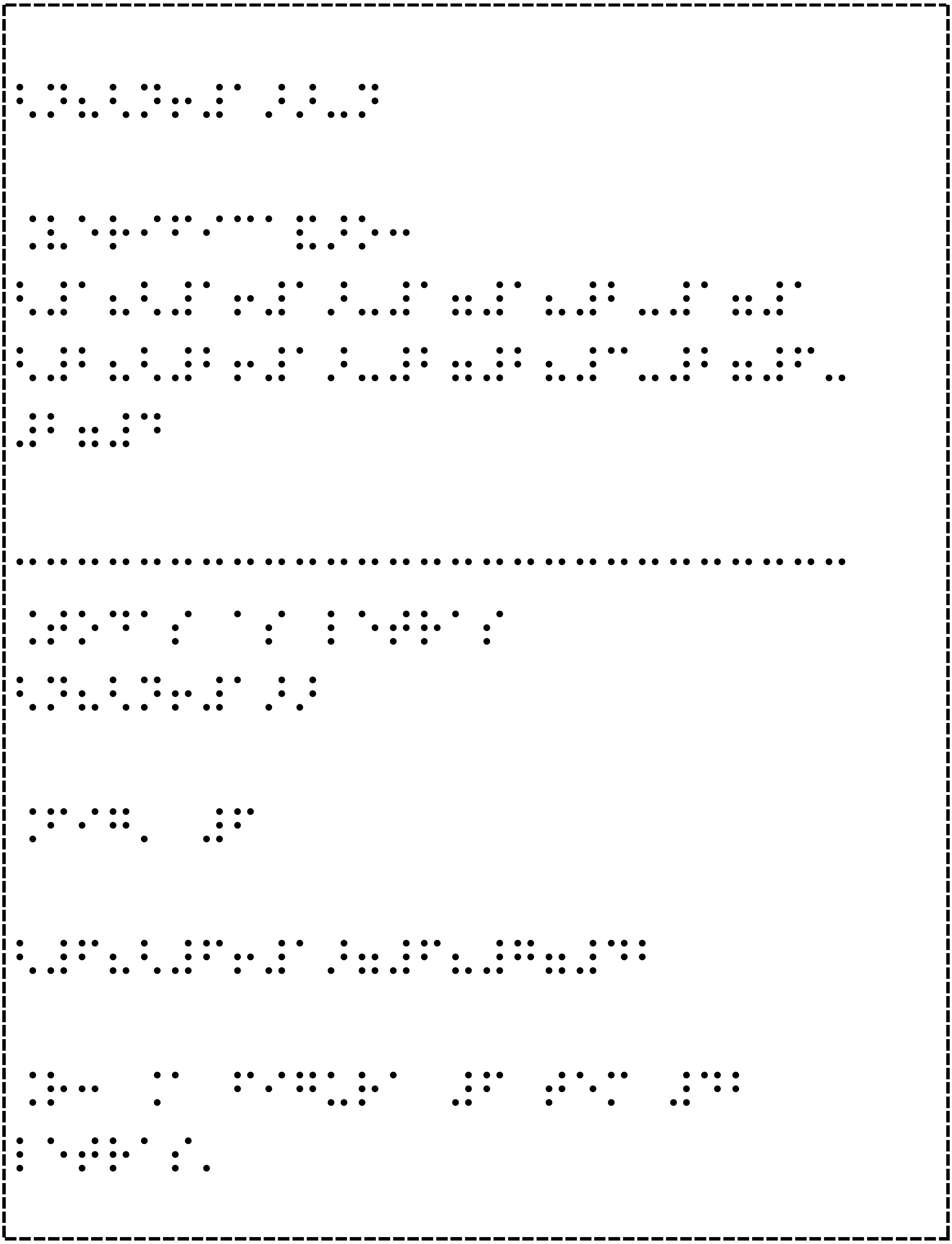


Figura 42: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

n – número de letras

Letras L

$(n \times (n + 1)) - n^2$

Verificação:

$(1 \times (1 + 1) - 1^2 = 1 \times 2 - 1 = 1$

$(2 \times (2 + 1) - 2^2 = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$

$(n \times (n + 1)) - n$

Verificação:

$(1 \times (1 + 1) - 1 = 1 \times 2 - 1 = 1$

$(2 \times (2 + 1) - 2 = 2 \times 3 - 2 = 6 - 2 = 4$

Todas as letras

$(n \times (n + 1))$

Fig. 6

$(6 \times (6 + 1) = 6 \times 7 = 42$

R: A figura 6 tem 42 letras.

Figura 42A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

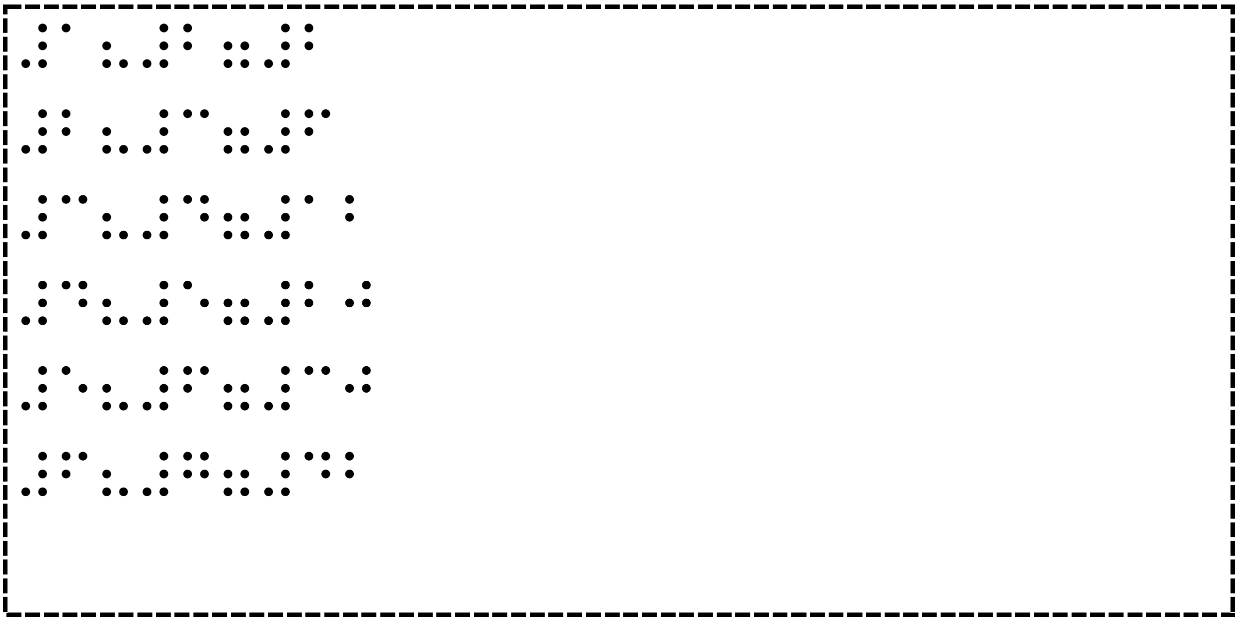
Quandos olicitada uma explicação do raciocínio apresentado, a aluna menciona que para determinar o número de letras L, faz as letras todas, daí a expressão (n x (n + 1)) e de seguida subtrai as letras L, cuja expressão é n, e para determinar o número de letras B, faz as letras todas, (n x (n + 1)), e subtrai as letras B, n^2. Mais uma vez, fica demonstrado que a aluna possui um bom raciocínio algébrico.

Relativamente à resolução efetuada pelo aluno Rafael, este inicia o processo à descoberta de um padrão de construção da sequência, referindo diversas afirmações: "*vai-se adicionando uma letra L e uma linha nas letras B*". Seguidamente, põe-se a efetuar associações entre características de cada figura da sequência e o número da figura, tecendo diversas relações, tais como, "*o número de L de cada figura vai ser sempre igual à última linha dela*"; "*as letras B determina-se fazendo um vezes um, dois vezes dois...*"; "*o número total de letras B é o quadrado do número de letras L*".

Constata-se que o aluno Rafael vai mais além do que a descoberta de padrões, procura também desenvolver diversas relações baseadas nas características de cada figura.

Assim sendo, o aluno optou pela construção de cada figura até à figura desejada.

Rafael



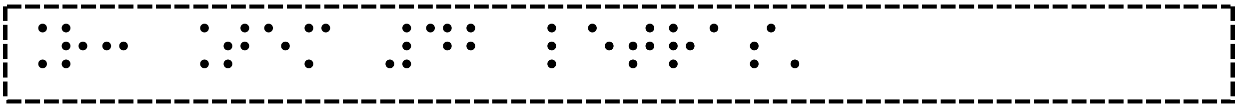


Figura 43: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

1 x 2 = 2

2 x 3 = 6

3 x 4 = 12

4 x 5 = 20

5 x 6 = 30

6 x 7 = 42

R: Tem 42 letras.

Figura 43A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

No que se refere à resolução desta questão por parte do aluno Pedro, tal como aconteceu com o seu colega Rafael, começa por procurar diversas relações, quer entre os elementos da figura, uma vez que afirma "*é sempre as letras L a multiplicar pela quantidade de letras B da última linha*", quer entre propriedades da figura e o número da mesma, mencionando "*o número de letras L é igual ao número da fig*ura" e ainda que "o número de linhas com a letra B é sempre igual ao número da figura".

Verifica-se que, a ação de generalização do aluno converge na *procura de relações* entre as quantidades, nomeadamente entre o número da figura (ordem da sequência) e o número de letras (termo da sequência) ou outras propriedades da figura.

De seguida, o aluno manifesta a necessidade de encontrar uma *regra geral* que lhe permitisse responder diretamente a todas as questões seguintes. Referiu então, "*multiplica-se as letras L pelo número de linhas que tem a figura*" e escreveu:

Pedro

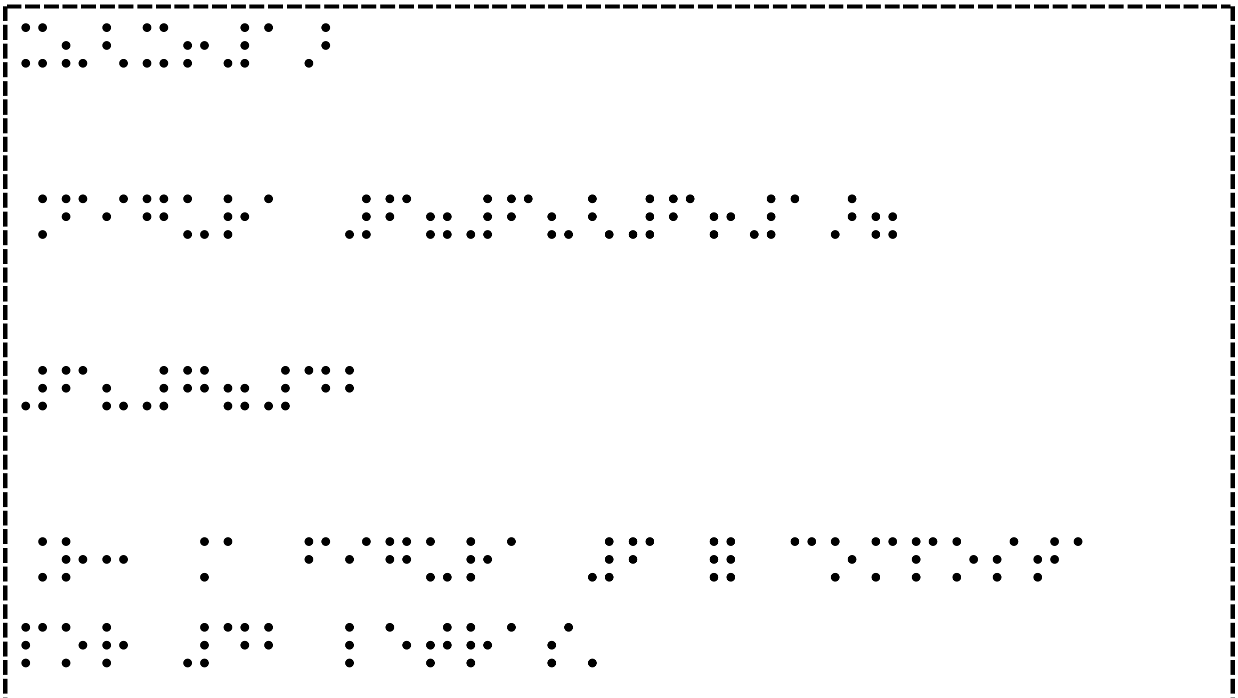


Figura 44: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

x x (x + 1)

Figura 6 = 6 x (6 + 1) =

6 x 7 = 42

R: A figura 6 é composta por 42 letras.

Figura 44A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

Observa-se que existe por parte do aluno Pedro uma enorme preocupação em tentar estabelecer relações entre o número de letras da figura, termos, e o número da mesma, ordem.

Evidências da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*

Margarida

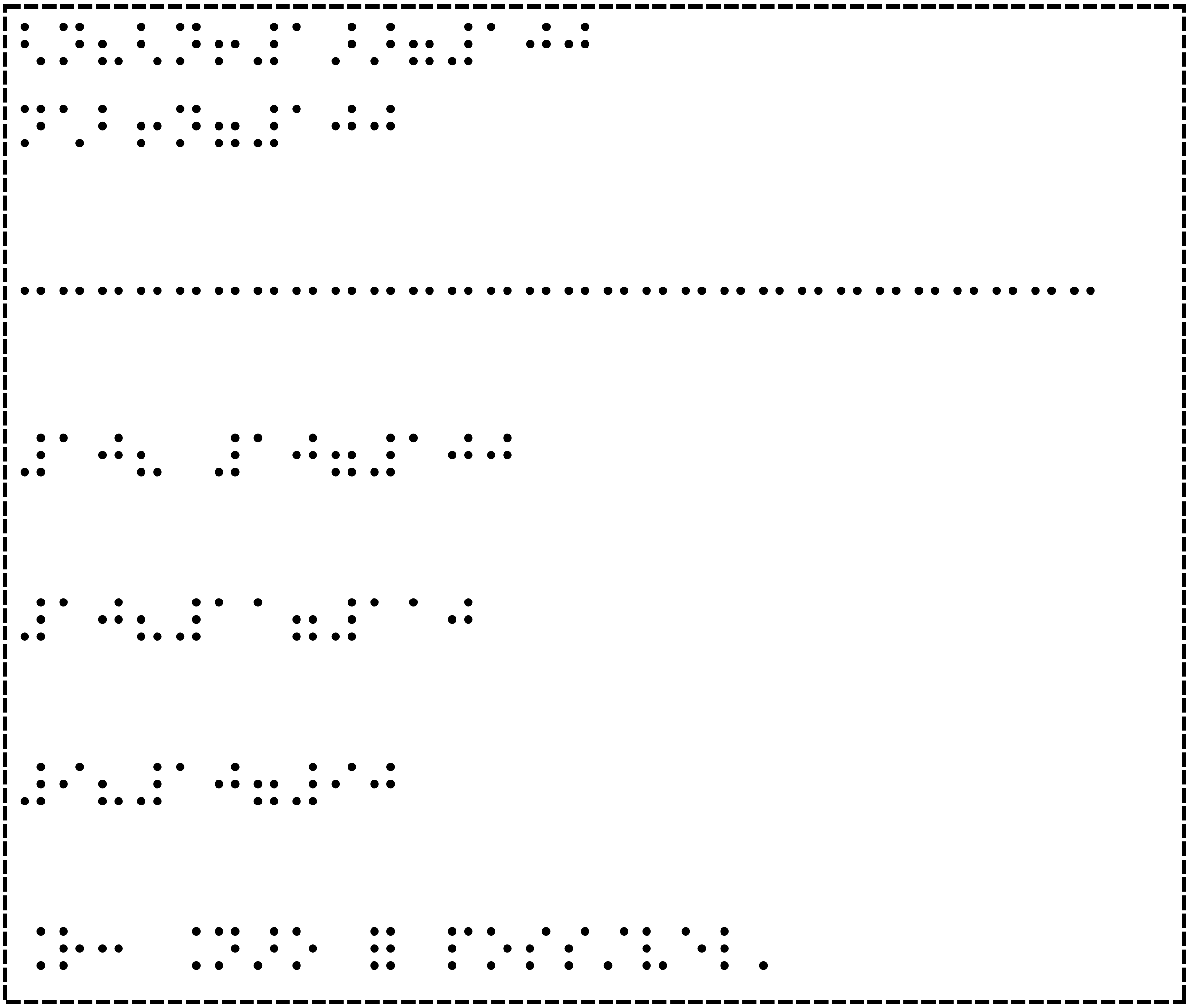


Figura 45: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

$(n \times (n + 1)) = 100$

$n^2 + n = 100$

----

10 x 10 = 100

10 x 11 = 110

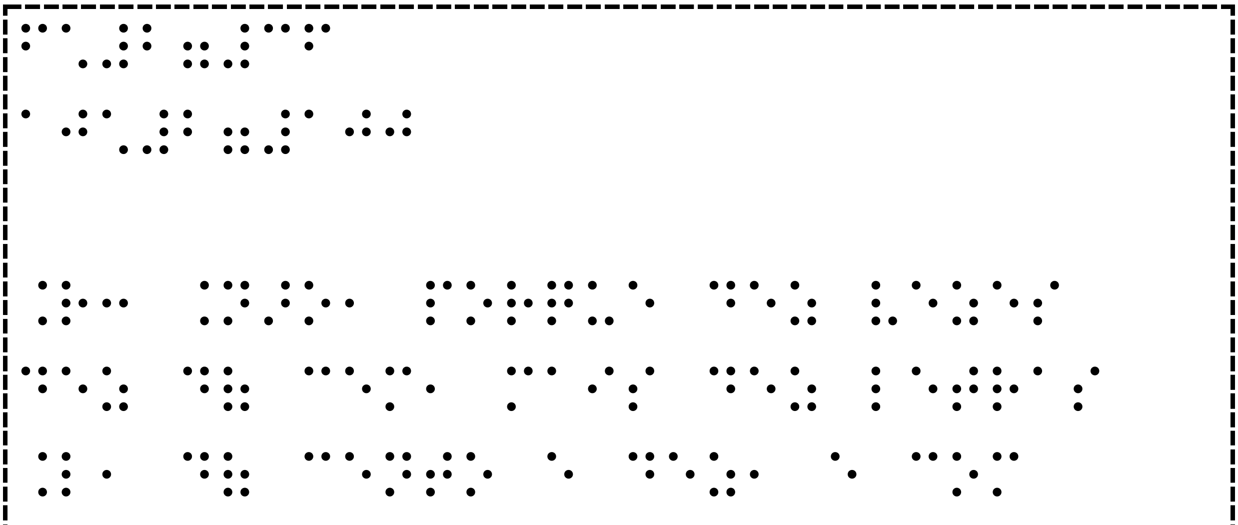
9 x 10 = 90

R: Não é possível.

Figura 45A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Margarida

Através do extrato de resolução da aluna Margarida, podemos observar que a aluna imediatamente equaciona a situação. Contudo, aquando da sua resolução, apercebe-se que não consegue resolvê-la. É de referir, que até ao momento, não tinha sido ainda lecionado as equações do 2.º grau completas, pelo que a aluna nunca a conseguiria resolver. Todavia, apresenta outra estratégia de resolução da situação, pensa em dez vezes dez, e verifica que assim trata-se de um quadrado e que os números a multiplicar terão de ser números inteiros consecutivos, por se tratar de um retângulo, tal como está explícito na sua resolução.

Rafael



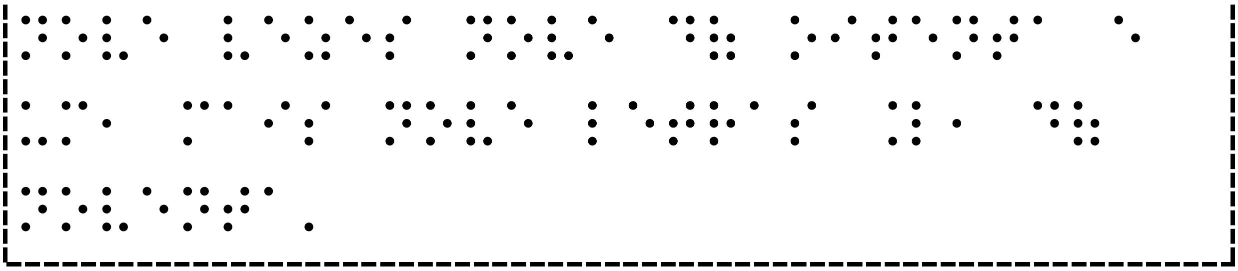


Figura 46: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

$6^2 = 36$

$10^2 = 100$

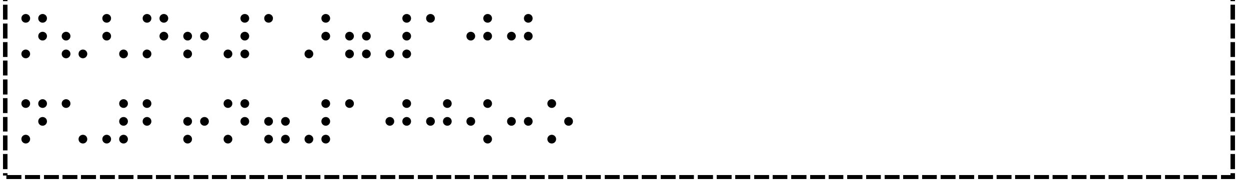
R: Não, porque dez vezes dez dá cem, mais dez letras L, dá cento e dez, e com nove vezes nove dá oitenta e um, mais nove letras L, dá noventa.

Figura 46A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

No que concerne à resolução da questão 3.2, realizada pelo aluno Rafael, observa-se que para gerar um novo termo da sequência, realiza algumas *operações matemáticas* baseadas nas relações que encontrou na exploração do padrão, estendendo assim, a sua sequência com mais um exemplo.

Na tentativa de *procurar um resultado* da sequência de forma a obter o número 100, o aluno recorre a processos de experimentação, utilizando raciocínios inversos para fundamentar as suas justificações. O aluno refere "*nove vezes nove oitenta e um e mais nove que são as letras L, dá 90" e ainda "dez vezes dez dá cem, mais dez letras L, dá cento e dez, também não dá*".

Pedro



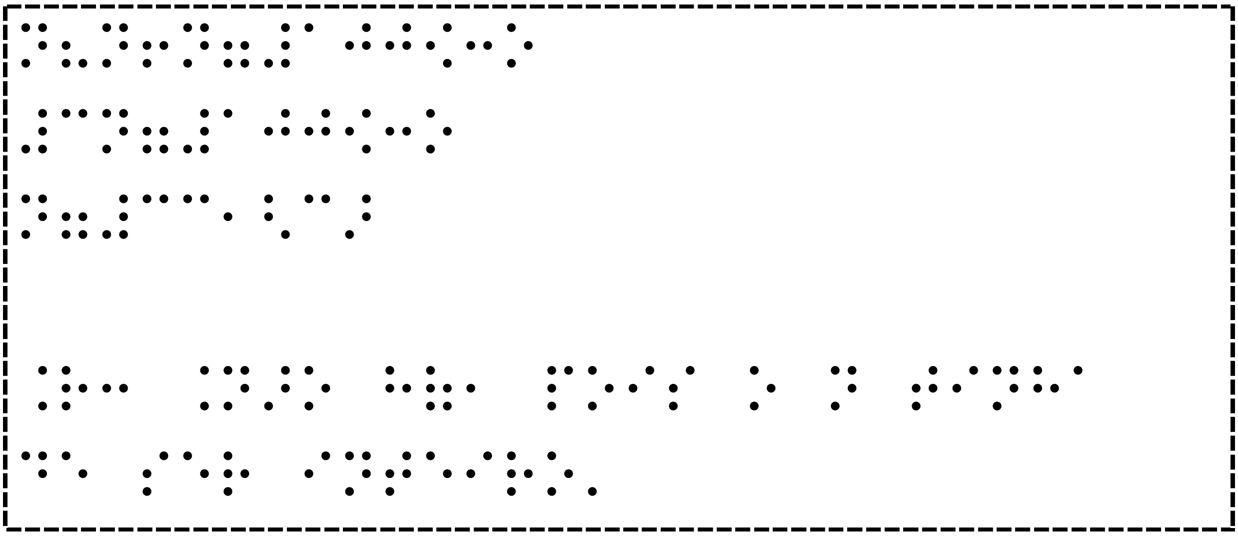


Figura 47: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

$(n \times (n + 1)) = 100$

$n^2 + n = 100 \Leftrightarrow$

$n \times n + n = 100 \Leftrightarrow$

$3n = 100 \Leftrightarrow$

$n = 33,(3)$

R: Não há, pois o n tinha de ser inteiro.

Figura 47A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Pedro

O aluno Pedro equaciona a situação e tenta aplicar um procedimento para a resolução da equação em causa, contudo comete um erro algébrico e dá continuidade à mesma. Verifica-se ainda, que faz uma correta interpretação da solução, embora esta não seja a correta.

Evidências da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades*

Relativamente a esta questão, tanto a aluna Margarida como o aluno Pedro chegaram à expressão ao termo geral, muito antes de lhes ser pedido, como se pode constatar nos diferentes extratos de resolução das questões anteriores.

O aluno Rafael quando confrontado com a necessidade de determinar uma regra geral, escreve:

Rafael

Figura 48: Extrato da resolução em Braille da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

Regra:

$x^2 + x$

Figura 48A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos – *Sequências e Regularidades* da aluna Rafael

O aluno, quando questionado sobre o significado da expressão que escreveu, afirma "*é o número de letras B, mais, o número de letras L, sendo que o x é o número da sequência*".

6.5 – Considerações

O trabalho que os alunos desenvolveram com as atividades propostas e o que, nesse trabalho, manifestaram oralmente e por escrito, indica que estes, na sua generalidade, desenvolveram a compreensão da ideia de sequência matemática que era pretendida bem como da ideia de regularidade (associada a uma sequência).

Dado um termo de uma sequência (pressuposta a regularidade que a define), os alunos compreenderam com facilidade que o termo que se lhe segue pode ser determinado à custa do termo dado, recorrendo a um procedimento que inferem analisando os termos sucessivos da sequência que são dados no enunciado. Também perceberam que este procedimento serve para calcular qualquer termo a partir do anterior.

Num primeiro momento, o professor depara-se com a dificuldade de explicitar o enunciado da atividade, pois terá de encontrar estratégias que permitem ao aluno cego olhar e ver o enunciado tal como ele é, o que não é fácil na maior parte das vezes, pelo que o professor terá de explorar a sua própria criatividade e imaginação, recorrendo a todos os meios que dispõe. As atividades aqui propostas aparecem de diferentes formas, diversificando assim, os enunciados, possibilitando deste modo, sugerir diferentes modos de abordagem.

Uma vez o enunciado percetível e claro, os alunos começaram por recorrer a esquemas onde efetuam contagens, mas em alguns casos deixam de o fazer relativamente cedo e usam apenas números e os cálculos necessários, mantendo no entanto a necessidade de ‘prolongar’ a sequência até ao termo desejado. Num caso e noutro há aqui já, ainda que implicitamente, o reconhecimento da ‘lei de formação’ – ou da regularidade – que define sequência.

Se a determinação de um termo, conhecida a sua ordem – ainda numa fase em que a 'lei de formação' não está explicitada – não levantou dificuldades de maior, o mesmo não aconteceu com a solicitação 'recíproca', ou seja, determinar a ordem de um certo termo dado. A isto não será alheio o raciocínio 'inverso' que a solicitação exigia, da ordem para o termo, mas sim as dificuldades com a terminologia utilizada e conceitos associados, termo e ordem (do termo). Acresce ainda a natureza (mais) abstrata de 'ordem de um termo', e o facto de se tratar da fase inicial da aprendizagem das *Sequências e regularidades*, eventualmente com pouco ou nenhum trabalho desta natureza em anos anteriores.

As figuras que nas atividades 'concretizavam' os termos das sequências constituíram um apoio intuitivo importante, antes de mais para a determinação de termos desconhecidos, mas também como 'inspiração' para a descoberta e explicitação da lei de formação subjacente à sequência, quer na sua formulação na linguagem natural, quer na sua formulação algébrica.

É de extrema importância consciencializar todo e qualquer professor para a prática de uma seleção muito cuidadosa das atividades a propor ao aluno, só assim é possível proporcionar um ambiente favorável à aprendizagem do aluno, evitando bloqueios ao nível do enunciado, mas nunca desmoronando a complexidade das mesmas.

De um modo geral os alunos manifestaram dificuldades de expressão e comunicação oral e escrita e incapacidade de manter a concentração no trabalho de forma continuada. Apesar disso, com o decorrer da realização das atividades propostas foi claramente visível o progresso dos alunos, quer na apropriação das situações propostas, compreendendo mais facilmente o que era pedido e como proceder para responder, quer ainda na maior rapidez com que deram e registaram as respostas, muito especialmente na descoberta da lei de formação da sequência e de uma expressão algébrica que a traduzisse. Foi também notório que os alunos se foram progressivamente libertando da necessidade de esquematizar, recorrendo preferencialmente a números e à sua organização em forma de tabela.

O acompanhamento sistemático do grupo de alunos por parte do professor, durante a realização do trabalho autónomo, e a discussão coletiva na turma das suas produções, foram momentos importantes, não apenas para o esclarecimento de dúvidas dos alunos, mas também para a recolha de informação sobre as suas dificuldades e as estratégias que utilizaram tendo em vista o desenvolvimento do estudo sobre sequências e regularidades.

Na certeza de que não existem habilidades matemáticas inatas cabe ao professor, através das suas práticas, contribuir para o seu desenvolvimento. Encontrar estratégias que permitam ao aluno desenvolver o pensamento algébrico, ou seja, pensar genericamente, compreender regularidades e explicitar essa regularidade através de expressões matemáticas, estabelecer relações entre grandezas variáveis, será um dos caminhos a ter em conta no desenvolvimento do currículo. Assim, pode-se afirmar que a utilização de atividades que envolvam o estudo de padrões e regularidades são um dos caminhos privilegiados para desenvolver o pensamento algébrico. Os padrões ajudam, os alunos, a perceber a “verdadeira” noção de variável, que na maior parte das vezes, passa por apenas como um número que desconhecem.

Em suma, o trabalho desenvolvido com as sequências permite uma melhor compreensão do que efetivamente é a Álgebra, permite fazer conexões matemáticas, permite desenvolver a comunicação matemática através da utilização de uma linguagem seja ela escrita ou oral, não ambígua e adequada à situação e por último permite melhorar a própria imagem da Matemática.

CAPÍTULO VII – ESTRATÉGIAS DE ENSINO NO ESTUDO DE FUNÇÕES

7 – Unidade de ensino - FUNÇÕES

7.1 – Introdução

O estudo de funções dá continuidade a todo um trabalho já desenvolvido no âmbito das sequências e regularidades. Assim sendo, é possível identificar regularidades analisando o que sucede aos valores da variável dependente, à medida que a variável independente sofre um dado incremento.

Com as atividades aqui propostas, bem como as diferentes estratégias de ensino, pretende-se mostrar como certos modelos de atividades, utilizadas habitualmente em contexto de sala de aula, podem potenciar a experiência matemática dos alunos, desenvolvendo assim, a sua compreensão do conceito de função e fomentar a sua capacidade em trabalhar com os diversos tipos de representações. Procura-se deste modo inverter a ideia simplificadora de que uma função é uma expressão analítica, realçando a importância dos diversos tipos de representações de uma função, nomeadamente a conexão entre eles. É de todo aconselhável que o professor sugira atividades matemáticas de caráter exploratório e investigativo, permitindo aos alunos explorar, analisar e comparar os diferentes tipos de representações.

Nesta unidade temática teremos de ter em consideração algumas ideias matemáticas importantes, tais como:

- Uma função é uma *correspondência* tal que a cada elemento do primeiro conjunto (*objeto*) corresponde um e um só elemento do segundo conjunto (*imagem*);

- O conjunto dos objetos é o *domínio* e o conjunto das imagens é o *contradomínio*;

- Uma função pode ser representada por *palavras*, por uma *tabela*, um *diagrama sagital*, um *gráfico* ou uma *expressão algébrica*;

- Uma *função afim* pode ser *linear* ou não linear;

- Uma relação de *proporcionalidade direta* entre duas grandezas é representada por uma função linear;

- Na função linear a taxa de variação é *constante* e designa-se por *constante de proporcionalidade*. Na função afim não linear a taxa de variação também é constante. Contudo, existem outras funções cuja taxa de variação é variável.

7.2 – Funções no Programa de Matemática do Ensino Básico em Portugal

No 3.º Ciclo do Ensino Básico é feito um reforço das aprendizagens relacionadas com o conceito de proporcionalidade e dedica-se algum tempo ao estudo de situações representadas na forma verbal, tabular e gráfica. Numa fase inicial, os alunos começam por construir o conceito de função de proporcionalidade direta. Os conceitos e linguagem usados no estudo da unidade Funções Linear e Afim assentam na ideia intuitiva de correspondência trabalhada anteriormente. É durante este estudo que se estabelece e reforça a ligação entre o conceito de proporcionalidade e o conceito de função. Uma função chama-se afim quando existem constantes *a* e *b* (números reais), tais que $y = ax + b$, para todo o *x* real. No caso particular em que b = 0, a expressão reduz-se à forma $y = ax$ e traduz uma relação de proporcionalidade direta, visto que o quociente de dois valores correspondentes *y* e *x*, é a constante *a*. Dizemos também que a expressão da forma $y = ax$ é linear. Esta expressão pode ainda ser entendida como a equação reduzida das retas não verticais que passam pela origem do referencial e têm declive *a*. No caso em que a = 0 obtém-se a função constante, cuja expressão analítica tem a forma $y = b$ e o gráfico é uma reta horizontal.

A partir do 9.º ano de escolaridade, aprofunda-se o estudo das relações e funções e dá-se especial relevo à representação gráfica, através da introdução de novas situações como a de proporcionalidade inversa. Nesta fase, os alunos deverão construir e interpretar gráficos, tabelas e expressões, alternando uma representação com outra e recorrendo às novas tecnologias.

Relativamente à aprendizagem das funções no terceiro ciclo, Ponte et al.[266] defendem que "*os alunos devem saber o que é uma função, identificar correspondências que são ou não funções, reconhecer as diversas representações de uma função e identificar objetos e imagens*". Porém, acrescentam também "*que a abordagem da noção de função neste ciclo não privilegia os aspetos estritamente matemáticos do conceito, mas sim o seu uso para modelar situações da realidade e para resolver problemas*".

De acordo com o programa de Matemática do Ensino Básico, "*a função é estudada essencialmente como relação entre variáveis, embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos. Deve recorrer-se a várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações*"[267].

[266] Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009a). *Álgebra no ensino básico*. Disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/ 003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf, p.116

[267] ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf, p.56.

7.3 – O conceito de Função e sua compreensão

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes da Matemática. É extraordinário a diversidade das suas interpretações e representações. Porém, os alunos enfrentam muitas dificuldades quando tentam compreendê-lo.

Uma função pode ser apresentada aos alunos como sendo uma correspondência entre dois conjuntos (o de partida e o de chegada), onde a cada elemento do conjunto de partida (objetos) corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada (imagens), sendo, desta forma, um conjunto de pares ordenados. A definição de função como uma relação entre duas variáveis – uma variável é função da outra, $y = f(x)$, onde y é função de x – deve também ser apresentada aos alunos, pois facilitará a compreensão das diversas representações de uma função.

Segundo Youschkevich[268], o desenvolvimento da noção de função passa por três momentos ao longo da história, num primeiro momento, na antiguidade, estudos envolviam relações de dependência e a noção de variável ou de função não eram trabalhadas nesse período; num segundo momento, na Idade Média, as noções de função eram expressas de forma predominantemente geométrica e, num terceiro momento, Período Moderno, a partir do final do século XVI, as funções passam a ser representadas por expressões analíticas ou algébricas.

Pode-se considerar que o conceito de função é definido de uma forma explícita desde o século XVII, de acordo com Ciro Braga[269], a notação algébrica e a sintaxe surgiram inicialmente com François Viète (1540 – 1603), permitindo um enorme progresso na Matemática, tal como a Geometria Analítica e, posteriormente, o Cálculo Infinitesimal. Leibniz, um dos fundadores do Cálculo Infinitesimal, introduziu textualmente a palavra

[268] Youschkevitch, A.P. *The Conceplt of Function*. In: *Archive for History of Exact Sciences.* Editions Springer, 1976.
[269] Braga, C. - *Função: A Alma do Ensino de Matemática*. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006, p 18.

função. Entretanto muitos outros matemáticos contribuíram para a definição do conceito de função, até que chegamos finalmente, a Dirichlet que, em 1837, define amplamente uma função: *Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um único valor de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x.*

Segundo Chazan e Yerushalmy[270], as funções habitualmente são conceptualizadas como um tipo especial de relação. De facto, toda a equação linear do tipo $ax + by = c$, com $a,b \neq 0$ pode ser escrita através de uma equação equivalente, resolvendo, por exemplo em ordem a y, ou seja, $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, trata-se também, de uma função afim numa variável. Para construir uma representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis poderá ser útil escrevê-la como uma função linear com uma variável, uma vez que a utilização da calculadora gráfica assim o exige.

A compreensão do conceito de função envolve inúmeros e diversificados contextos, que vão desde a perceção de regularidades até à generalização e abstração de comportamentos através do uso da linguagem matemática, seja ela algébrica ou gráfica. Deste modo, atividades que envolvam alguns destes contextos devem ser apresentadas aos alunos desde o início da sua escolaridade.

Para Matos e Ponte[271], a compreensão do conceito de função assenta na exploração de padrões e regularidades, contribuindo, portanto, para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno. Com o intuito de despertar nos alunos o interesse pela procura de regularidades no estudo de funções, Anna Sierpinska[272] alerta para o facto, aquando da planificação das atividades, dos seguintes aspetos: perceção do comportamento das variáveis sem nunca se perder o significado das mesmas no contexto a explorar e a distinção entre variáveis dependentes e variáveis

[270] Chazan, D.; Yerushalmy - On Appreciation the Cognitive Complexity of School Algebra: Research on Algebra Learning and Directions of Curricular Change. In Jeremy Kilpatrick, W. Gary Martin e Deborah Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, pp. 123-135. EUA: NCTM.

[271] Matos, A.; Ponte, J. P. - *O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.° ano*. Relime, México, v. 11, n. 2, jun. 2008.

[272] Sierpinska, A. On understanding the notion of function. In: E. Dubinsky & G. Harel (Eds.): The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology. *Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, Vol. 25*, pp.25-58. 1992.

independentes. Para a autora, as funções devem ser vistas como ferramentas direcionadas para a modelação matemática, para as relações entre grandezas físicas, bem como para a explicação de alguns fenómenos da vida quotidiana do aluno.

7.4 – Dificuldades diagnosticadas na introdução do conceito de Função

As dificuldades na definição do conceito de função em todo o processo ensino-aprendizagem surgem nas mais variadas formas. A forma pela qual o professor agarra este conceito junto dos seus alunos, a utilização de letras na escrita simbólica da matemática, o uso de gráficos, a generalização e abstração e a interpretação das diferentes notações matemáticas são alguns dos obstáculos com que nos deparamos e que se pretende aqui descrever. Estes obstáculos servirão como base para a estruturação de um referencial teórico que auxiliará na formulação e adaptação de atividades de natureza investigativa cujos objetivos estejam em consonância com o currículo escolar.

Outra das dificuldades manifestada pelos alunos relativamente à compreensão do conceito de função deve-se à dualidade da sua natureza, segundo Miroslawa Sajka[273] Realmente, uma função pode ser entendida numa perspetiva estrutural, como um objeto, ou numa perspetiva operacional, como um processo. Na primeira, uma função é vista como um conjunto de pares ordenados, enquanto na segunda perspetiva uma função é um processo computacional, ou um método bem definido para passar de um sistema para outro. Estas duas perspetivas complementam-se uma à outra, constituindo-se numa unidade coerente, tal como as duas faces da mesma moeda. Considerando, por exemplo, a seguinte função definida analiticamente, $f(x) = 2x + 3$, remete-nos para duas situações em simultâneo: a primeira situação, apresenta o conceito de função no seu todo, qualquer que seja o argumento, apresentando, deste modo, o objeto ou variável independente, na segunda situação, indica-nos a forma

[273] Sajka, M. - A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 2003. pp.229-254.

como calcular o valor da função para um determinado argumento, evocando o processo. Assim sendo, poderemos dizer que *f* (*x*) representa, concomitantemente, quer o nome da função *f*, quer o seu valor. Ou seja, no contexto das funções, quando escrevemos *y*, por vezes estamos a referir-nos à ordenada de um certo ponto do sistema de coordenadas, e, outras vezes, estamos a referir-nos a um certo valor da função. A interpretação depende do contexto, o que pode confundir o aluno.

Torna-se, assim, claro que esta notação é ambígua e provoca algumas dificuldades junto dos alunos, evidenciando que os contextos nos quais são trabalhados os símbolos funcionais nas aulas de Matemática acabam por desempenhar um papel fundamental para as dificuldades que os alunos apresentam[274] – muitas das tarefas que os professores propõem aos seus alunos são de natureza fechada, e o conceito de função está muitas vezes ligado ora ao conceito de fórmula, ora ao processo gráfico, para o qual precisam de uma fórmula para o desenhar.

Por sua vez, Saraiva e Teixeira[275] afirmam que algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando tentam compreender o conceito de função estão relacionadas com o uso do conjunto de símbolos relacionados com ele. Estes autores referem ainda que o interesse dos alunos é estimulado pelas tarefas matemáticas selecionadas pelo professor e pelas situações e contextos que ele promove na aula, nomeadamente o de resolução de problemas e o de tarefas de exploração e investigativas.

Assim sendo, os autores defendem que a resolução de tarefas matemáticas daquela natureza pode promover nos alunos o desenvolvimento do seu próprio pensamento algébrico, da sua capacidade de interpretar e de manipular os símbolos matemáticos, e as relações existentes entre eles, bem como desenvolver a sua capacidade em lidar com as estruturas algébricas, representando e raciocinando de uma forma progressivamente mais abstrata.

---

[274] Ibidem.

[275] Saraiva, M. J.; Teixeira, A. M. - Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento nº 4 al Nº 19*, pp. 74-83. Itália: Palermo, 2009.

Eisenberg[276] refere que muitos professores acreditavam que o conceito de função poderia ser compreendido apenas utilizando um dos contextos, ou seja, através de tabela, gráfico, expressão algébrica, entre outros, mas só será possível entender, caso o aluno consiga estabelecer conexões entre aquilo que aprendeu e os diferentes contextos. Todavia, o autor defende que, sem um acompanhamento efetivo do professor na construção desses elos de ligação, os alunos apresentarão sérias dificuldades em fazer a ponte de um contexto para o outro.

A ausência de uma aprendizagem que abarque todos os contextos de forma progressiva, desde os primeiros anos de escolaridade gera posteriormente dificuldades de interpretação de informação em tabelas ou gráficos e na perceção de padrões, acarretando deste modo, a dificuldade na compreensão do conceito de variável e, consequentemente, no conceito de função.

Habitualmente, o professor não dá grande relevância às diferenças existentes na utilização das letras, conduzindo deste modo, a uma interpretação da letra por parte do aluno sempre como uma incógnita.

O autor Küchemann[277] distingue seis usos de letras na Matemática:

- O reconhecimento da presença de uma letra sem que haja atribuição de um significado à mesma (***letra avaliada***);
- Reconhecimento da presença da letra, mas sem a necessidade da respetiva atribuição de significado; (***letra não considerada***);
- Abreviaturas de palavras (***letra como objeto***);
- A representação de um valor desconhecido, cuja descoberta depende de manipulações algébricas (***letra como incógnita***);
- O reconhecimento de que a letra pode representar diversos valores, ou, pelo menos, do fato de poder ser substituída por mais de um valor (***letra como número generalizado***);

[276] Eisenberg, T. - Functions and Associated Learning Difficulties. Advanced Mathematical Thinking (Ed. Tall, D.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, Londres, 1991, pp. 140-152.
[277] Küchemann, D. - Algebra. In K.M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics: 11–16*. London: Murray, 1981, pp.102-119..

- O reconhecimento de que a letra representa um conjunto de valores, cuja alteração provoca distúrbios nas expressões em que estão inseridas (***letra como variável***).

Ao refletir sobre a utilização da linguagem algébrica, Usiskin[278] destaca três finalidades na utilização das letras:

1ª - Instrumento que permite a expressão de uma generalização;
2ª - Representante de um valor particular desconhecido ou de uma constante;
3ª - Argumento ou parâmetro de uma função.

Assim sendo, esta diversificação de manuseamento de letras provoca inúmeras dificuldades no aluno, levando-o muitas das vezes, a cometer erros na resolução de problemas.

É recorrente os alunos pensarem que uma função é uma representação geométrica dada a partir de um gráfico, ou seja, confundem as funções com os diagramas geométricos que às vezes as representam, encarando-as como objetos geométricos. Nesse sentido, Eisenberg comenta que os alunos, muitas das vezes, não associam o gráfico de uma função à própria função, mesmo se forem capazes de traçar gráficos simples. Essa tendência pode ser observada na sala de aula, onde o ensino deixa em segundo plano a representação gráfica em prol do espaço para a análise algébrica. É muito usual os professores não utilizarem a representação gráfica de uma função como forma de encontrar a solução ou soluções de um dado problema, fazendo do método gráfico uma mera ilustração e não como ferramenta para a resolução de problemas.

Consistindo a abstração um dos elementos essenciais para a aquisição e compreensão do conceito de função, é fundamental que o professor esteja atento aos diferentes níveis de abstração em que se encontram os seus alunos, só assim poderá ter sucesso na concretização dos seus objetivos. A capacidade que o aluno tem em

[278] Usiskin, Z. - Conceptions of School Algebra and Uses os Variable. In: A. F. Coxford & A.P. Schulte (Eds.), *The Idea of Algebra*, K–12, pp. 8–19. Reston, VA: NCTM

generalizar envolve, na maior parte das vezes, algum tipo de abstração, constituindo deste modo mais uma dificuldade na aquisição do conceito de função.

Outra das dificuldades detetadas, refere-se à notação matemática tanto a nível da escrita como a nível da leitura. A simbologia matemática utilizada não é familiar ao aluno e, muitas das vezes, é apresentada de modo repentino por parte do professor. Segundo Eisenberg[279], a introdução da linguagem matemática formal deve ser feita de forma lenta e cuidadosa, devendo-se evitar trabalhar com ela nos anos de escolaridade iniciais. Todavia, a dificuldade de entender a notação matemática não gira em torno somente dos alunos, mas também dos professores que têm a notação matemática como o grande obstáculo para a escrita e sua interpretação, conduzindo uma péssima qualidade de utilização e de ensino desta poderosa ferramenta.

Segundo Vinner [280], a aprendizagem do conceito de função conduz a duas dificuldades, a primeira refere-se à noção do próprio conceito de função e a segunda incide na determinação do momento em que um conceito está corretamente construído na mente do aluno. Um modelo explicativo deste processo cognitivo tem por base as noções de *conceito imagem* e *conceito definição*. O primeiro é uma ideia associada na nossa mente ao nome do conceito, que inclui todas as imagens mentais, todas as propriedades e todos os processos que lhe estão associados. O *conceito definição* trata da definição verbal que explica o conceito de modo exato. Ainda segundo Vinner, é esta definição que faz parte do conceito definição, sendo todas as outras representações associadas ao conceito englobadas no conceito imagem. Porém, para adquirir um conceito não basta o conhecimento da definição, pois tal não garante a sua compreensão e, para o atingir, é preciso ter um conceito imagem. Para aquele autor, o processo de formação dos conceitos deve combinar, numa ação recíproca, o *conceito definição* e o *conceito imagem*. Isto exige que os alunos tenham contacto com as diversas representações de uma função e de famílias de funções, estabelecendo relações entre elas e desenvolvendo, desta forma, o conceito imagem de função, aproximando-o cada vez mais do seu conceito definição.

[279] Eisenberg, T. - Functions and Associated Learning Difficulties. Advanced Mathematical Thinking (Ed. Tall, D.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, Londres, 1991, pp. 140-152.
[280] Vinner, S. - Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1983. pp. 293-305.

Assim, a aprendizagem do conceito de função requer o estabelecimento de muitas relações entre as suas representações e o confronto de ideias que nem sempre são fáceis de agregar. Como tal, os alunos precisam ser acompanhados na sua aprendizagem, para a qual se deve ter em conta as várias fases de evolução (interiorização, condensação e reificação), para que a definição que se pretende que interiorizem e a imagem que têm de função se complementem e permitam uma aprendizagem significativa.

Torna-se assim, urgente que os professores, na sua prática profissional, tenham em conta a ambiguidade da notação de uma função, bem como o papel crucial da experiência matemática dos alunos na sala de aula, onde o professor deve propor tarefas matemáticas de natureza mais aberta.

7.5 – Generalidades sobre Funções

Inicialmente, no estudo de funções, é necessário fazer-se uma abordagem de conceitos inerentes a uma função, na medida em que o aluno só consegue compreendê-la, se conseguir compreender e distinguir variável independente da variável dependente, domínio e contradomínio, objeto e imagem, conjunto de partida e conjunto de chegada, caso contrário terá sérias dificuldades em progredir no seu estudo.

7.5.1 – Estratégias de definição de componentes de uma Função

Para se definir domínio e contradomínio; variável independente e variável dependente; objeto e imagem; conjunto de partida e conjunto de chegada, proponho algumas estratégias de definição dos diferentes conceitos e sua conexão.

7.5.1.1 - Estratégia de definição I – *x* (variável independente) e *y* (variável dependente)

Dever-se-á começar por definir variável independente e dependente, recordando o aluno que num referencial cartesiano, observamos dois eixos, um eixo horizontal, o eixo das abcissas (eixo dos *xx*) e um eixo vertical, eixo das ordenadas (eixo dos *yy*). Então, qual dos eixos corresponde à variável independente? E à variável dependente? Pois bem, a estratégia passará por perguntar ao aluno qual das letras, ***x*** ou ***y***, aparece em primeiro lugar no alfabeto e constata-se que é o *x*, logo corresponderá à variável independente e o *y* à variável dependente, ou seja para se chegar à leitura da letra ***y***, primeiro teremos de passar pela leitura da letra ***x***.

7.5.1.2 - Estratégia de definição II – Objeto e Imagem (técnica do espelho)

Para se definir objeto e imagem, utiliza-se a ***técnica do espelho***[281]. Se estivermos na posse de um espelho e se não colocar nada em frente dele, nada aparecerá no espelho. Mas se colocar um **objeto** à sua frente aparecerá a sua **imagem**. Assim sendo, qual deles (objeto ou imagem) pertencerá à variável independente? Traça-se então o seguinte raciocínio, se para aparecer uma imagem no espelho é necessário em primeiro lugar colocar um objeto, então conclui-se que a imagem está dependente do objeto, logo o **objeto** pertence à **variável independente** e a **imagem** à **variável dependente**.

7.5.1.3 - Estratégia de definição III – Domínio e Contradomínio de uma Função

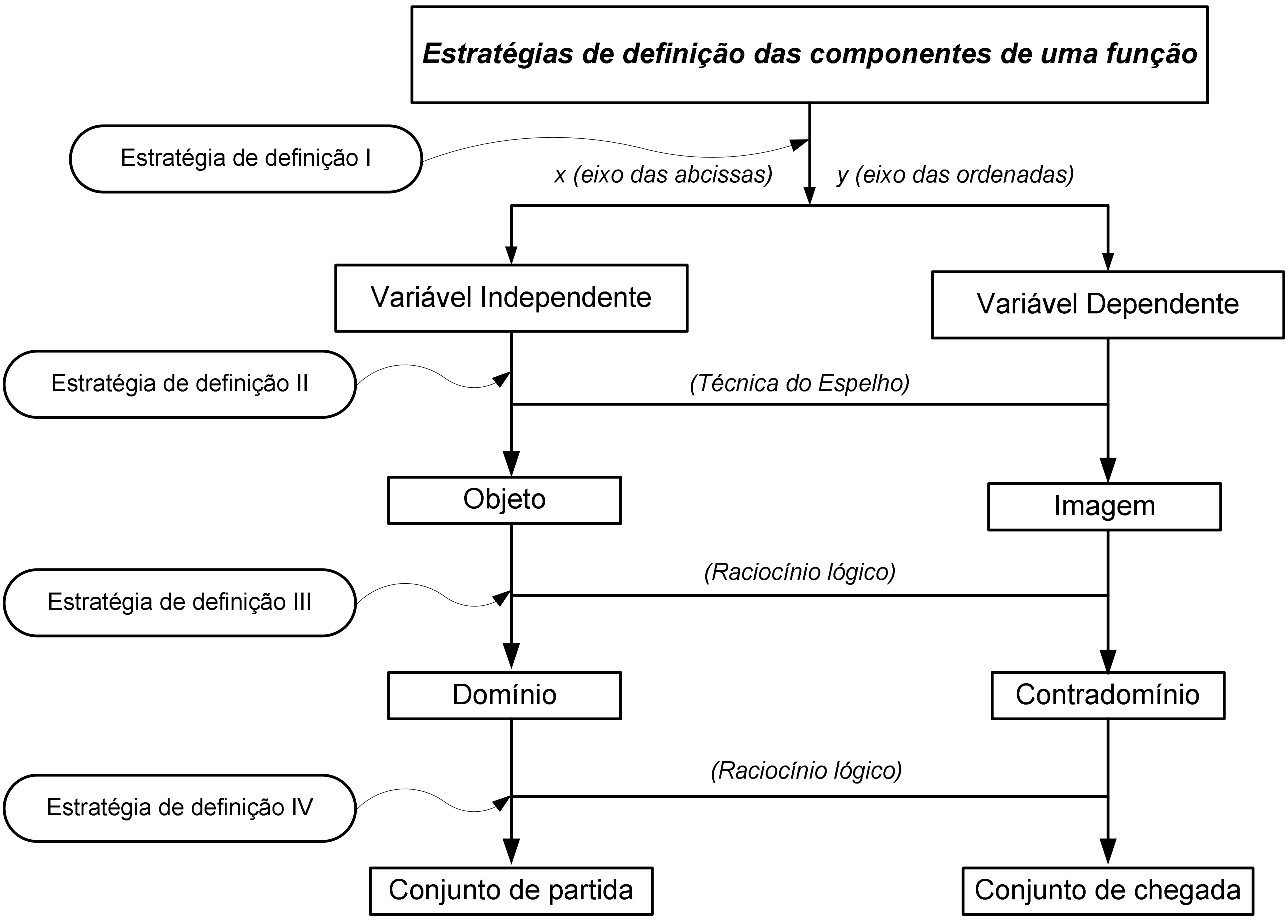
No que respeita à definição de domínio e contradomínio de uma função, dever-se-á apresentar o seguinte raciocínio simples: Se o contradomínio, tal como o nome indica, vai contra o domínio, então é porque já existe o domínio, caso contrário não poderia ir contra, logo conclui-se que só existe contradomínio se houver inicialmente um domínio, então o domínio fará parte da variável independente e o contradomínio da variável dependente.

[281] Técnica criada pelo autor.

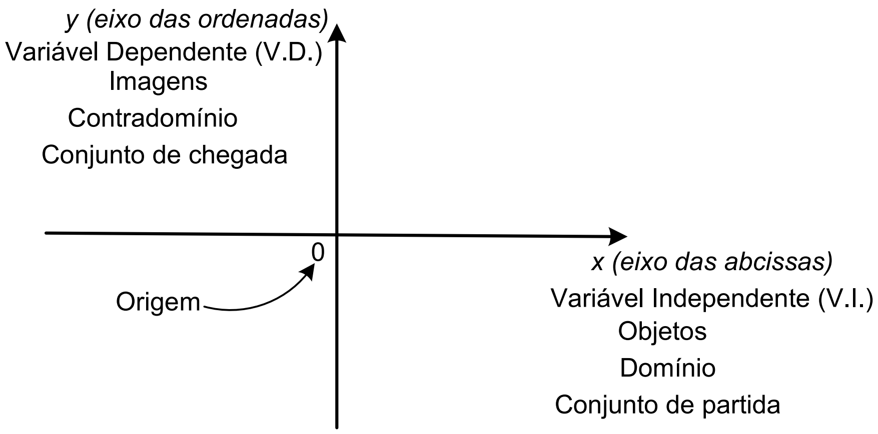
7.5.1.4 - Estratégia de definição IV – Conjunto de partida e Conjunto de chegada

Para a definição de conjunto de partida e conjunto de chegada dever-se-á utilizar um raciocínio análogo ao apresentado na estratégia anterior, na medida em que só será possível chegar a um ponto se se partir de outro, então o conjunto de partida fará parte da variável independente e o conjunto de chegada da variável dependente. Convém referir que o professor neste momento deverá abordar a questão da possibilidade de coincidência do conjunto de chegada com o contradomínio.

Esquematizando as estratégias de definição, temos:



De seguida, o professor deverá fazer a conexão destes componentes num referencial cartesiano, de modo a proporcionar ao aluno uma visualização gráfica dos mesmos.



7.6 - As diferentes formas de representar uma Função

Segundo Goldin[282], uma representação é uma configuração (de carateres, imagens, objetos concretos…) que denota, simboliza, ou seja, *representa* algo. As representações individuais, por exemplo, palavras, números, gráficos ou equações algébricas, raramente podem ser entendidas isoladamente. Estas representações fazem sentido se vistas como parte de um *sistema* mais amplo, com significados e convenções estabelecidos e com uma estrutura que permita relacionar de forma significativa diferentes representações pertencentes ao mesmo sistema.

Goldin refere ainda que se pode distinguir sistemas de representação externa de sistemas de representação interna. Os sistemas de *representação externa* referem-se a configurações observáveis, incluindo, entre outros, os sistemas simbólicos convencionais da Matemática (como a numeração em base dez, a notação algébrica

[282] Goldin, G. - Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education,* 2nd ed.: New York, NY:Routledge, 2008. pp.178-203.

formal ou a representação em coordenadas cartesianas). Os sistemas de *representação interna* referem-se a configurações mentais dos indivíduos, incluindo, entre outros, o processamento individual da linguagem natural, configurações pessoais de sistemas simbólicos convencionais da Matemática, imagética visual e espacial.

A respeito da imagética visual, Presmeg[283] classifica em cinco grupos as imagens visuais usadas pelos alunos: (1) *imagens concretas, pictóricas,* ou seja, imagens do tipo *imagem-na-mente*; (2) *imagens de padrões,* ou seja, imagens que representam relações matemáticas abstratas de uma forma visual; (3) *imagens memorizadas de fórmulas*, isto é, "ver", na sua mente, uma fórmula como se estivesse escrita no quadro ou num livro de texto; (4) *imagens cinestésicas*, ou seja, imagens que são criadas, transformadas ou comunicadas com a ajuda de movimentos físicos, e (5) *imagens dinâmicas*, isto é, imagens com movimento na mente.

Devemos estar conscientes que não é possível *observar* as representações internas de um indivíduo, sendo o nosso interesse inferir sobre tais representações através do seu comportamento observável, quando interage com representações externas.

Reforçando esta ideia, Duval[284] afirma que os objetos matemáticos apenas são acessíveis através de representações, em registos adequados: "A única forma de aceder e lidar com eles é através do uso de signos e representações semióticas", podendo um mesmo objeto matemático ser denotado através de diferentes representações. Para este autor, qualquer atividade matemática requer, então, o uso de representações semióticas.

Na perspetiva de Duval, existem dois tipos de transformação de representações semióticas em que os alunos devem ser fluentes: tratamentos e conversões. Os *tratamentos* são transformações dentro do mesmo sistema de representação (por exemplo, manipulação algébrica), dependendo das possibilidades de transformação

[283] Presmeg, N. - Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6(3)*, 1986, pp.42-46.
[284] Duval, R. - A cognitive analysis of problems of *comprehension in a learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61*, 2006, pp.103-131.

específicas do sistema utilizado. As *conversões* são transformações de representações que consistem numa mudança de sistema, conservando os objetos denotados (por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica). O autor refere que as conversões são mais complexas do que os tratamentos, dado que requerem "em primeiro lugar, o reconhecimento do mesmo objeto matemático entre duas representações cujos conteúdos não têm, muitas vezes, nada em comum". Além disso, a mudança de um sistema de representação para outro, muda "não apenas os meios de tratamento, mas também as propriedades que podem ser explicitadas". Assim, considera essencial para a compreensão matemática que o aluno reconheça o mesmo objeto em diferentes sistemas de representação e consiga distinguir, em cada representação, o que é matematicamente relevante.

O ensino do conceito de função deve recorrer a diferentes representações, de modo a promover a compreensão por parte dos alunos. Diversos estudos têm revelado que aqueles que são capazes de coordenar e relacionar diferentes modos de representação de um conceito, escolhendo os mais adequados para cada situação, mostram um conhecimento matemático mais profundo desse conceito, referem Ainsworth[285] e Arcavi[286]. No entanto, os alunos têm evidenciado dificuldades em interligar as diferentes formas de representar uma função, nomeadamente as representações algébrica, gráfica e tabular, segundo os autores Artigue[287], Elia et al.[288], Kaldrimidou e Ikonomou[289].

As representações são a chave para a aprendizagem conceptual e determinam muitas vezes o que é aprendido. A capacidade de representar e identificar o mesmo

---

[285] Ainsworth, S. - DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 2006, pp. 183-198.
[286] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, pp.215-241.
[287] Artigue, M. - Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy.* Washington, DC: MAA, 1992, pp.109-132.
[288] Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., e Gagatsis, A. - Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 2007, pp. 533-556.
[289] Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. - Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom.* Reston, VA: NCTM, 1998. pp. 271-288.

conceito em diferentes representações permite aos alunos observar relações importantes e desenvolver uma compreensão profunda do conceito. No estudo das funções, é necessário promover a distinção entre o conceito de função e os seus diferentes tipos de representação (numérica/tabelar; algébrica; gráfica; linguagem natural). O uso da representação gráfica tem um papel fundamental na compreensão de tal distinção. As conexões entre as representações gráficas e as expressões algébricas trazem benefícios para a sua compreensão.

Entende-se por gráfico de uma função *f* o conjunto de todos os pares ordenados (*x*, *y*) , em que *x* pertence ao domínio da função e *y* é a imagem correspondente, tal que a cada *x* só corresponde um e um só *y* , podendo este ser ou não o mesmo que um outro anterior (ou seja, o gráfico de uma função pertence ao produto cartesiano $D_f \times D'_f$); entende-se por representação gráfica a representação geométrica, num referencial, do gráfico da função; assim, há muitas representações gráficas para um mesmo gráfico; normalmente, e por um abuso de linguagem, usa-se indiferentemente o termo gráfico de uma função como sendo uma representação gráfica de uma função.

7.6.1 – Diagramas Sagitais

A correspondência entre um elemento do domínio e um elemento do conjunto de chegada torna-se bastante explícita quando se trabalha com diagramas sagitais. Esta forma de representação é particularmente útil na exemplificação de casos de correspondências, permitindo verificar se se trata ou não de funções. Todavia, este tipo de representação, só pode ser utilizado quando o domínio e o conjunto de chegada apresentam um número reduzido de elementos.

Normalmente, os alunos cegos têm a noção do que é o totobola. Caso não saibam, facilmente entendem que se trata de um jogo respeitante aos jogos de futebol realizados no fim-de-semana. Imaginamos um dos jogos do boletim, Sport Lisboa e

Benfica – Olhanense Futebol Clube, o apostador terá de marcar uma cruz no 1, caso aposte na vitória da equipa da casa, neste caso o Benfica, um X, caso aposte no empate das equipas e 2, caso aposte na vitória da equipa visitante, ou seja no Olhanense.

Assim sendo, quando se preenche um boletim do Totobola põe-se em **correspondência** o jogo com a aposta.

Observem-se as duas situações seguintes:

Boletim do Tiago

Jogos		Apostas		
		1	**X**	**2**
1	S.L.Benfica - Olhanense	X		
2	Gil Vicente – F.C. Porto		X	
3	Sporting C.P.- Aves			X
4	V. Setúbal – Académica		X	
5	S.C. Braga – Estoril			X
6	Arouca - Atlético			X

Boletim do Gonçalo

Jogos		Apostas		
		1	**X**	**2**
1	S.L.Benfica - Olhanense	X		
2	Gil Vicente – F.C. Porto	X	X	
3	Sporting C.P.- Aves		X	X
4	V. Setúbal – Académica	X	X	X
5	S.C. Braga – Estoril	X		
6	Arouca - Atlético			X

Após a observação dos dois boletins, o professor deverá questionar os alunos relativamente às diferenças existentes entre eles.

Professor: Qual a diferença existente entre os dois boletins?
Rafael: Um aposta só uma vez em cada jogo, o outro faz mais apostas.
Pedro: O Gonçalo tem medo de falhar e aposta mais em cada jogo, o outro só joga uma vez em cada jogo.

Desta forma, existe uma diferença fundamental entre os dois boletins. No boletim do Tiago, a cada jogo corresponde uma e apenas uma aposta, enquanto no boletim do Tomé, há jogos a que corresponde mais do que uma aposta.

A partir deste momento o professor deverá começar a aplicar as estratégias de definição das componentes de uma função[290].

Professor: "Então, quais são as variáveis em jogo?"
Pedro: "O jogo e a aposta."
Margarida: "Os jogos e as cruzes."
Professor: "E as cruzes no boletim representam o quê?"
Margarida: "Apostas."
Professor: "Certo… Assim sendo, perante as variáveis *Jogos* e *Apostas*, qual é a variável independente e a variável dependente?"
Rafael: "A variável independente é aquela que não depende de nada, logo é os jogos."
Professor: "Não depende de nada, não é bem assim, se chover muito não há jogo, logo depende do tempo, certo?"
Margarida: "O tempo não é variável."
Professor: "Neste contexto não. As variáveis em jogo são os jogos e as apostas."
Rafael: "Só há apostas se houver jogo."
Professor: "Correto. Então, a variável independente são os jogos e a variável dependente as apostas."
Professor: "Uma vez identificadas as variáveis, qual dos boletins representa uma função e porquê?"
Pedro: "O boletim do Tiago."
Professor: "Porquê?"
Pedro: "Porque só põe uma cruz nos jogos e o outro não."
Margarida: "O Gonçalo, porque para ser função cada elemento da variável dependente corresponde um e um só elemento da variável dependente."
Professor: "Queres dizer Tiago, certo?"
Margarida: "Sim, enganei-me."
Professor: "Muito bem, então quais são os objetos e as imagens?"
Rafael: "Os jogos são os objetos e as apostas as imagens?"
Professor: "Porquê?"

290 Ver *2.1.4.1 – Estratégias de definição de componentes de uma função*.

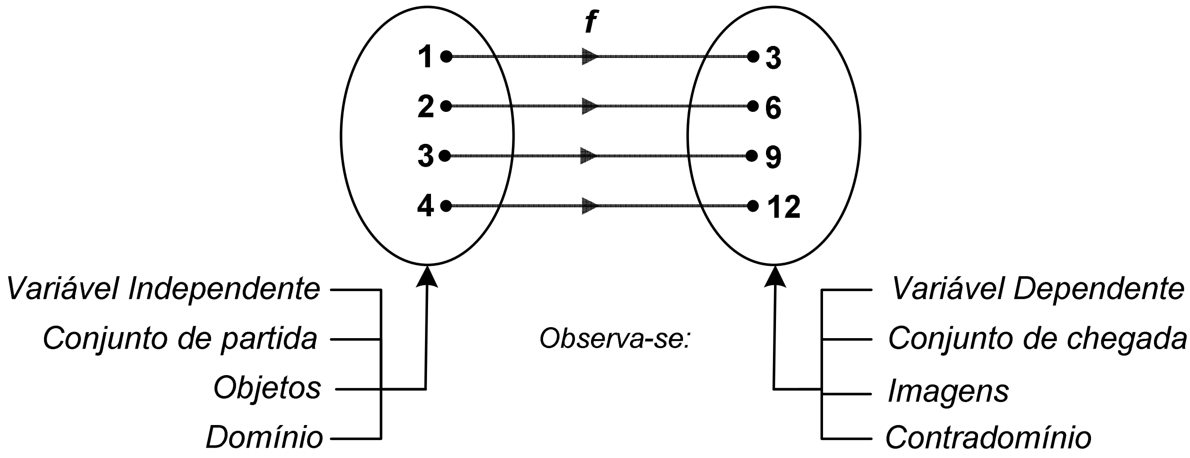
Rafael: “Porque só há imagem se houver objeto, é a questão do espelho, logo só há apostas se houver jogos.”
Margarida: “Os objetos pertencem à variável independente e as imagens à dependente.”
Professor: “Certo. Qual o domínio e o contradomínio da função?”
Pedro: “Domínio são os jogos e o contradomínio as apostas.”
Professor: “Porquê?”
Pedro: “Porque o domínio é composto pelos objetos e as imagens são do contradomínio.”
Rafael: “Como disse o professor, só há contradomínio se houver domínio, senão não faz sentido, ia contra o quê? Então, o domínio aparece primeiro, logo é a variável independente, são os jogos.”
Margarida: “O domínio é composto pelos elementos da variável independente, pelos objetos e o contradomínio pela dependente.”
Professor: “E o conjunto de partida? E o conjunto de chegada?”
Rafael: “Para chegar tem de partir, então os jogos são o conjunto de partida e as apostas o conjunto de chegada.”

Observa-se que existe nos alunos uma preocupação em conectar os conceitos e evidenciam compreensão nos diferentes conceitos, estando deste modo aptos a construir um diagrama sagital ou de setas.

O professor poderá descrever um diagrama sagital com as mãos dos alunos. Pede-se ao aluno para colocar as mãos sobre a mesa, indicando que cada mão trata-se de um conjunto e vai-se fazer uma correspondência da mão esquerda para a mão direita. Neste contexto, a mão esquerda corresponderá ao conjunto de jogos, variável independente e a mão direita ao conjunto das apostas, variável dependente. Deste modo, na mão esquerda estão representados os objetos, o domínio e o conjunto de partida enquanto que na mão direita temos as imagens, o contradomínio e o conjunto de chegada. De seguida, dever-se-á reforçar a noção de função, se a cada objeto corresponde uma e uma só imagem, então se pretendermos construir ligações entre a mão esquerda e a direita, vamos observar que cada elemento contido na mão esquerda, nesta caso, cada jogo terá apenas uma ligação com a mão direita. O professor deverá alertar o aluno para o facto de cada objeto ter uma e uma só imagem, ou seja, quando se coloca um copo (objeto) em frente de um espelho apenas observamos a imagem de um copo e não de um copo e um garrafão.

De seguida, o professor deverá esquematizar um diagrama sagital onde conste todos os elementos aprendidos pelos alunos.

Diagrama Sagital ou Diagrama de Setas



Deve chamar-se a atenção do aluno para o facto de o contradomínio poder coincidir ou não com o conjunto de chegada, neste caso, coincide. O contradomínio é composto por elementos do conjunto de chegada mas só aqueles que têm correspondência. Este alerta é fundamental uma vez que existe uma tendência por parte do aluno em assumir que o conjunto de chegada é o contradomínio, o que é totalmente incorreto.

7.6.2 – Tabelas

Este tipo de representação é de fácil consulta para o aluno. No entanto, só se utiliza quando o domínio e o conjunto de chegada apresentam um número limitado de elementos.

Permite uma observação direta na determinação da imagem de um determinado objeto e na determinação do objeto dado uma determinada imagem, desde que estejam representados na tabela. Caso contrário, ter-se-á de analisar cuidadosamente a relação existente entre variável independente e variável dependente.

Assim sendo, as funções quando não se encontram definidas por tabelas exigem que se comece por identificar quais as variáveis que estão em jogo e de seguida determinar qual a variável independente e qual a variável dependente. No exemplo seguinte, as variáveis em questão são o comprimento do lado de um quadrado e o seu perímetro. O aluno tem de ser capaz de reconhecer as variáveis, ou seja "quem depende de quem?". Assim, apresenta-se ao aluno o seguinte raciocínio: só é possível determinar o valor do perímetro se soubermos a medida do lado, então conclui-se que a determinação do perímetro (variável dependente) está dependente da medida do lado (variável independente).

Lado de um quadrado (l)	1	2	3	4
Perímetro do quadrado (P)	4	8	12	16

Desta forma, associa-se à variável independente, comprimento do lado de um quadrado, os objetos, o domínio e conjunto de partida; e associa-se à variável dependente, perímetro do quadrado, as imagens, contradomínio e conjunto de chegada.

De seguida, o professor deverá esquematizar uma tabela onde conste todo o vocabulário específico de uma função:

Variável Independente
Conjunto de partida
Objetos
Domínio

Lado de um quadrado (l)	1	2	3	4
Perímetro do quadrado (P)	4	8	12	16

Variável Dependente
Conjunto de chegada
Imagens
Contradomínio

7.6.3 – Gráficos

Este tipo de representação permite observar determinados comportamentos da função que com outras representações se tornam mais difíceis de visualizar. Contudo, esta forma de representação apela muito ao campo visual, pelo que não será muito agradável para um aluno cego. Compete, então ao professor delinear estratégias e mecanismos de atuação que facilitem essa mesma visualização.

Para representar graficamente uma função real de variável real deve-se começar por traçar um referencial. Tradicionalmente, usa-se um referencial cartesiano, isto é, formado por dois eixos (um eixo horizontal e um eixo vertical), designados respetivamente por eixo das abcissas (eixo dos *xx*) e por eixo das ordenadas (eixo dos *yy*) que se intersetam perpendicularmente num ponto O (origem do referencial).

Num referencial cartesiano, qualquer ponto *A* é localizado por um par de coordenadas (cartesianas):

- a abcissa, que se lê no eixo das abcissas (eixo horizontal);
- a ordenada, que se lê no eixo das ordenadas (eixo vertical).

E escreve-se $P(x_p, y_p)$, onde x_p corresponde à abcissa e y_p corresponde à ordenada.

O **gráfico** de uma função $f : D \subseteq IR \rightarrow IR$ num referencial cartesiano é o conjunto de todos os pontos do plano correspondentes a pares $(x, f(x))$ com $x \in D$.

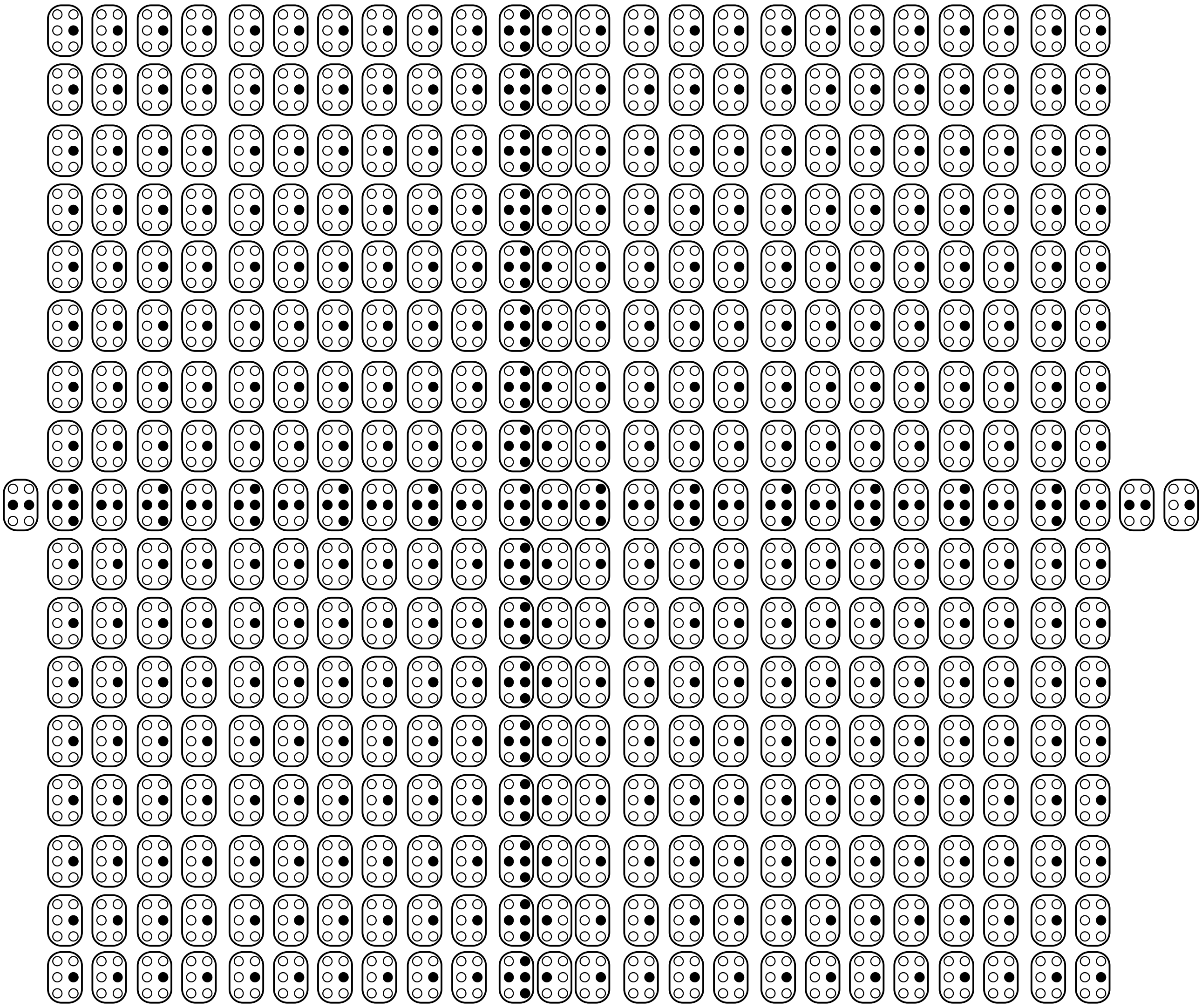
Segundo Friedlander e Tabach[291], a representação verbal é essencial a uma boa interpretação do problema e à atribuição de significado às variáveis. Contudo, não é uma linguagem universal e pode depender do estilo de cada um.

7.6.3.1 – Estratégia de ensino de Referenciais Cartesianos

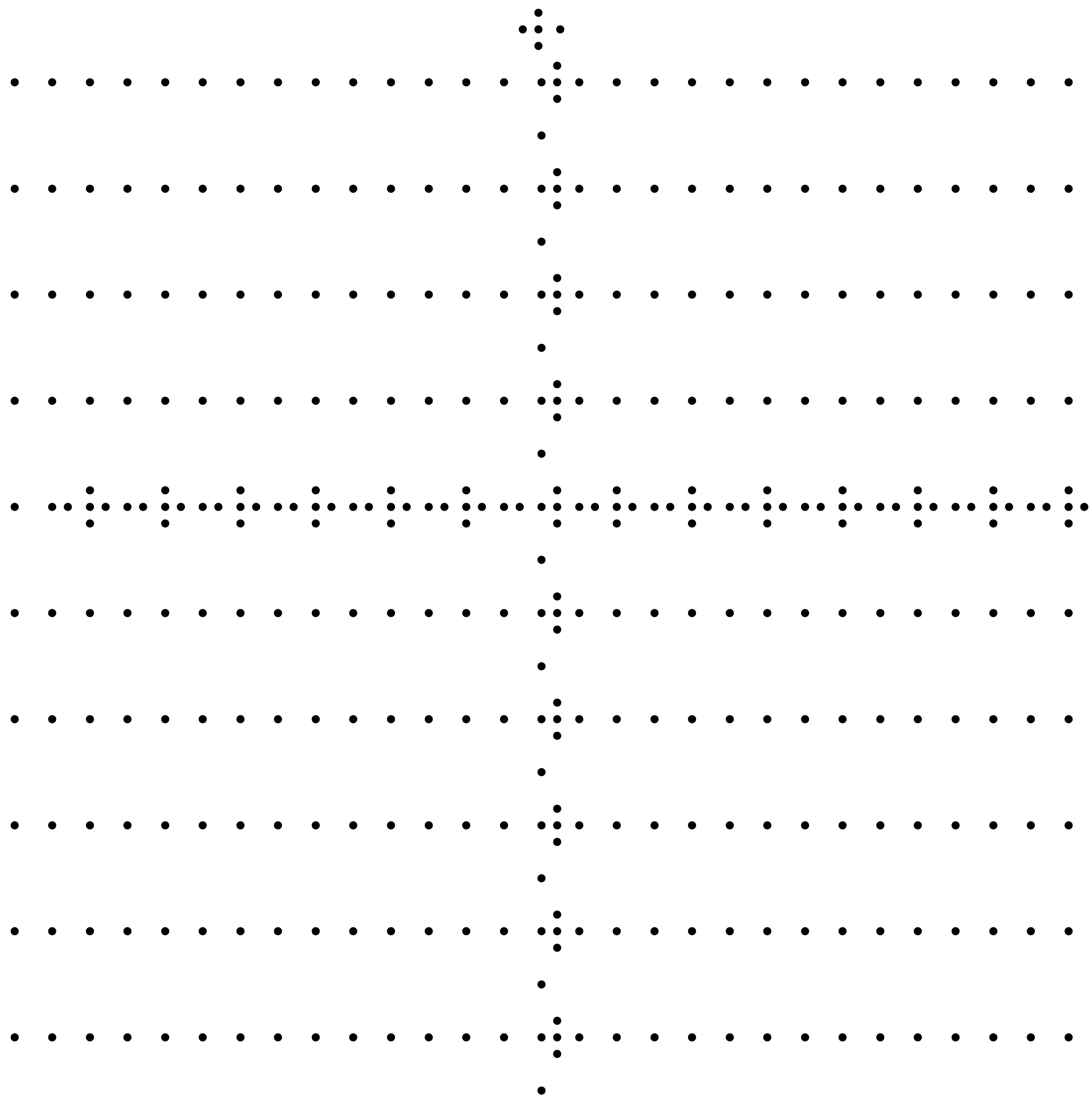
Os referenciais cartesianos representam-se sobre um fundo quadriculado, utiliza-se muitas das vezes papel milimétrico, de modo a facilitar a localização das coordenadas dos respetivos pontos, ou seja a abcissa e a ordenada. Para a representação a Braille utiliza-se a matriz fundamental que serve de base para inúmeras utilizações didáticas, tais como, realização de exercícios numa fase inicial, por exemplo determinação de coordenadas e localização de pontos; exemplificações e exercícios no plano vetorial, afim e métrico; e por último facilita o traçado de gráficos elementares.

[291] Friedlander, A. e Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics.* Reston, VA: NCTM, pp.173-185.

Esquema: *Plano quadriculado construído na máquina Perkins*



Em contexto real, o referencial cartesiano construído a partir da máquina Perkins, aparecerá da seguinte forma:



Não havendo muito espaço, é conveniente omitir-se a notação numérica dos eixos coordenados, pelo que as coordenadas se determinam com facilidade bastando apenas uma contagem de pontos.

Assim sendo, para se traçar o eixo das ordenadas utiliza-se o sinal ⠸, pontos (456), mas se desejarmos marcar as unidades utiliza-se um sinal composto ⠺⠂, pontos (2456) (2). Para os restantes pontos não pertencentes aos eixos coordenados usa-se o sinal ⠐, ponto (5). No traçado do eixo das abcissas utiliza-se o sinal ⠒, pontos (25), caso se queira marcar as unidades aplica-se o sinal ⠺, pontos (2456), alternado com o sinal linear ⠒, pontos (25).

Quando se pretende introduzir a noção de referencial cartesiano, o professor pode, a título de brincadeira, pedir ao aluno que faça o "Sinal da Cruz" e, então, o aluno fará o sinal da cruz, tocando, em sequência, a testa, o peito, o ombro esquerdo e o ombro direito, acompanhando o movimento com a fórmula verbal *Em nome do Pai* (toca-se a testa), *e do Filho* (toca-se o peito), *e do Espírito* (toca-se o ombro esquerdo) *Santo* (toca-se o ombro direito), *Amém* (volta-se a tocar o peito). Uma vez concretizado esse momento, o professor poderá alertar o aluno para o facto de ter acabado de representar em si os eixos coordenados:

1.º movimento (*Em nome do Pai e do filho*) – o aluno acaba de representar o eixo vertical, ou seja, o eixo das ordenadas;

2.º movimento (…*e do Espírito Santo*) – o aluno representa o eixo horizontal, ou seja o eixo das abcissas.

Assim sendo, o professor poderá questionar o aluno em quantas partes ele dividiu o seu tronco ao fazer o sinal da cruz, ao que ele responderá certamente quatro partes. Ora, cada parte corresponderá a um quadrante, sendo que o primeiro quadrante situar-se-á acima do ombro esquerdo, o segundo quadrante, acima do ombro direito, o terceiro quadrante abaixo do ombro direito e o quarto e último quadrante abaixo do ombro esquerdo.

Embora a referida estratégia possa ser considerada risível, salienta-se que, tal como qualquer outra estratégia didática, se obtiver o resultado pretendido, compreensão dos conceitos “eixos coordenados” e “quadrantes”, deve ser ponderada na prática letiva.

7.6.3.2 – Estratégia de ensino de determinação das coordenadas de um ponto no plano

Para a determinação das coordenadas de um qualquer ponto no plano, pode utilizar-se a seguinte estratégia:

Imagine-se que queremos marcar no referencial cartesiano, o ponto A de coordenadas (2, 5).

1.º Passo: O aluno deverá posicionar os dedos sobre o eixo das abcissas e situar-se neste caso no valor da abcissa em causa, valor 2.

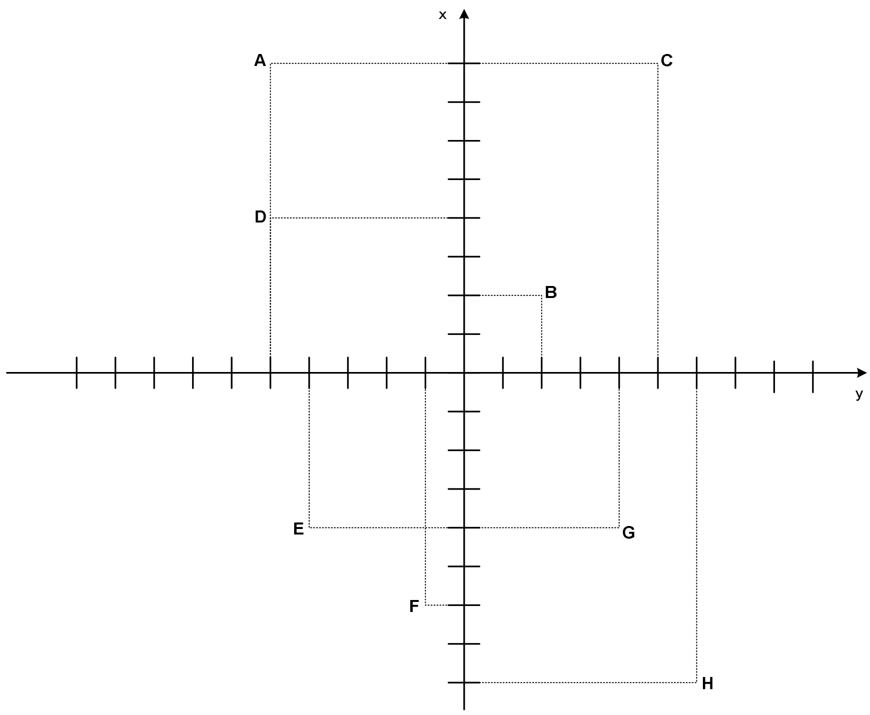
De seguida deverá procurar o valor da ordenada, para tal, terá de deslocar-se ou para cima (se o valor for positivo) ou para abaixo (se o valor for negativo) ou ficará na mesma (se o valor for zero).

2.º Passo: Deverá deslocar os dedos para cima até encontrar o valor de ordenada 5.

7.6.3.2.1 – Atividade de exploração I: *Localização de pontos no plano.*

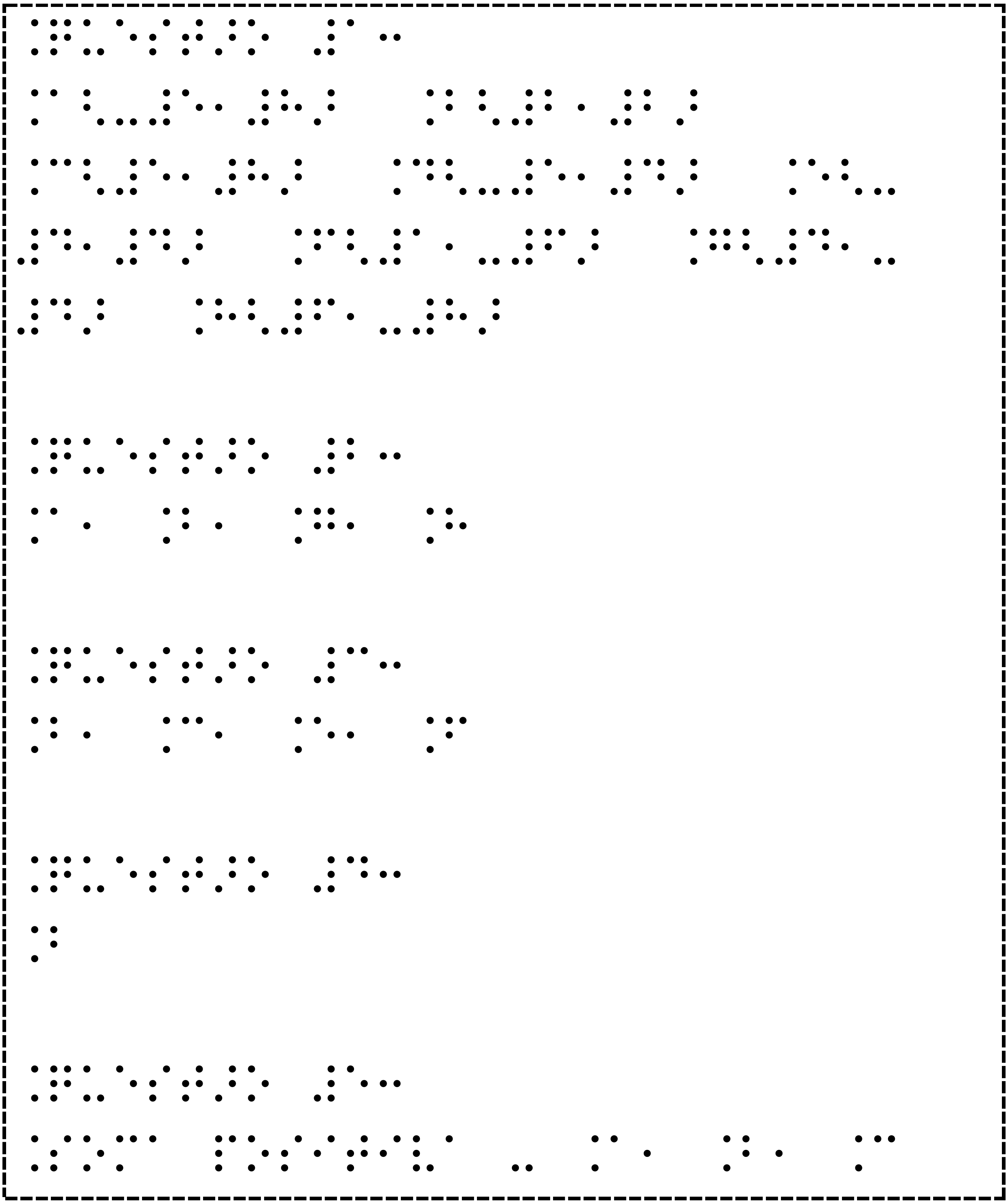
Nesta atividade, pretende-se que o aluno através de um referencial cartesiano determine coordenadas de pontos, identifique os quatro quadrantes e reconheça o valor da abcissa e da ordenada de um ponto.

<u>Questão 1</u>: Determina as coordenadas dos pontos marcados no referencial.
<u>Questão 2</u>: Qual ou quais os pontos pertencentes aos quadrantes pares? O que podes concluir?
<u>Questão 3</u>: Qual ou quais os pontos pertencentes aos quadrantes ímpares? O que podes concluir?
<u>Questão 4</u>: Descobre pontos cuja abcissa é igual à ordenada.
<u>Questão 5</u>: A soma das coordenadas seja positiva e o produto negativo
<u>Questão 6</u>: Qual o quadrante a que pertence cada um dos pontos seguintes?
M(2 , − 3) ; N(− 2 , − 2); O(−1 , 4); P(1 , 5)



Evidências da Atividade de exploração I – *Localização de pontos no plano*

Margarida



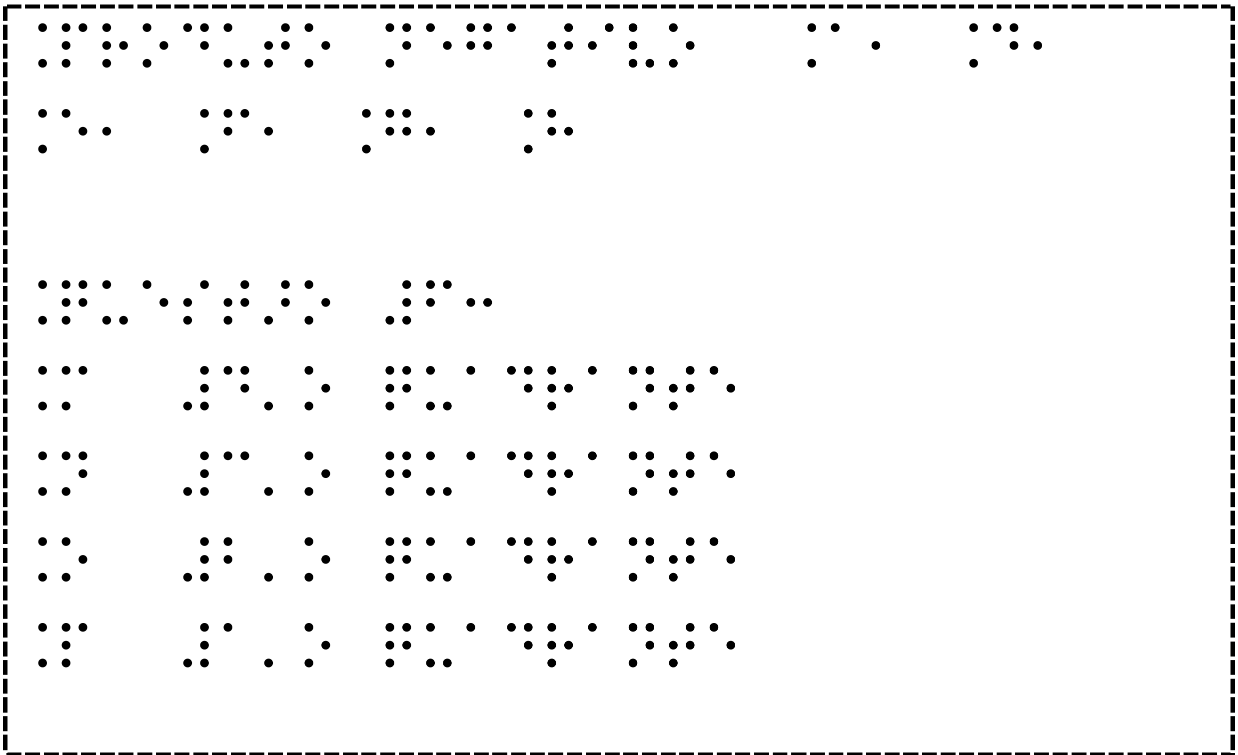


Figura 49: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da atividade de exploração I – *Localização de pontos no plano* da aluna Margarida

Questão 1:

A(-5,8) B(2,2) C(5,8) D(-5,4) E(-4,4) F(1,-6) G(4,-4) H(6,-8)

Questão 2:

A, B, G, H

Questão 3:

B, C, E, F

Questão 4:

B

Questão 5:

Soma positiva A, B, C

Produto negativo A, D, E, F, G, H

6)

M(2 , −3) é 4.ºQ

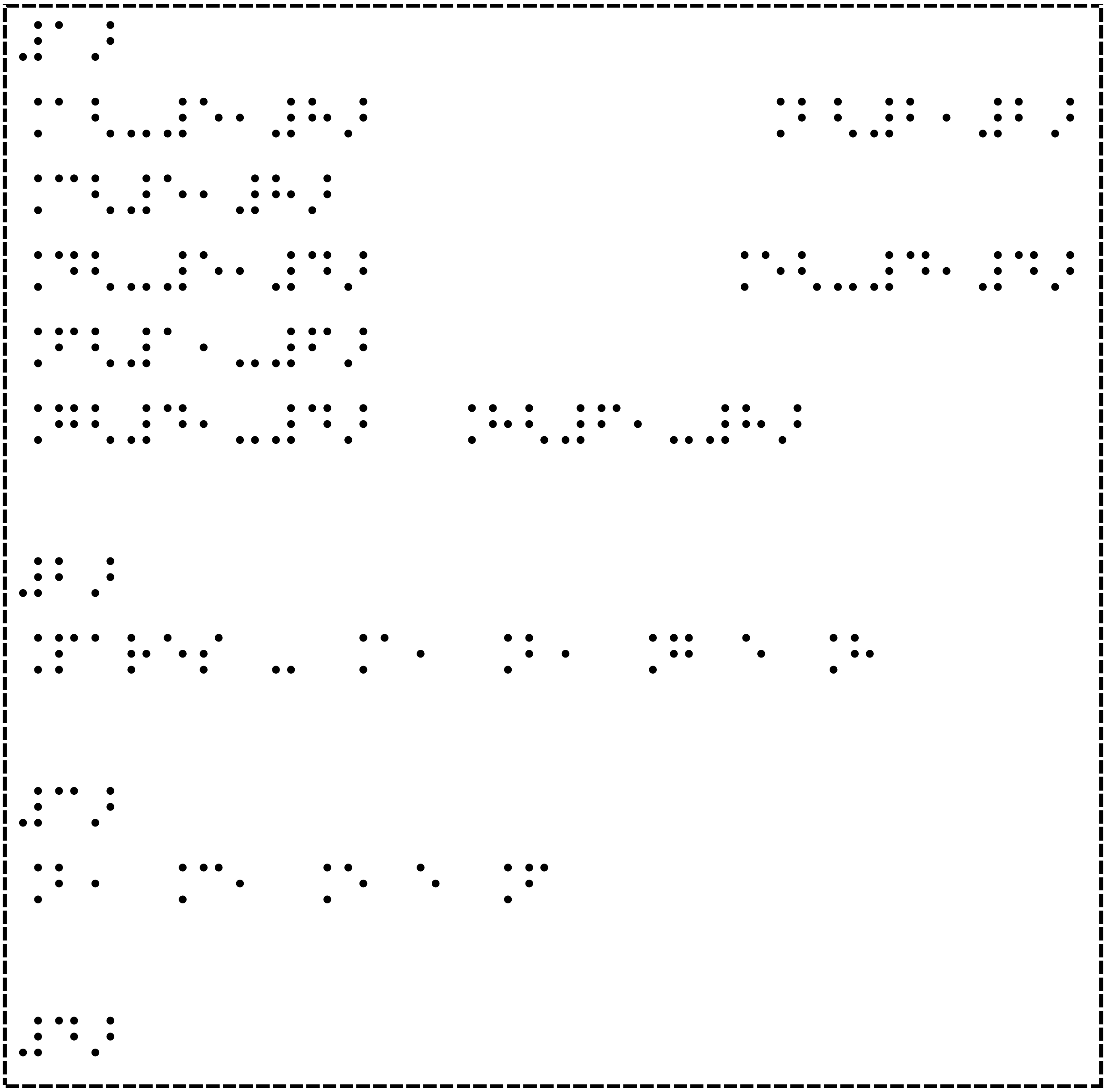
N(# 2 , −2) é 3.ºQ

O(−1 , 4) é 2.ºQ

P(1 , 5) é 1.ºQ

Figura 49A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da atividade de exploração I – *Localização de pontos no plano* da aluna Margarida

Rafael



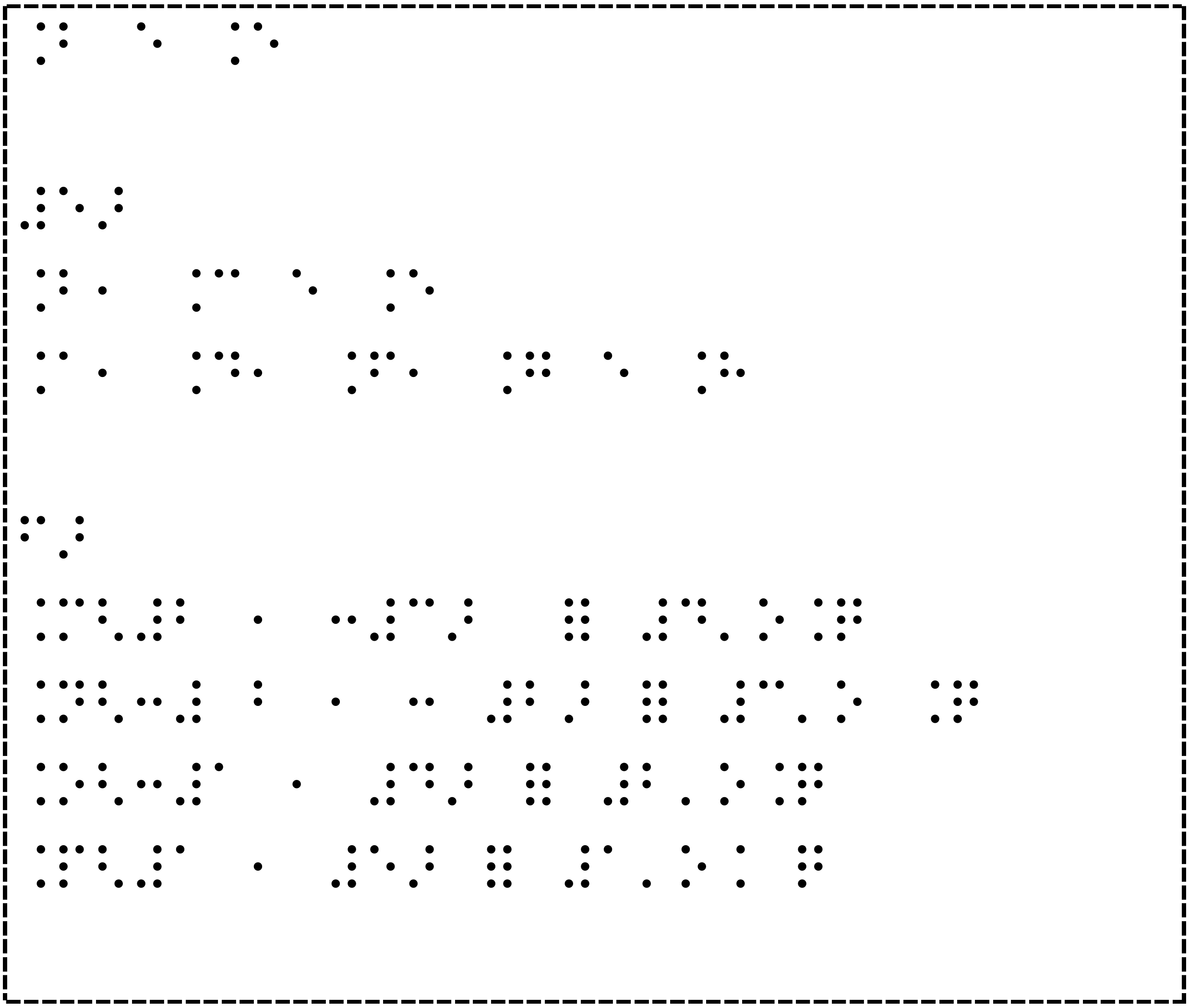


Figura 50: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da atividade de exploração I – *Localização de pontos no plano* do aluno Rafael

1)

A(-5,8) B(2,2) C(5,8)

D(-5,4) E(-4,-4) F(-1,6)

G(4,-4) H(6,-8)

2)

Pares - A, B, G e H

3)

B, C, E e F

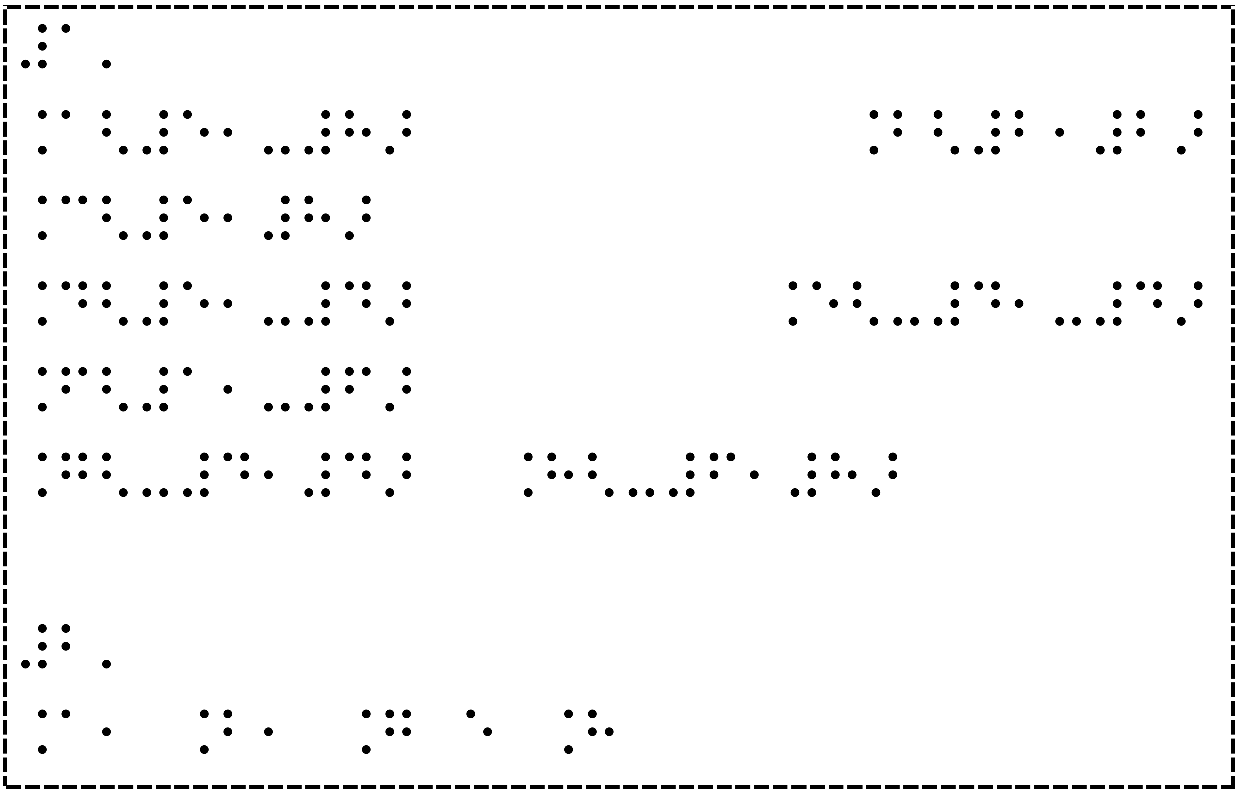
4)
B e E

5)
B, C e E
A, D, F, G e H

6)
M(2 , – 3) é 4.ºQ
N(– 2 , – 2) é 3.º Q
O(–1 , 4) é 2.ºQ
P(1 , 5) é 1.º Q

Figura 50A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da atividade de exploração I – *Localização de pontos no plano* do aluno Rafael

Pedro



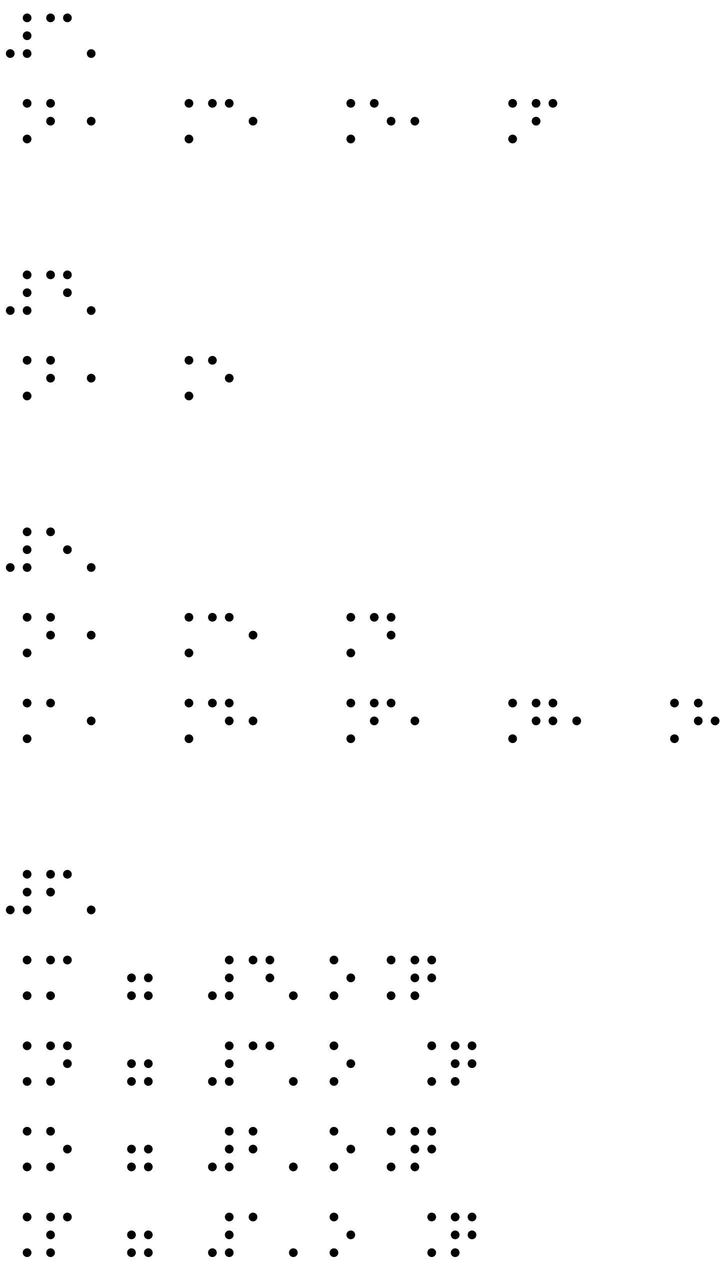


Figura 51: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da atividade de exploração I – *Localização de pontos no plano* do aluno Pedro

1.

A(5,-8) B(2,2) C(5,8)

D(5,-4) E(-4,-4) F(1,-6)

G(-4,4) H(-6,8)

2.
A, B, G e H

3.
B, C, E e F

4.
B e E

5.
B, C, D
A, D, F, G e H

6.
M = 4.ºQ
N = 3.º Q
O = 2.ºQ
P = 1.º Q

Figura 51A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da atividade de exploração I – *Localização de pontos no plano* do aluno Pedro

Da observação das evidências dos alunos, constata-se que nenhum dos alunos resolveu corretamente todas as questões da tarefa. Os alunos revelam alguma dificuldade relativamente à perceção das coordenadas dos diferentes pontos assinalados no referencial.

Na determinação das coordenadas nenhum aluno apresentou um ponto cujas coordenadas tivessem ao contrário, quer isto dizer, que os alunos identificam corretamente no par ordenado, a abcissa e a ordenada do ponto, o mesmo acontece na identificação dos quadrantes (questão 6). Contudo, cometem erros ao nível do sinal dos eixos coordenados (questão 1) e em cálculos aritméticos (questão 5).

7.6.4 – Expressão analítica ou algébrica de uma Função

A expressão algébrica ou analítica de uma função é uma expressão que traduz a regra que associa os objetos às respetivas imagens. Note-se que a mesma expressão algébrica pode representar funções diferentes, consoante o domínio. Desta forma, é fundamental indicar sempre o domínio de uma função quando a representamos por uma expressão algébrica. Duas funções só são iguais quando apresentam expressões analíticas equivalentes e o mesmo domínio. Embora não seja possível observar a imagem de determinado objeto por mera inspeção, conseguimos fazê-lo com um simples cálculo.

7.7 – Análise e reflexão das explorações dos alunos

No sentido de perceber como foi feita aquisição do conceito de função por parte dos alunos cegos elaborou-se e aplicou-se uma ficha de trabalho específica alusiva ao tema *Conceito de função*.

7.7.1 – Evidências – Conceito de Função

Nas situações **A)** e **B)** da ficha de trabalho "Conceito de função", a aluna Margarida e o aluno Rafael constatam de imediato, e sem qualquer dificuldade, que se trata de uma função apresentando uma justificação adequada às variáveis em causa.

Margarida:

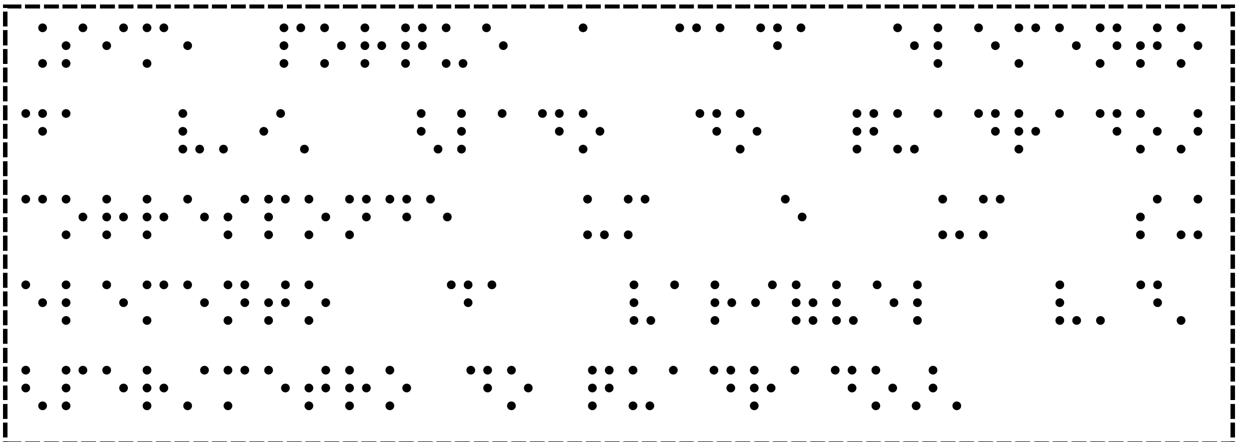


Figura 52: Extrato da resolução em Braille da questão 1, situação A, alínea a1) da aluna Margarida

Sim, porque a cada elemento da V.I. (lado do quadrado) corresponde um e um só elemento da variável V.D. (perímetro do quadrado).

Figura 52A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1, situação A, alínea a1) da aluna Margarida

Rafael:

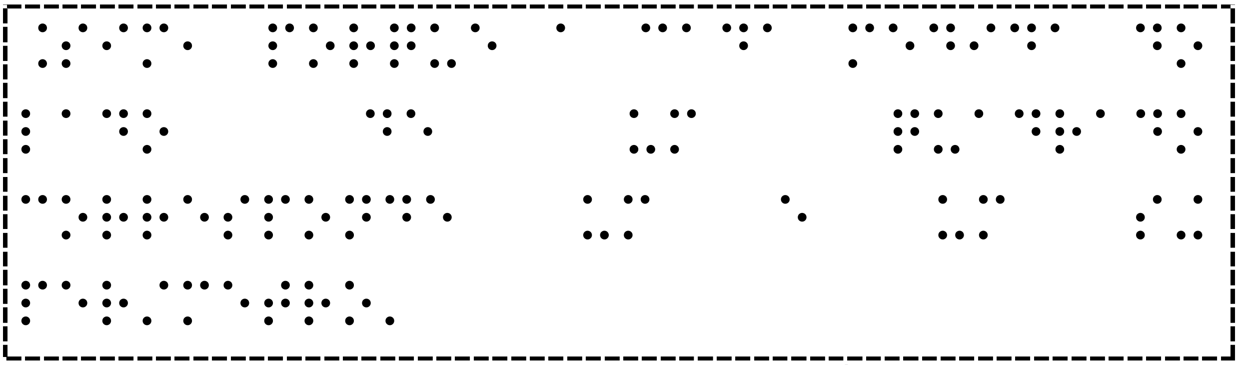


Figura 53: Extrato da resolução, em Braille da questão 1, situação A, alínea a1) do aluno Rafael

Sim, porque a cada medida do lado de um quadrado corresponde um e um só perímetro.

Figura 53A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1, situação A, alínea a1) do aluno Rafael

Margarida:

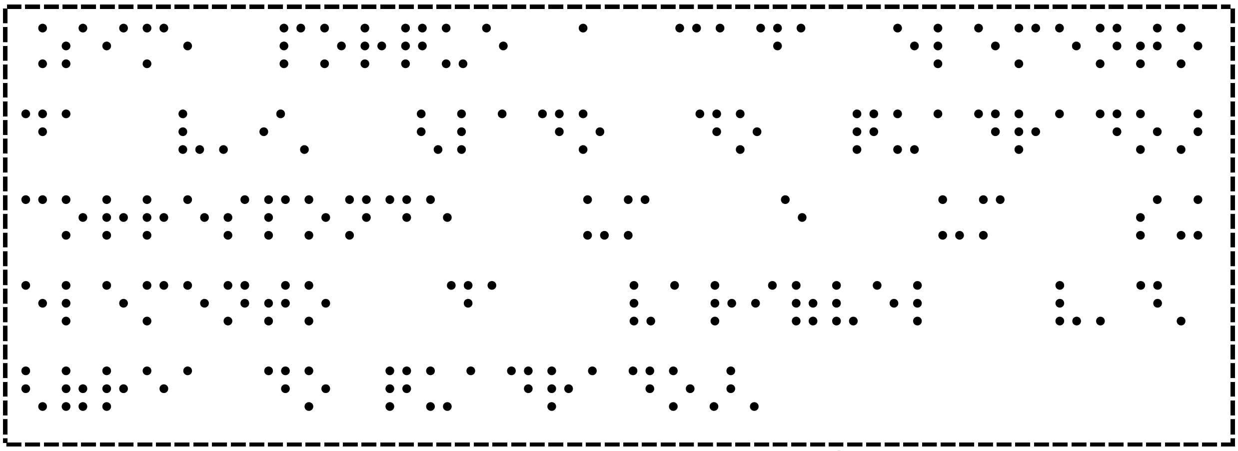


Figura 54: Extrato da resolução em Braille da questão 1, situação B, alínea b1) da aluna Margarida

Sim, porque a cada elemento da V.I. (lado do quadrado) corresponde um e um só elemento da variável V.D. (área do quadrado).

Figura 54A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1, situação B, alínea b1) da aluna Margarida

Rafael:

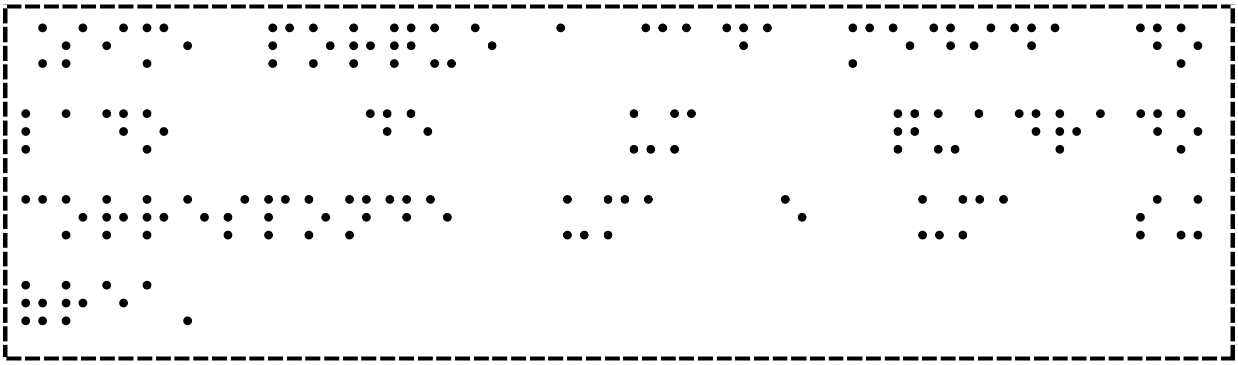


Figura 55: Extrato da resolução em Braille da questão 1, situação B, alínea b1) do aluno Rafael

Sim, porque a cada medida do lado de um quadrado corresponde uma e uma só área.

Figura 55A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1, situação B, alínea b1) do aluno Rafael

Na questão 2 alínea b) da ficha de trabalho, a Margarida e o Rafael continuam a evidenciar serem capazes de reconhecer correspondências que são funções, apresentando justificação adequada às variáveis em causa e identificam corretamente as variáveis independente e dependente.

Margarida:

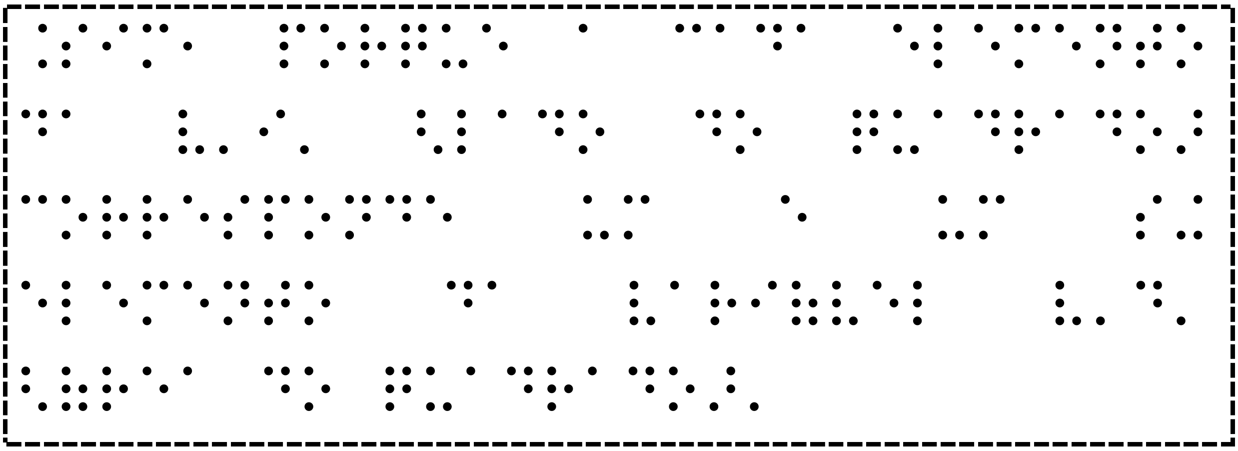


Figura 56: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea b) da aluna Margarida

Sim, porque a cada elemento da V.I. (lado do quadrado) corresponde um e um só elemento da variável V.D. (área do quadrado).

Figura 56A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea b) da aluna Margarida

Rafael:

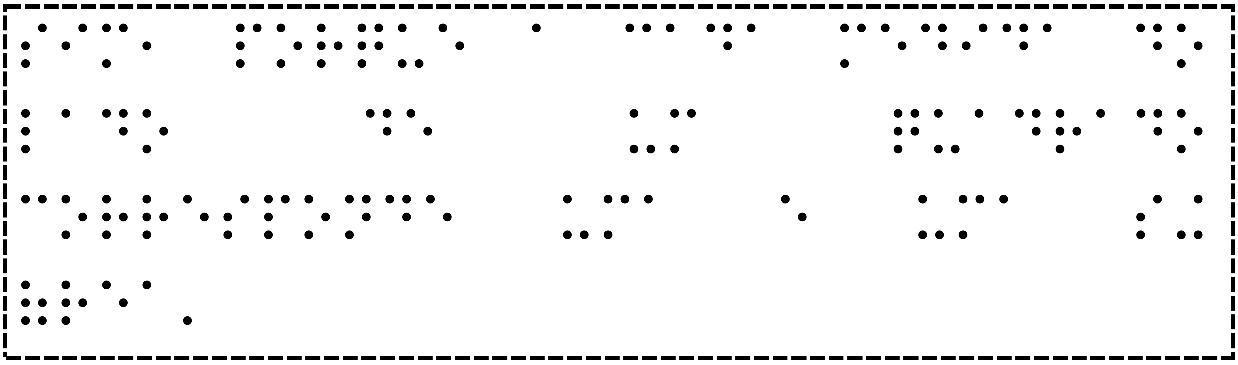


Figura 57: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea b) do aluno Rafael

Sim, porque a cada medida do lado de um quadrado corresponde uma e uma só área.

Figura 57A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea b) do aluno Rafael

Relativamente ao aluno Pedro, este revela uma enorme confusão no que diz respeito à noção de função. Na situação **A**, embora defina corretamente o conceito de função, demonstra não compreendê-lo, apenas memorizou o conceito. Assim sendo, não consegue adequar a definição à situação em questão, evidenciando não perceber qual a correspondência em causa e não identificando corretamente as variáveis independente e dependente.

Pedro:

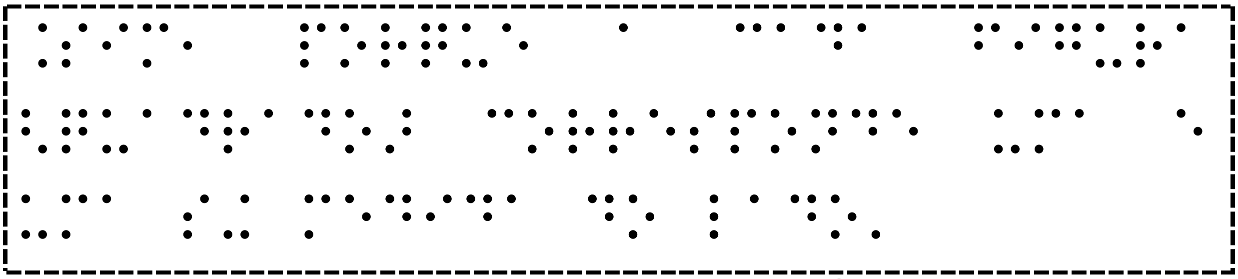


Figura 58: Extrato da resolução em Braille da questão 1, situação A, alínea a1) do aluno Pedro

Sim, porque a cada figura (quadrado) corresponde uma e uma só medida do lado..

Figura 58A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1, situação A, alínea a1) do aluno Pedro

Na situação B, o aluno continua a manifestar a não compreensão do conceito de função, confundindo este conceito com a noção de injetividade. Além disso, apresenta uma justificação errada, não dimensiona corretamente as variáveis em causa.

Pedro:

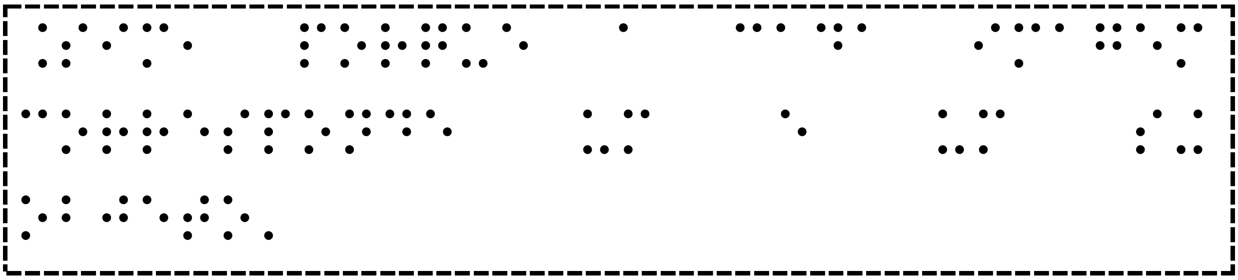


Figura 59: Extrato da resolução em Braille da questão 1, situação B, alínea b1) do aluno Pedro

Sim, porque a cada imagem corresponde um e um só objeto.

Figura 59A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1, situação B, alínea b1) do aluno Pedro

Neste momento, é crucial a intervenção do professor, devendo existir um espaço de reflexão e discussão.

Perante esta situação, o professor deverá perguntar, em primeiro lugar, quais as variáveis em jogo. Após dimensionar as variáveis, ou seja, V.I. – medida do lado e V.D. – perímetro do quadrado, deverá perguntar ao aluno, quem depende de quem? Ou então, qual a variável que necessito saber em primeiro lugar? E deverá explicar que só sabendo a medida do lado de um quadrado é que consigo saber qual é o valor do perímetro desse quadrado. Assim sendo, a V.I. será a medida do lado do quadrado e a V.D. será o seu perímetro. Então, a resposta deverá ser que se trata de uma função porque a cada medida do lado de um quadrado corresponde um e um só perímetro.

Analisando a resolução do aluno na questão 1, situação A, alínea a1), ele utiliza os termos objeto e imagem, pelo que aconselho a utilizar a estratégia que já referi anteriormente, Estratégia de definição II – Objeto e imagem (técnica do espelho), pois permite uma melhor compreensão do conceito, tal como é demonstrado a seguir aquando da resolução da questão 2 alínea b) da ficha de trabalho pelo aluno Pedro.

Pedro:

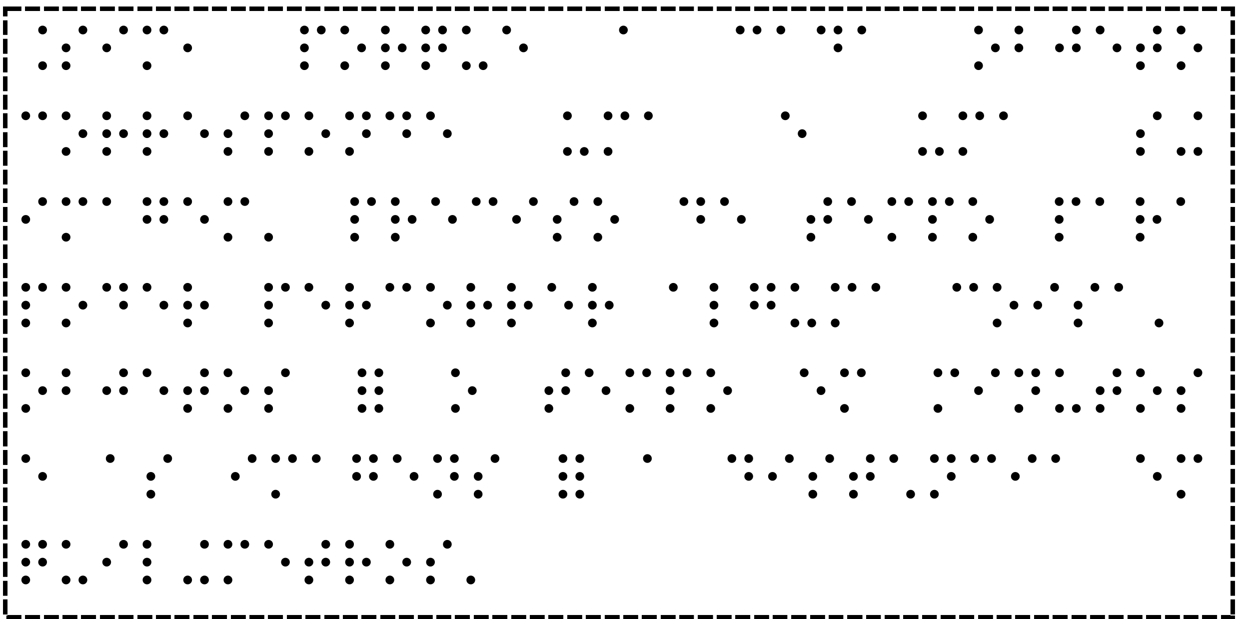


Figura 60: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea b) do aluno Pedro

Sim, porque a cada objeto corresponde uma e uma só imagem. Preciso de tempo para poder percorrer alguma coisa.
Objetos é o tempo em minutos e as Imagens é a distância em quilómetros.

Figura 60A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea b) do aluno Pedro

Pela resposta do aluno Pedro, verifica-se que compreendeu o conceito, e é interessante observar o raciocínio por ele expressado, evidenciando a compreensão tanto do conceito, como das variáveis em jogo.

7.7.2 – Evidências – Representações de uma Função

Com o objetivo de aferir de que forma os alunos fazem a conversão entre as diferentes representações de uma função e as dificuldades por eles sentidas, analisou-se as fichas de trabalho n.º2 e n.º3.

7.7.2.1 – Representação tabular

Observando a questão 1 a) da ficha de trabalho n.º2, constata-se que os alunos Rafael e Pedro completam erradamente a tabela, devido a uma má interpretação do problema, interpretam incorretamente o valor pago quando se percorre um quilómetro.

Rafael:

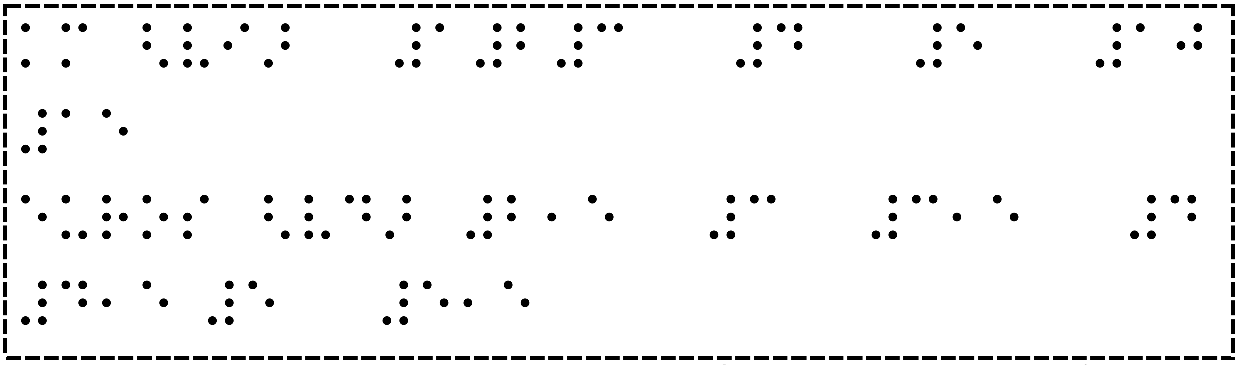
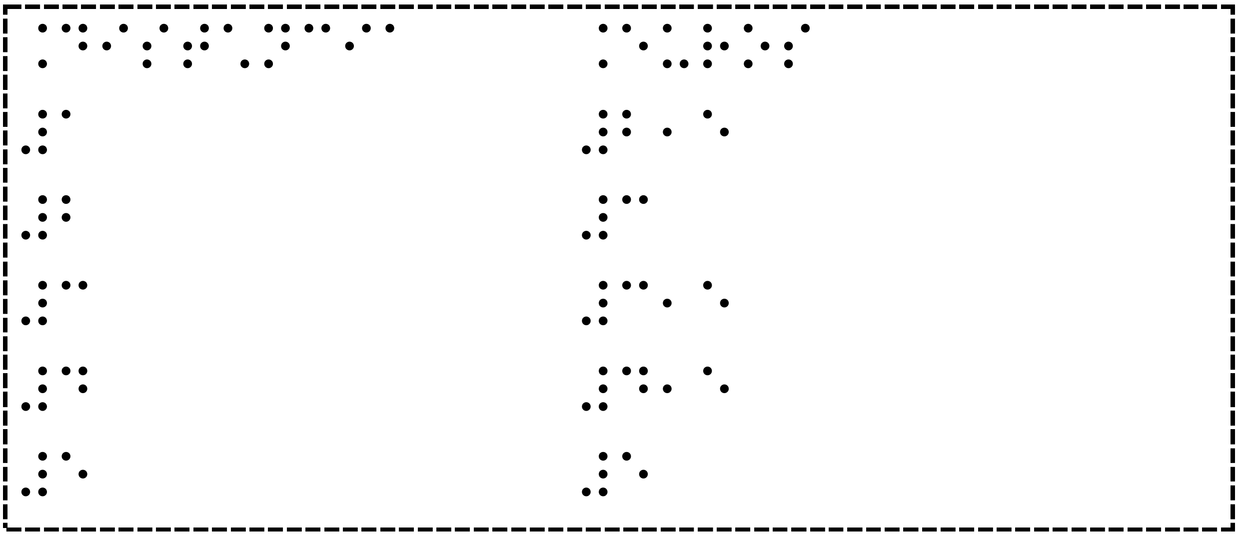


Figura 61: Extrato da resolução em Braille da questão 1 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

Km (VI)	1	2	3	4	5	10	15
Euros (VD)	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

Figura 61A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

Pedro:



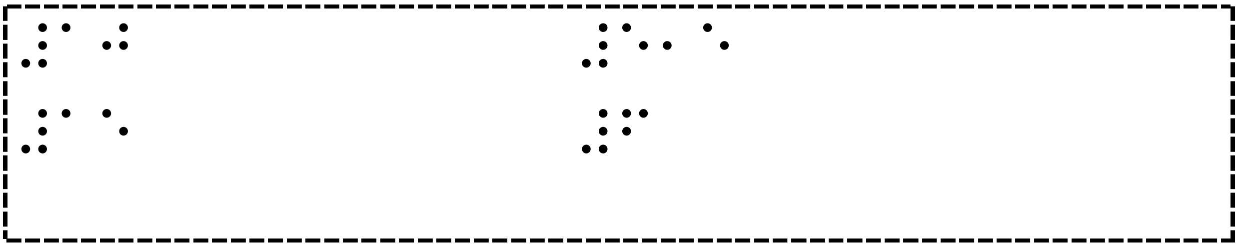


Figura 62: Extrato da resolução em Braille da questão 1 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

Distância	euros
1	2,5
2	3
3	3,5
4	4,5
5	5
10	5,5
15	6

Figura 62A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

Assim sendo, ao avaliarem mal o valor pago no primeiro quilómetro, completam incorretamente todos os valores da tabela, recorrendo a uma estratégia aditiva que está correta de acordo com o valor obtido para um quilómetro. O aluno Pedro comete entretanto um erro de cálculo no valor a pagar no quarto quilómetro.

Todavia, é interessante observar que o aluno Rafael faz questão de identificar as variáveis em causa. Nota-se mais uma vez a compreensão das variáveis em estudo. No entanto, como se poderá constatar mais adiante, os alunos revelam serem capazes de obter a expressão algébrica que representa a função mesmo tendo feito uma representação tabular incorreta, o que não deixa de ser curioso.

A aluna Margarida manifestou uma compreensão total da questão em estudo. Apresentou um cuidado na elaboração da resposta ao problema como se pode constatar a seguir.

Margarida:

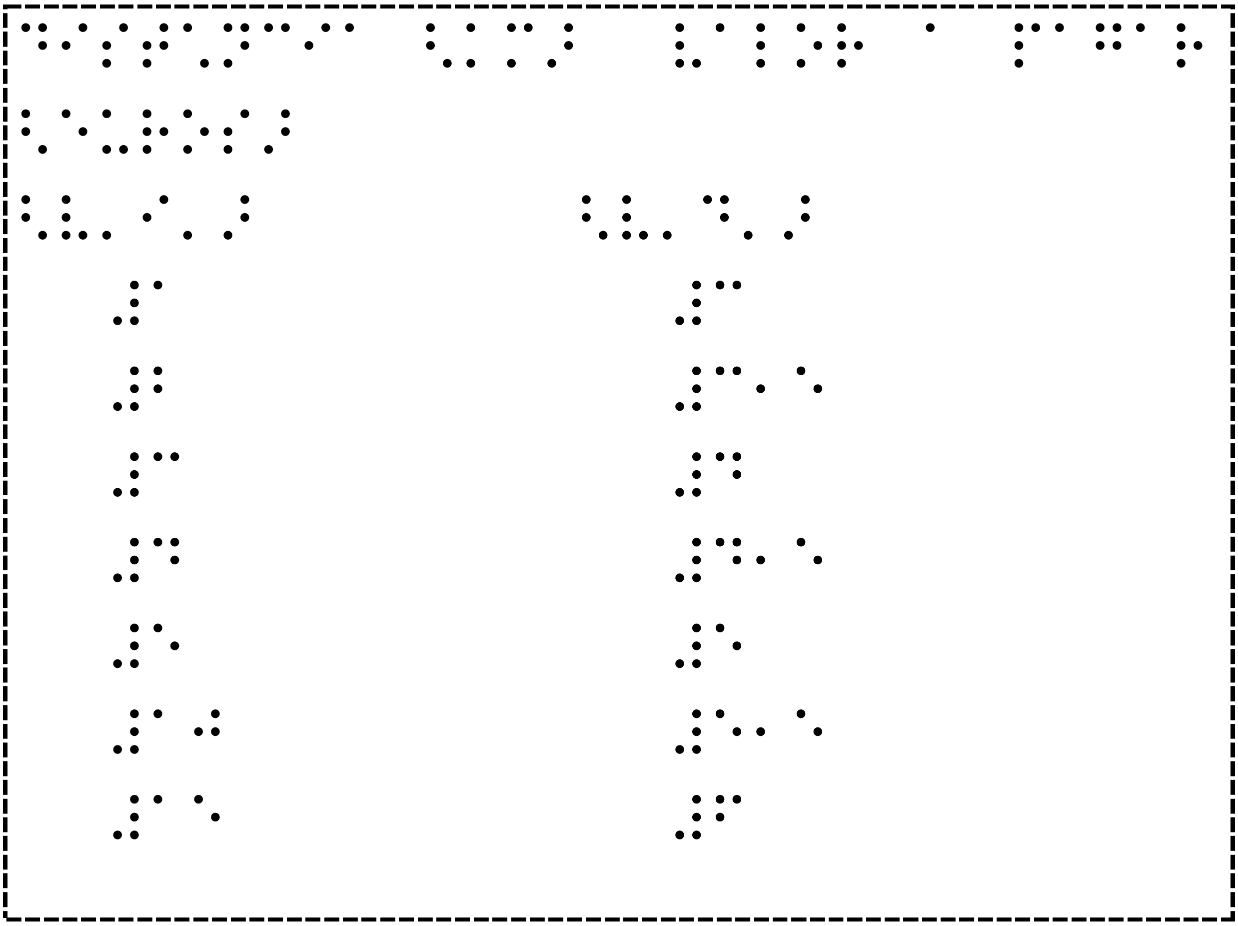


Figura 63: Extrato da resolução em Braille da questão 1 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

Distância (km) (V.I.)	Valor a pagar (euros) (V.D.)
1	3
2	3,5
3	4

4	4,5
5	5
10	5,5
15	6

Figura 63A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

Na ficha de trabalho n.º1, questão 2 alínea a) pede-se para completar a tabela, pelo que os alunos têm que determinar a imagem correspondente a alguns objetos e os objetos a que correspondem algumas imagens, havendo vários processos de resolução possíveis.

Os alunos Margarida e Rafael preenchem com relativa facilidade os espaços em branco da tabela. O aluno Rafael utiliza preferencialmente uma estratégia aditiva e subtrativa e a aluna Margarida uma estratégia multiplicativa e subtrativa. Observe-se o excerto seguinte:

Rafael: “A primeira é 4, estava a 4 quilómetros de casa. 15 minutos é 1km, então tira um quilómetro, dá 3.”
Margarida: “Quinze vezes dois dá trinta, quatro menos dois dá dois. A distância é dois para trinta minutos. Quatro vezes quinze é sessenta, logo quatro menos quatro é zero.”

Margarida

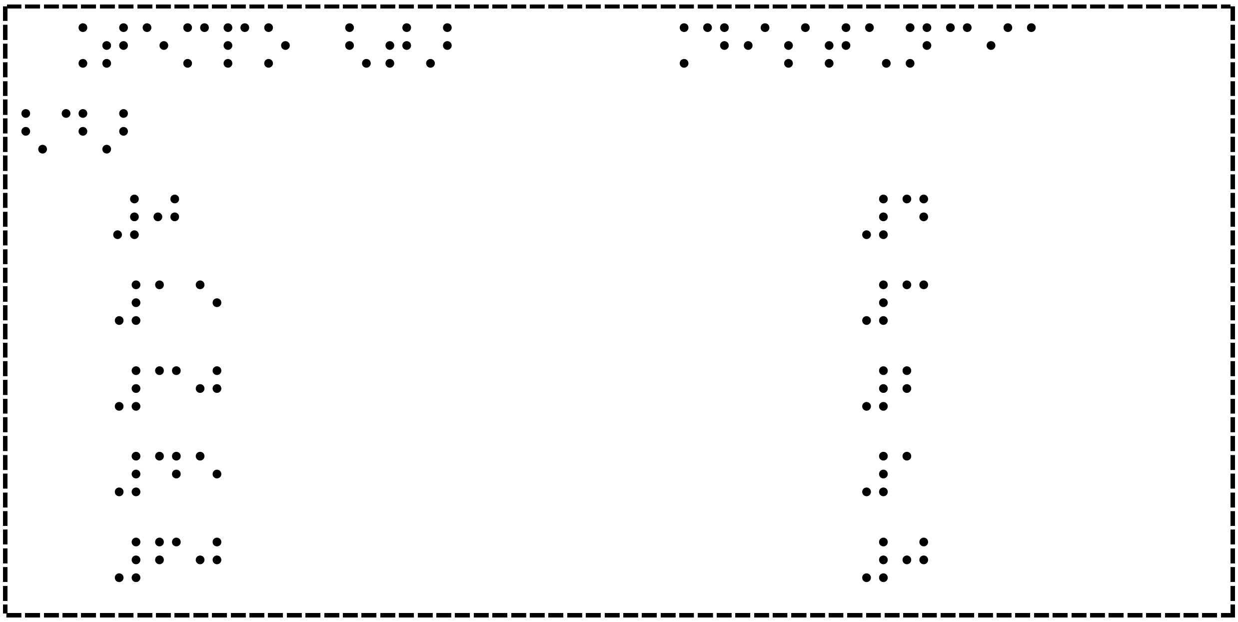


Figura 64: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º1 da aluna Margarida

Tempo (t)	Distância (d)
0	4
15	3
30	2
45	1
60	0

Figura 64A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º1 da aluna Margarida

Rafael

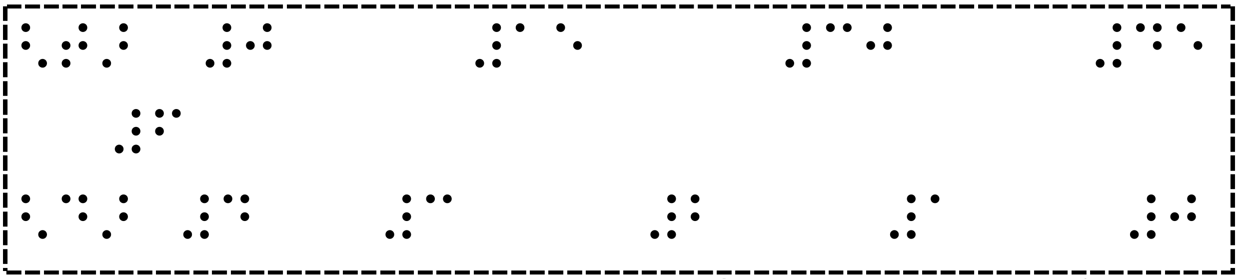


Figura 65: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º1 do aluno Rafael

(t)	0	15	30	45	60
(d)	4	3	2	1	0

Figura 65A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º1 do aluno Rafael

Relativamente a esta questão, o aluno Pedro utiliza a seguinte estratégia:

Completa rapidamente o primeiro espaço da tabela, evidenciando que percebeu o enunciado. De seguida, preenche o espaço seguinte, dizendo:
“Se um quilómetro corresponde a 15 minutos, se estamos no três, logo ele percorreu um quilómetro e passa para três”. Então posso aplicar uma regra de três simples para calcular os próximos.”

Professor: “Se achas, então concretiza.”

Neste momento o aluno escreve na sua máquina:

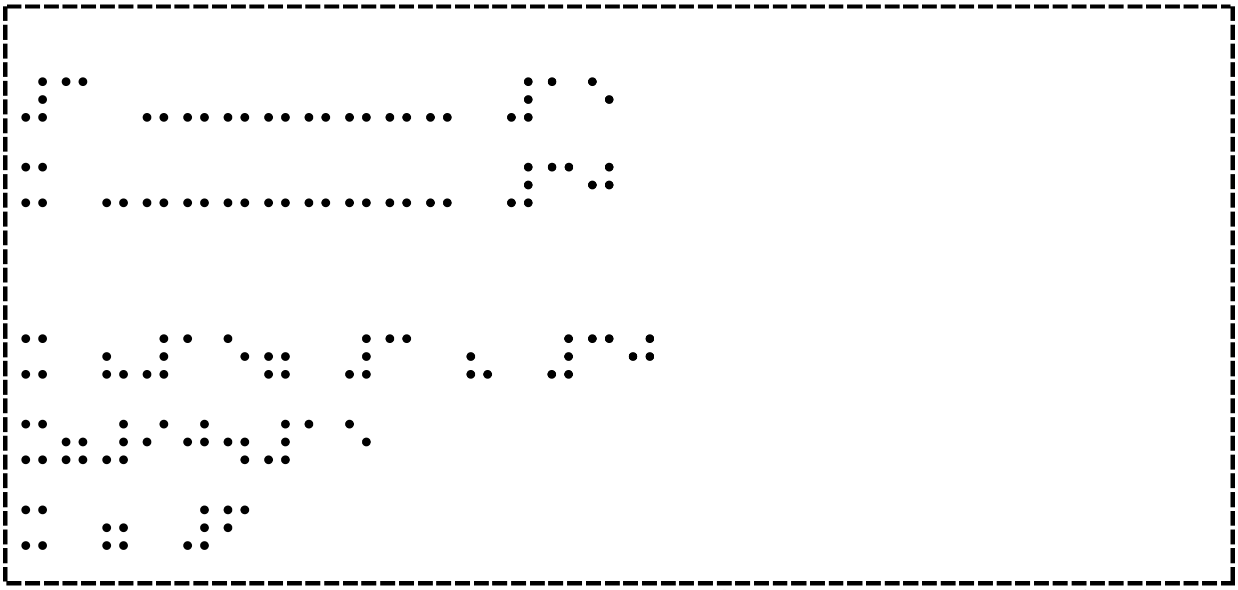


Figura 66: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º1 do aluno Pedro

3 -------- 15

X --------- 30

X x 15= 3 x 30

$X = \frac{90}{15}$

X = 6

Figura 66A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º1 do aluno Pedro

Curiosamente, assim que obtém o resultado, constata que não faz sentido no contexto do problema.

Pedro: “Não faz sentido este resultado, e agora? Porquê?”

Professor: “Porquê?”

Professor: “Aplica-se uma regra de três simples, em que situação? Recordas-te?”

Pedro: “Quando é proporcional.”

Professor: “Que tipo de proporcionalidade?”

Pedro: “Direta.”

Professor: “E estamos perante uma situação de proporcionalidade direta?”

Pedro: “Não.”

Professor: “Porquê?”

Pedro: “Então, não faz sentido nenhum, para trinta teria de dar o valor menor que três.”

Professor: “Então, numa situação de proporcionalidade direta quando uma grandeza aumenta a outra terá também de aumentar à mesma proporção, certo?”

Pedro: “Pois, não é o caso.”

Pedro: Então não posso usar uma regra de três simples.

Quando os alunos resolvem este tipo de questão recorrem, na maioria das vezes, a uma regra de três simples. Neste caso, o preenchimento é incorreto, pois o recurso à regra de três simples é ilegítimo (não se trata de uma situação de proporcionalidade direta). A regra de três simples parece tratar-se de uma forma de obter um valor desconhecido conhecendo três valores, mas que é desprovida de qualquer significado, na maioria dos casos.

7.7.2.2 – Representação gráfica e representação algébrica de uma Função

É de referir em primeiro lugar que antes do início da unidade didática os alunos já tinham trabalhado a identificação de pontos num referencial cartesiano no plano. Consequentemente, já estavam familiarizados com a terminologia relativa à representação de pontos: coordenadas, abcissa, ordenada, eixo das abcissas e eixo das ordenadas.

Com o intuito de analisar a flexibilidade dos alunos na transformação de uma representação de uma função na representação gráfica e na representação algébrica, analisou-se a questão 2 da ficha de trabalho n.º2.

No que concerne à questão 2 alínea a), o Pedro começa por procurar relações entre as abcissas e as ordenadas, dividindo o x pelo y e também tentando utilizar o raciocínio da regra três simples, tal como tinha feito na outra atividade. Estas tentativas acabam por se dissipar, uma vez que as considera inconclusivas no que diz respeito à existência de uma relação invariante entre as abcissas e as ordenadas. Evidencia assim a sua desistência em encontrar mais relações, o aluno limita-se apenas a referir que “se o x aumenta o y também aumenta”.

No que se refere à questão 2 alínea b), para determinar a temperatura ao fim de 20 minutos o aluno, através da leitura do gráfico, indica um valor aproximado mas interroga-se sobre a adequabilidade desta sua abordagem, dizendo “se não estiver à escala, como é?”. Seguidamente, tenta encontrar um resultado justificado analiticamente, aplicando a regra de três simples, com o par ordenado (10; 20). Observe-se:

Pedro

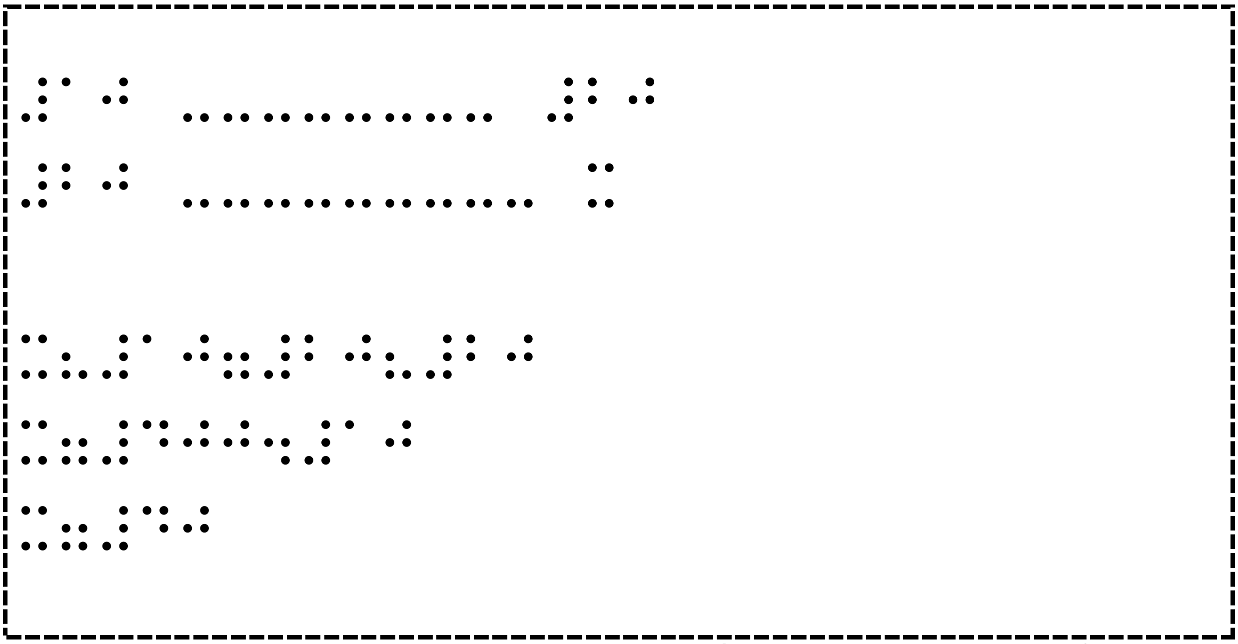


Figura 67: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

10 -------- 20

20 --------- X

X x 10= 20 x 20

X = $\frac{400}{10}$

X = 40

Figura 67A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

Assim que obtém o resultado, o aluno manifesta imediatamente a impossibilidade do resultado alegando que basta apenas visualizar o gráfico. O aluno abandona as estratégias utilizadas anteriormente e tenta encontrar uma regra que relacione x e y. Então, parte para a observação gráfica e constata que o y vai aumentando de 5 em 5, e que o x vai ao mesmo tempo de 10 em 10, conseguindo assim relacionar a variação do x com a do y. Deste modo, o aluno identifica uma propriedade dinâmica da função de continuação do fenómeno, que o auxiliará posteriormente na determinação do valor do declive da função afim. Depois de outras tentativas infrutíferas, o aluno identifica que a função representada graficamente é uma função afim, e tenta utilizar procedimentos algébricos efetuados nas aulas:

Pedro: “Ora o b é a ordenada na origem, ou seja é o ponto onde a reta corta o eixo dos yy, logo é 15, certo?”
Pedro: “Falta ou m ou o k é a mesma coisa, correto? … Como a reta está a tombar para a direita, ou seja para o lado do meu braço mais forte, então é positivo, certo? Mas falta o valor. Só sei que é positivo, ok?

Aqui existiu a necessidade de desbloquear o raciocínio do aluno:

Professor: “Pensa na relação entre as variáveis que encontraste?”
Pedro: “Ah! Sim, posso dividir o 5 pelo 10, é o mesmo que 0,5”

Assim sendo, o aluno divide a variação do y(5) pela variação do x(10), que tinha anteriormente referido como relação entre as variáveis. Chega, então à regra geral apresentada em baixo e, após solicitação do professor, identifica na expressão o significado das constantes encontradas no contexto do problema. Observe-se:

Pedro

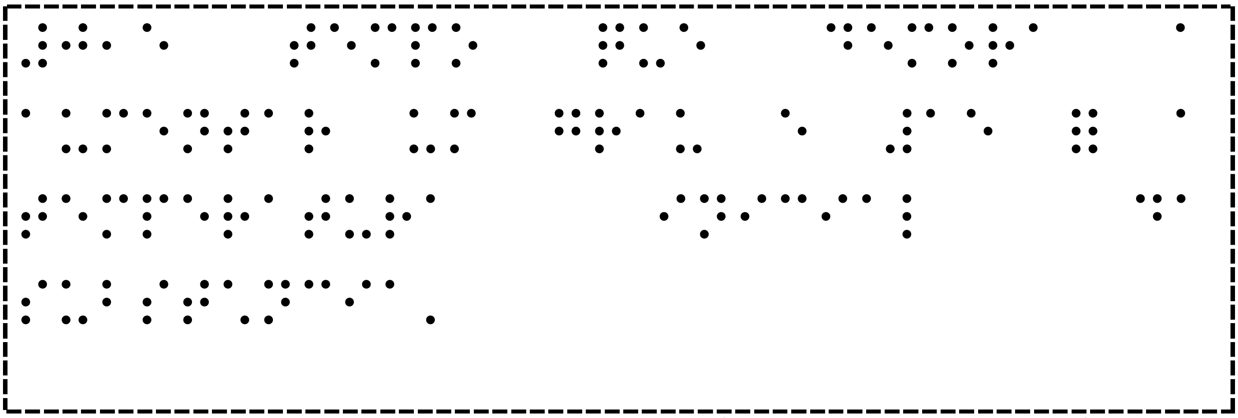


Figura 68: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea d) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

$y = mx + b$

$y = 0{,}5x + 15$

0,5 tempo que demora a aumentar um grau e 15 é a temperatura inicial da substância.

Figura 68A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea d) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

O aluno revela muito entusiasmado e toma a iniciativa de confirmar os seus resultados. Testa a veracidade da *regra geral* para aquela situação com exemplos concretos substituindo-os na expressão encontrada, tal como é ilustrado no que se segue:

Pedro

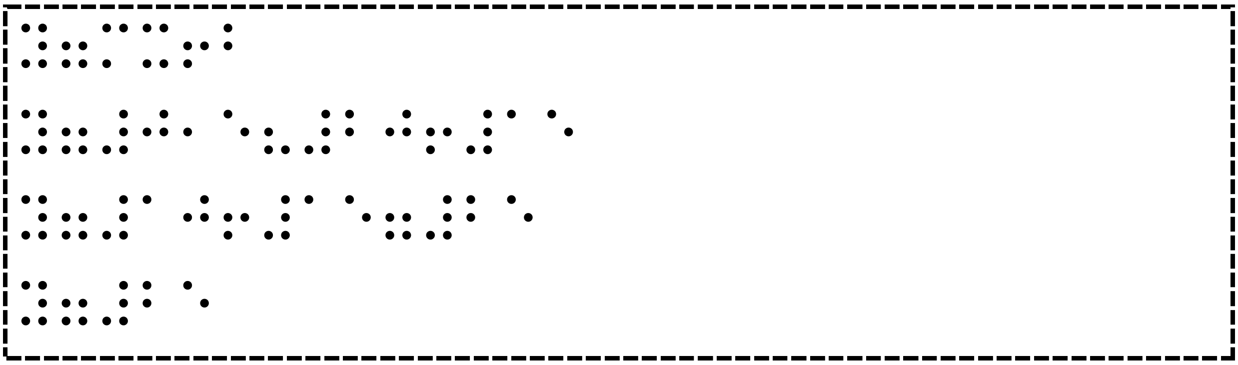


Figura 69: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea b) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

y = mx +b

y = 0,5 x 20 + 15

y = 10 + 15 = 25

y = 25

Figura 69A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea b) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

Desta forma, pode constatar-se que existe uma preocupação do aluno procurar a aplicabilidade da regra geral a outros resultados.

A fim de encontrar o objeto de uma determinada imagem dada, o aluno equaciona a situação e resolve-a, aplicando desta forma um procedimento algébrico.

Pedro

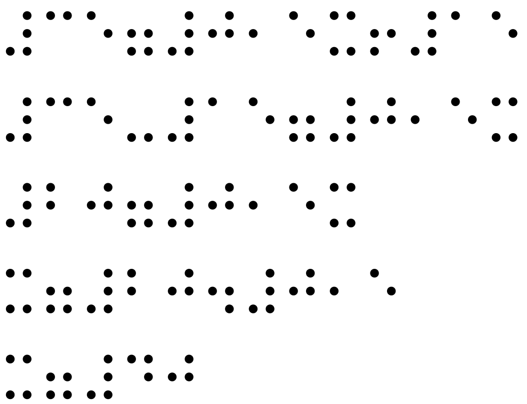


Figura 70: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea c) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

35 = 0,5x+15

35 – 15 = 0,5x

20 = 0,5x

$x=\frac{20}{0,5}$

x = 40

Figura 70A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea c) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Pedro

Quanto ao aluno Rafael, inicialmente começa por descrever uma relação entre os valores de x e outra entre os valores de y, mas não os relaciona entre si.

Rafael

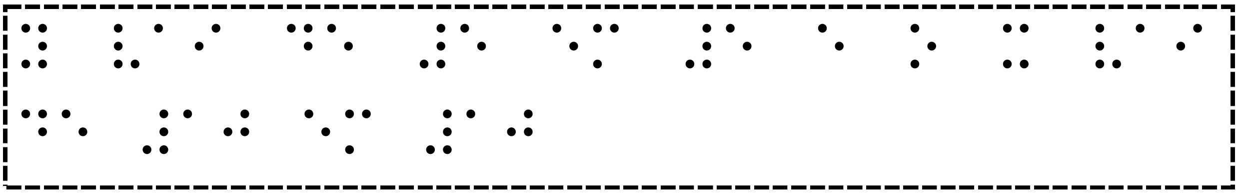


Figura 71: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

y vai de 5 em 5 e o x vai de 10 em 10

Figura 71A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea a) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

Todavia, mais adiante o aluno acaba por estabelecer uma relação entre a variação da tempo e da temperatura afirmando, que o valor de x é o dobro do valor de y, identificando assim, uma covariação entre as duas grandezas.

Para a resolução da questão 2 alínea b), o aluno baseia-se na covariação das grandezas identificada e determina o valor 25.

Rafael

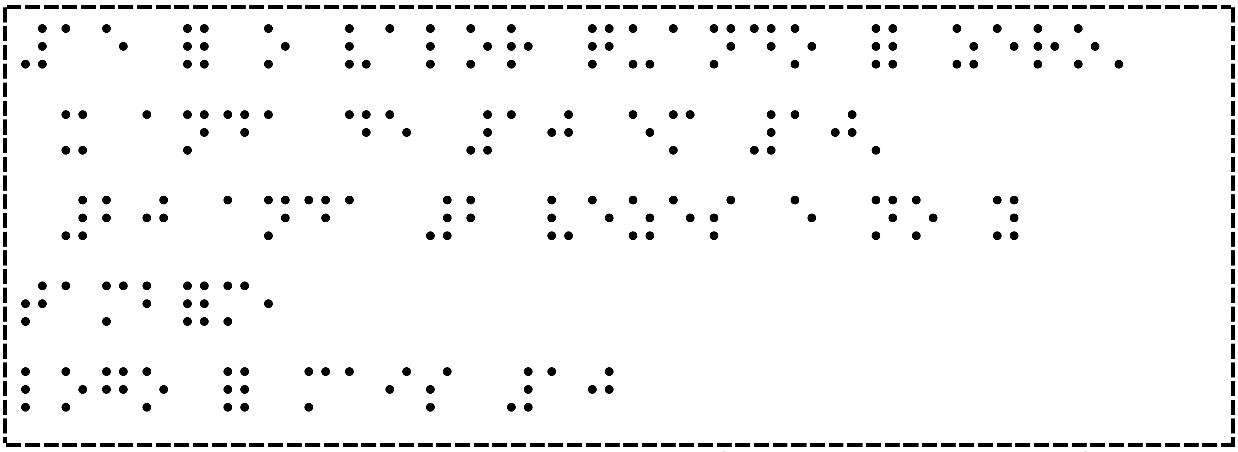


Figura 72: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea b) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

15 é o valor quando é zero.

x anda de 10 em 10.

20 anda 2 vezes e no y também,

logo é mais 10

Figura 72A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea b) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

Na questão 2 alínea c) da ficha de trabalho n.º2, o aluno apresenta o seguinte raciocínio:

Rafael

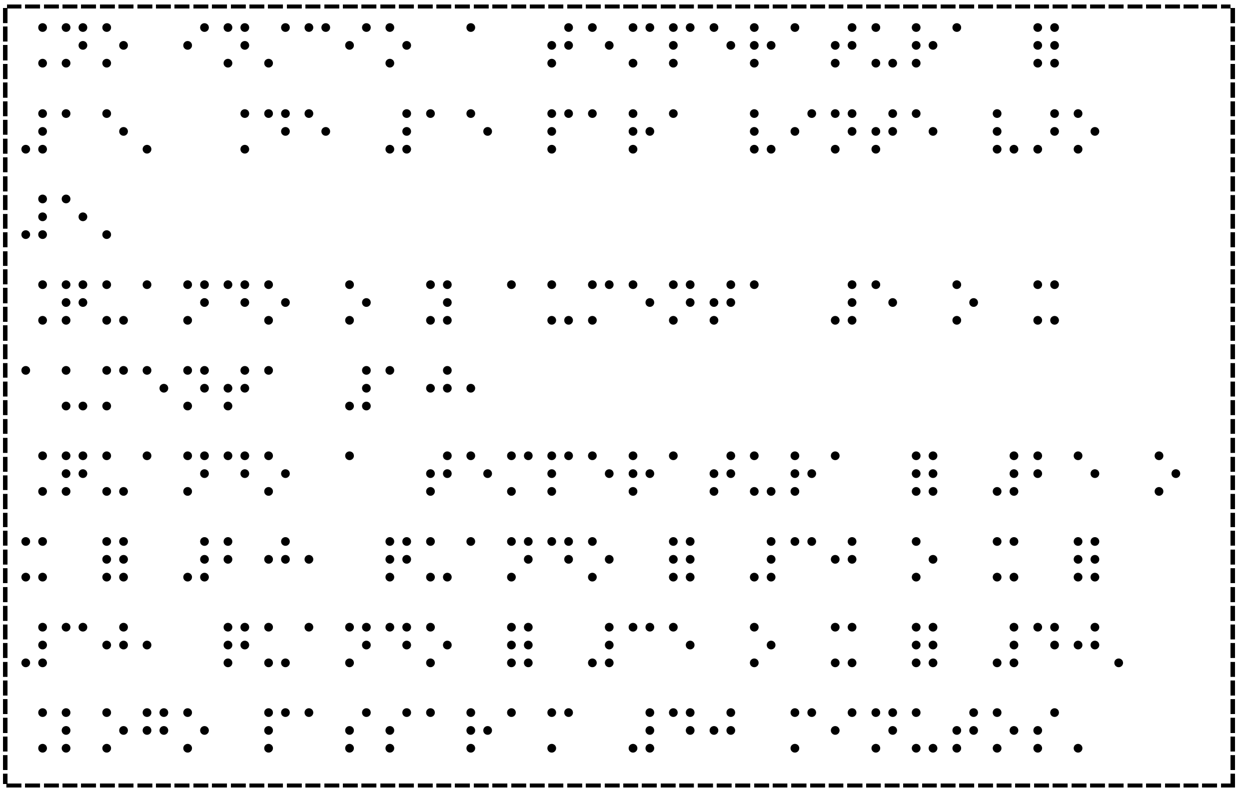


Figura 73: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea c) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

No início a temperatura é 15. De 15 para vinte vão 5.

Quando o y aumenta 5 o x aumenta 10,

Quando a temperatura é 25 o x é 20, quando é 30 o x é 30, quando é 35 o x é 40.

Logo passaram 40 minutos.

Figura 73A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea c) da ficha de trabalho n.º2 do aluno Rafael

Relativamente à questão 2 alínea d), na determinação da regra geral, o aluno não apresenta uma estratégia de resolução, apenas refere que a ordenada na origem é 15, por ser o ponto onde a reta intersecta o eixo das ordenadas.

No caso da aluna Margarida, esta imediatamente analisa o gráfico e associa os dados apresentados a uma relação funcional, procurando estabelecer correspondências entre objetos e imagens, o que é evidenciado pelas suas afirmações:

Margarida: “10 em 10 minutos aumenta 5ºC”.

Mais uma vez a aluna identifica uma propriedade dinâmica da função, de continuação do fenómeno, que utiliza para determinar a temperatura ao fim de 20 minutos.

Margarida

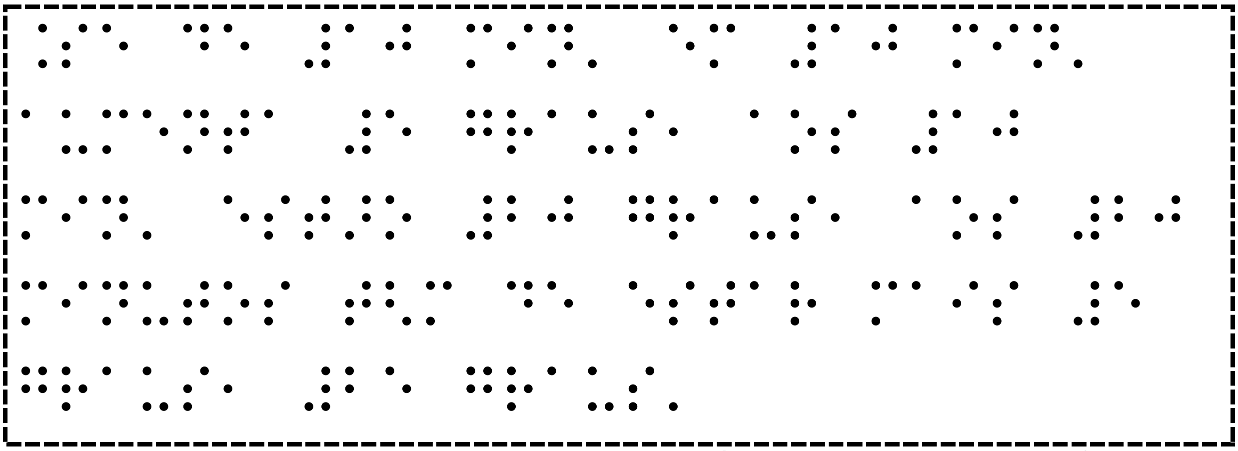


Figura 74: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea b) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

Se de 10 min. em 10 min. aumenta 5 graus, aos 10 min. estão 20 graus, aos 20 minutos têm de estar mais 5 graus, 25 graus.

Figura 74A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea b) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

Na questão 2 alínea c), a fim de determinar o instante que corresponde à temperatura 35, a aluna recorre a raciocínios inversos, como se pode observar:

Margarida

Figura 75: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea c) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

35 – 15 = 20

20 / 5 = 4

4 x 10 = 40

Figura 75A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea c) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

O professor, após a conclusão da questão 2 alínea c), pede para a aluna explanar o seu raciocínio, o que a aluna faz referindo: "*tirei aos 35 os 15 iniciais, quando estava no zero e foi dar 20 e a estes 20 dividi por 5 para saber quantos 10 minutos passaram, que foram 4 vezes 10 que dá os 40 minutos*."

No que diz respeito à questão 2 alínea d) a aluna verifica tratar-se de uma função afim do tipo y=kx+15, e de seguida, determina o valor do declive usando um procedimento explorado em contexto de aula, tal como se verifica no seguinte extrato:

Margarida

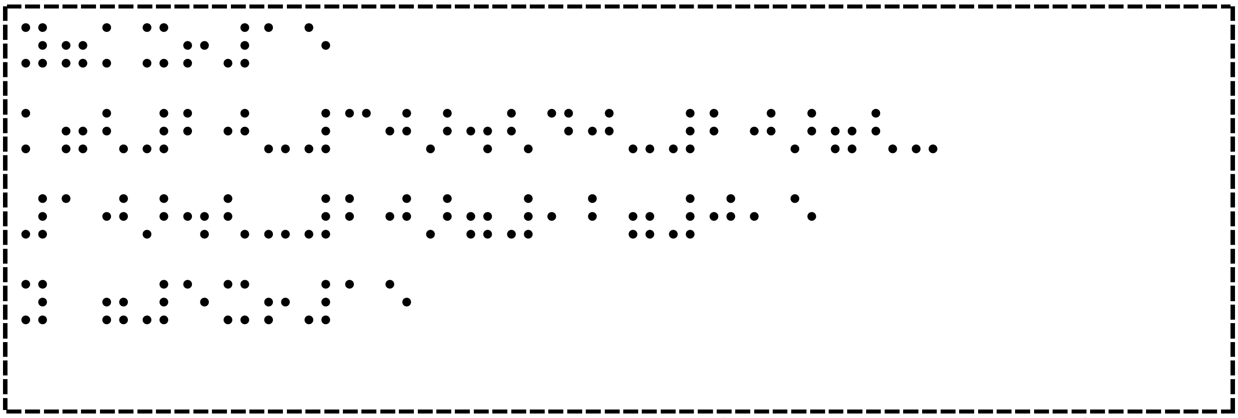


Figura 76: Extrato da resolução em Braille da questão 2 alínea d) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

y = kx +15

$$k = \frac{20-30}{40-20} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

y = 0,5x + 15

Figura 76A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 alínea d) da ficha de trabalho n.º2 da aluna Margarida

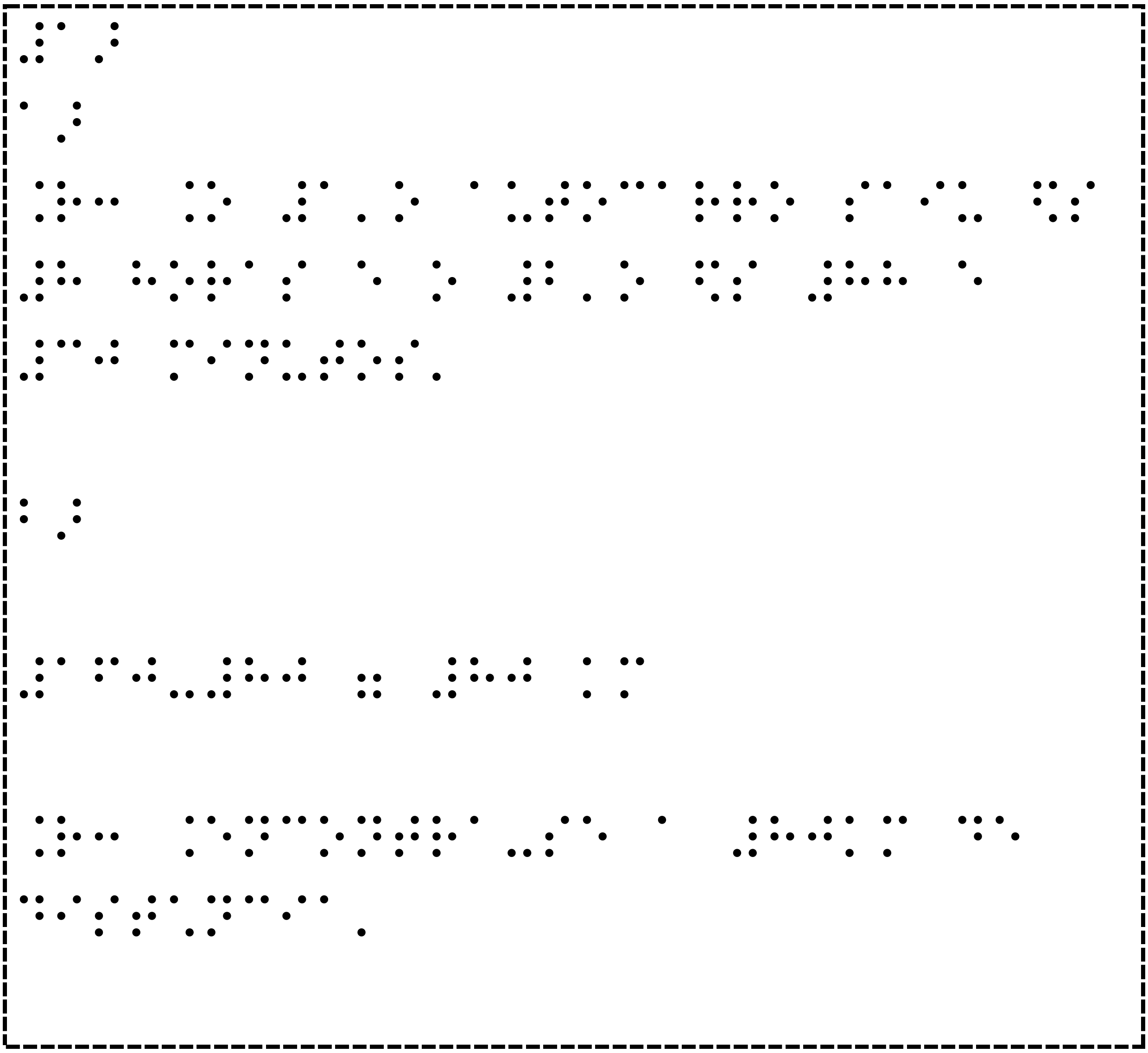
É de referir que, após a escrita da expressão algébrica da função, o professor pediu para que a aluna interpretasse a respetiva expressão, tendo a aluna justificado que "*0,5 é o declive que corresponde ao número de graus que aumenta por minuto e 15 é a ordenada na origem, que corresponde aos graus no início da experiência*", demostrando desta forma a sua facilidade em atribuir significado no contexto do problema aos objetos matemáticos envolvidos nas suas generalizações.

A aluna revela compreensão das relações quantitativas envolvidas em cada uma das situações, o que lhe permite responder às perguntas utilizando o significado das operações realizadas e dos resultados obtidos.

Para melhor perceber a capacidade de interpretação gráfica dos alunos, conversão da representação gráfica para a representação algébrica e representação tabular analisou-se as questões 1, 3 e 4 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III*. Deste modo, a fim de observar as dificuldades sentidas pelos alunos cegos, coloquei-os no mesmo grupo de trabalho.

<u>Evidências da questão 1 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* da aluna Margarida</u>

Margarida



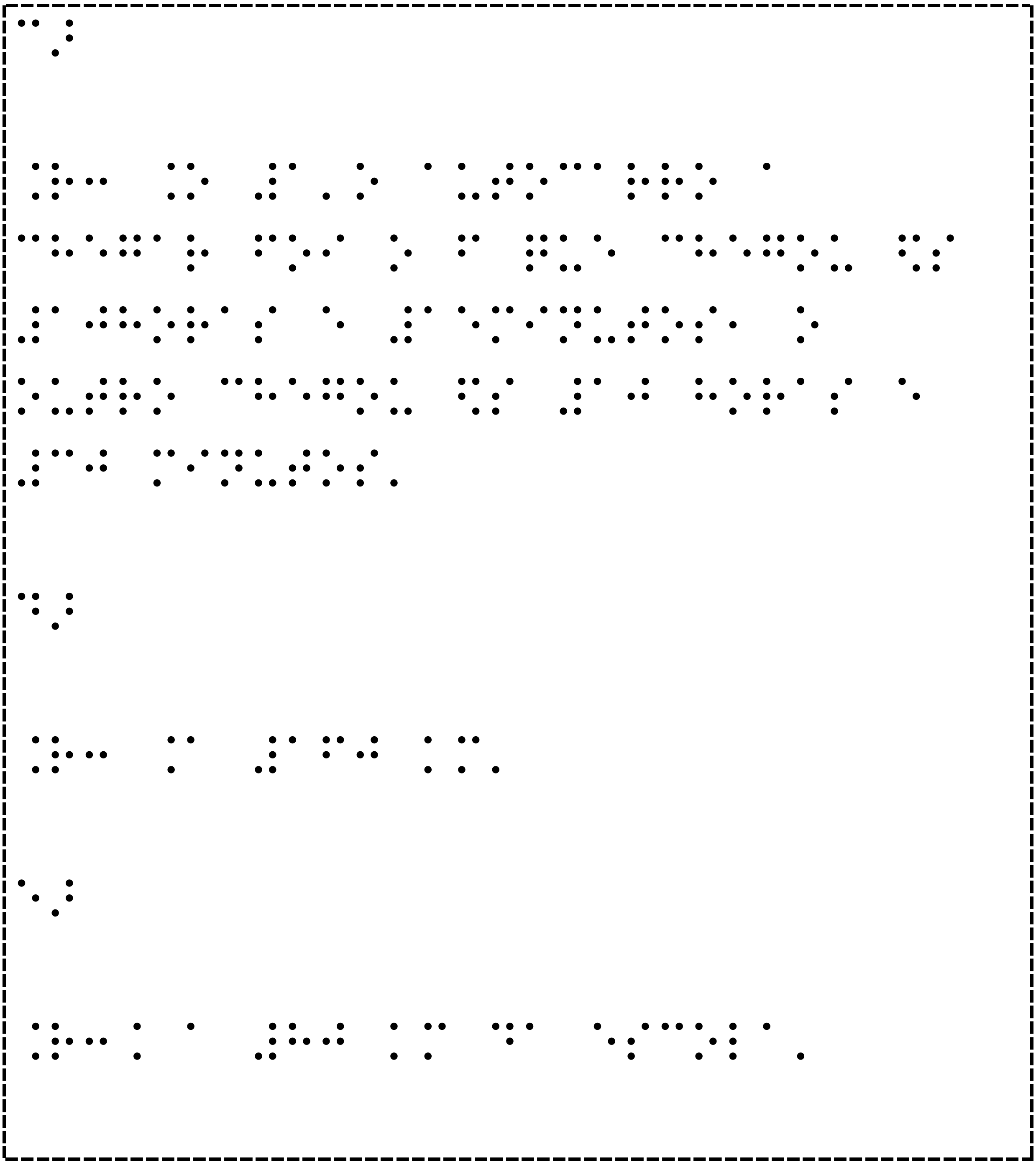


Figura 77: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

1)

a)

R: O 1.º autocarro saiu às 8 horas e o 2.º às 8h e 30 minutos.

b)

160-80 = 80 km

R: Encontra-se a 80km de distância.

c)

R: O 1.º autocarro a chegar foi o f que chegou às 10horas e 15minutos, o outro chegou às 10 horas e 30 minutos.

d)

R: A 160 km.

e)

R: A 80 km da escola.

Figura 77A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

Constatou-se que da perceção feita pela aluna do gráfico, esta encontrou a resposta à questão 1 alínea a), visualizando apenas o eixo das abcissas e verificou que esse eixo refere-se ao tempo, e a representação gráfica que começa na abcissa oito corresponde ao 1.º autocarro, não tendo tido em consideração o enunciado que menciona que “*O autocarro que saiu mais cedo teve uma avaria e precisou de se dirigir a uma oficina*”. Contudo, o raciocínio tomado pela aluna é válido.

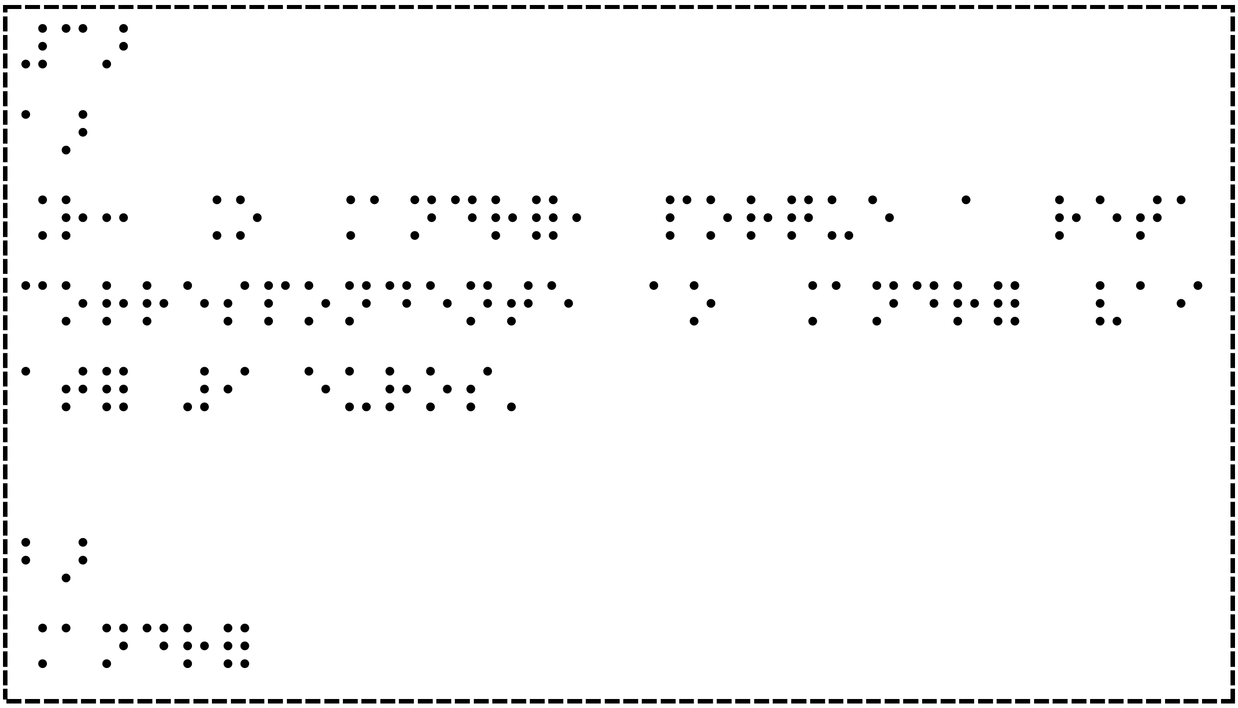
Da análise da exploração da questão 1 alínea b) verifica-se que a aluna não faz uma interpretação correta do gráfico, pelo que determina a distância a Lisboa e não à escola.

Para a resolução da questão 1 alínea c), a aluna orienta-se pelo eixo das abcissas e analisa o tempo de chegada de cada um dos autocarros.

Na resolução da questão 1 alínea e), a aluna refere o primeiro ponto de interseção do gráfico, não tendo em atenção que a ultrapassagem a que se está a referir é a do 2.º autocarro ao 1.º autocarro e não o contrário, tal como é pedido no enunciado.

<u>Evidências da questão 3 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* da aluna Margarida</u>

Margarida



⠼⠁⠚ ⠑⠥⠗⠕⠎ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠼⠑⠓
⠭ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠼⠁⠓

⠭ ⠶ ⠼⠁⠚ ⠲⠼⠑
⠭ ⠶ ⠼⠃ ⠑⠥⠗⠕⠎

⠨⠝⠥⠝⠕

⠼⠛⠄⠑ ⠑⠥⠗⠕⠎ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠼⠑⠓
⠭ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠼⠁⠓

⠭ ⠶ ⠼⠛⠄⠑⠲⠼⠑
⠭ ⠶ ⠼⠁⠄⠑ ⠑⠥⠗⠕⠎

⠨⠍⠊⠛⠥⠑⠇

⠼⠑ ⠑⠥⠗⠕⠎ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠼⠑⠓
⠭ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠼⠁⠓

⠭ ⠶ ⠼⠑⠲⠼⠑

⠭ ⠶ ⠼⠁ ⠑⠥⠗⠕

⠨⠗⠒ ⠨⠑ ⠨⠁⠝⠙⠗⠿ ⠛⠁⠝⠓⠁ ⠨⠃ ⠑⠥⠗⠕⠎⠂
⠕ ⠨⠝⠥⠝⠕ ⠛⠁⠝⠓⠁ ⠼⠁⠄⠑ ⠑⠥⠗⠕⠎ ⠑ ⠕
⠨⠍⠊⠛⠥⠑⠇ ⠛⠁⠝⠓⠁ ⠼⠁ ⠑⠥⠗⠕⠄

⠉⠜
⠼⠑ ⠑⠥⠗⠕⠎ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠼⠑⠓
⠼⠁⠑ ⠑⠥⠗⠕⠎ ⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒ ⠭

⠭ ⠶ ⠣⠼⠁⠑ ⠦⠼⠑⠜⠲⠼⠑ ⠪⠒⠕
⠪⠒⠕ ⠭ ⠶ ⠼⠛⠑⠲⠼⠑
⠪⠒⠕⠭⠶ ⠼⠁⠑
⠨⠗⠒ ⠨⠞⠑⠗⠷ ⠙⠑ ⠞⠗⠁⠃⠁⠇⠓⠁⠗ ⠼⠁⠑
⠓⠕⠗⠁⠎⠄

⠙⠜ ⠽ ⠶ ⠍⠭ ⠖ ⠃
⠃ ⠶ ⠚
⠏ ⠣⠼⠑⠂⠼⠑⠜ ⠑ ⠟ ⠣⠼⠚⠂⠼⠚⠜
⠍ ⠶ ⠣⠼⠑⠤⠼⠚⠲⠣⠼⠑⠤⠼⠚⠜⠪⠒⠕
⠪⠒⠕⠍ ⠶ ⠼⠁

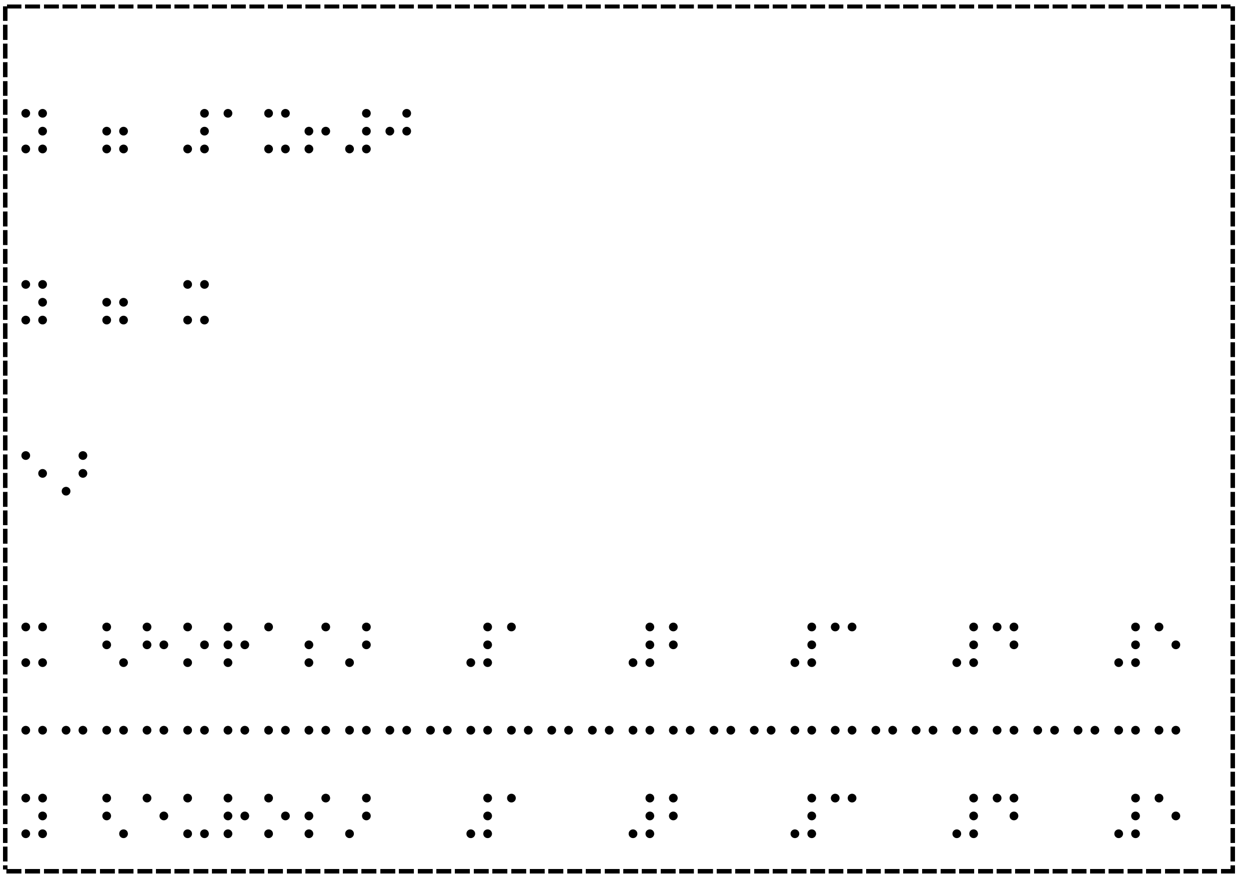


Figura 78: Extrato da resolução em Braille da questão 3 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

3)

a)

R: O André, porque a reta correspondente ao André vai até 9 euros.

b)

André

10 euros ----------- 5h

x -------------------- 1h

x = 10÷5

x = 2 euros

Nuno

7,5 euros ----------- 5h

x -------------------- 1h

x = 7,5÷5

x = 1,5 euros

Miguel

5 euros ----------- 5h

x -------------------- 1h

x = 5÷5

x = 1 euro

R: O André ganha 2 euros, o Nuno ganha 1,5 euros e o Miguel ganha 1 euro.

c)

5 euros -------- 5h

15 euros ------- x

x = (15x5)÷5 ⇔

⇔ x = 75÷5

⇔ x= 15

R: Terá de trabalhar 15 horas.

d) y = mx + b

b = 0

P (5,5) e Q (0,0)

m = (5-0)÷(5-0)⇔

⇔ m = 1

y = 1x + 0

y = x

e)

x (horas)	1	2	3	4	5
y (euros)	1	2	3	4	5

Figura 78A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

A aluna revelou compreensão do enunciado, contudo ao nível da perceção do mesmo manifestou algumas dificuldades, como se constata na resposta da alínea a), raciocina corretamente, mas conclui erradamente.

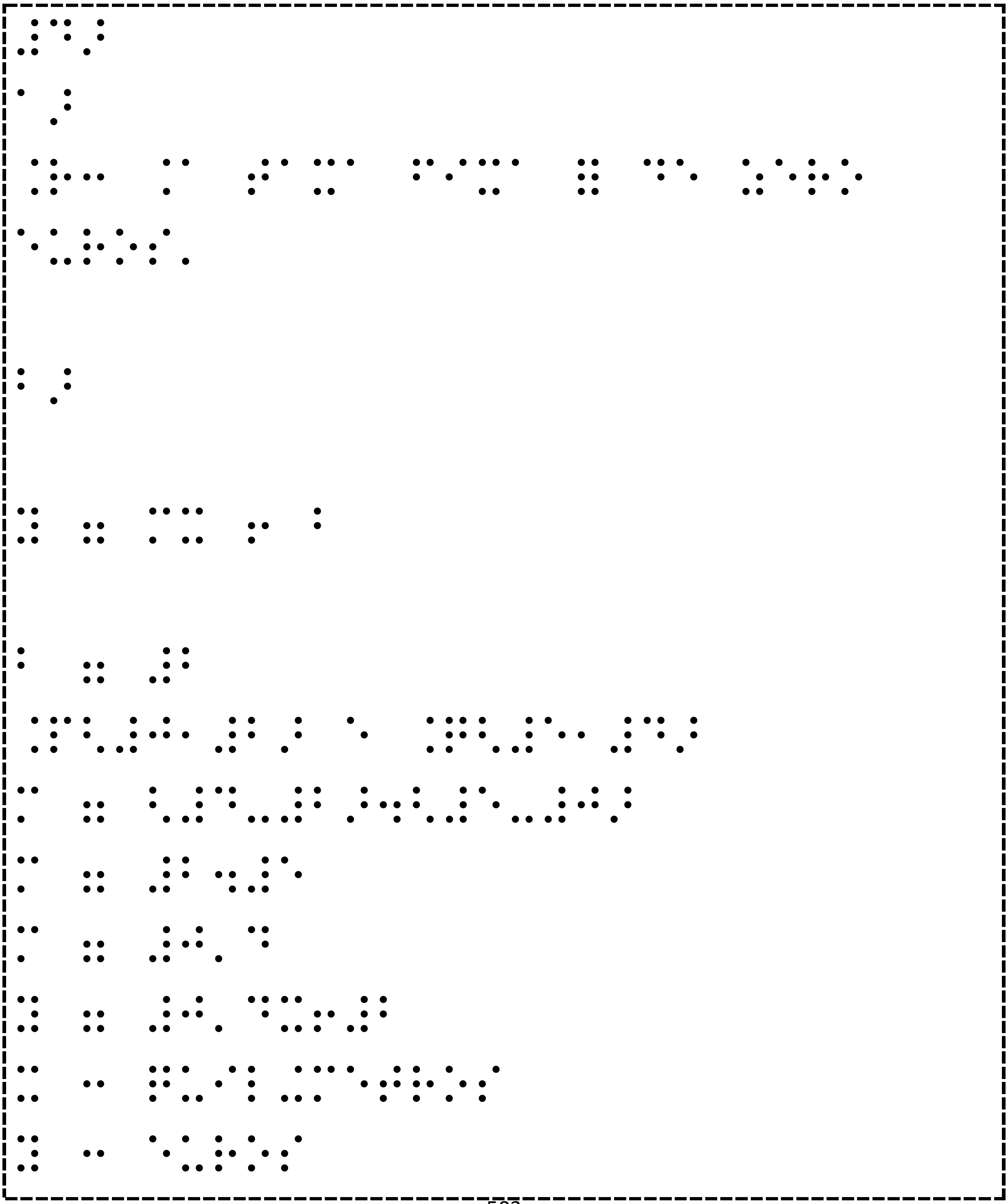
Constata-se que a aluna opta por trabalhar com a expressão que define uma função afim não linear, que quando confrontada com o porquê do professor lhe responde: “Esta expressão dá para todas”, e o professor questiona: “*Que todas?”, a qual a aluna responde: “As funções lineares e as afins não lineares*.”.

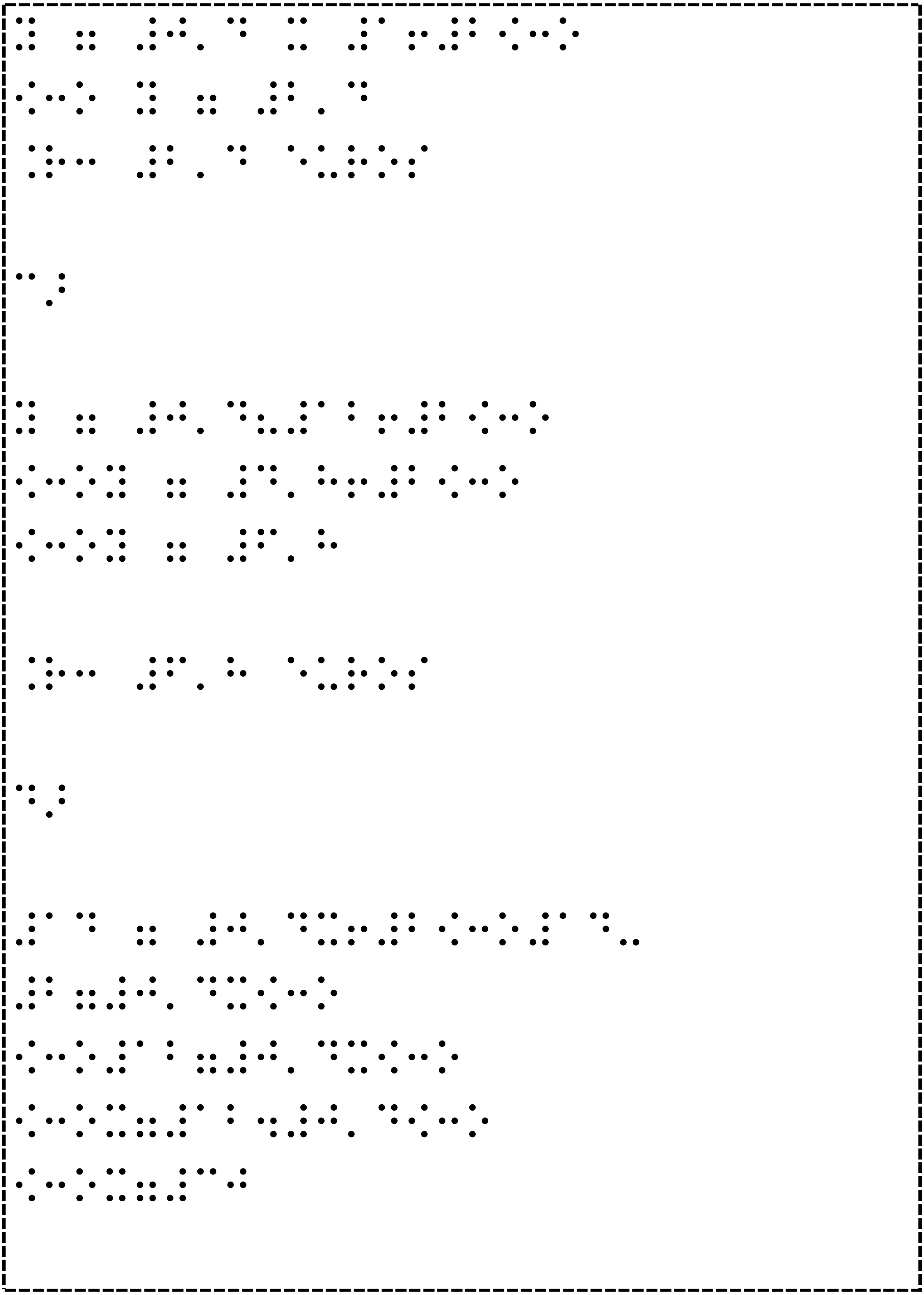
A aluna retira as coordenadas de dois pontos do gráfico e recorre à regra de invariância do quociente entre o valor da ordenada e o valor da abcissa para calcular o valor do declive (*m*). Seguidamente, recorre ao gráfico e observa o ponto de interseção da reta da função relativamente ao eixo das ordenadas, obtendo deste modo o valor da ordenada na origem, ou seja, o parâmetro b.

Por último, a aluna constrói a tabela recorrendo à expressão algébrica, dando valores à variável x e com o auxílio da calculadora determina os valores correspondentes da variável y.

Evidências da questão 4 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

Margarida





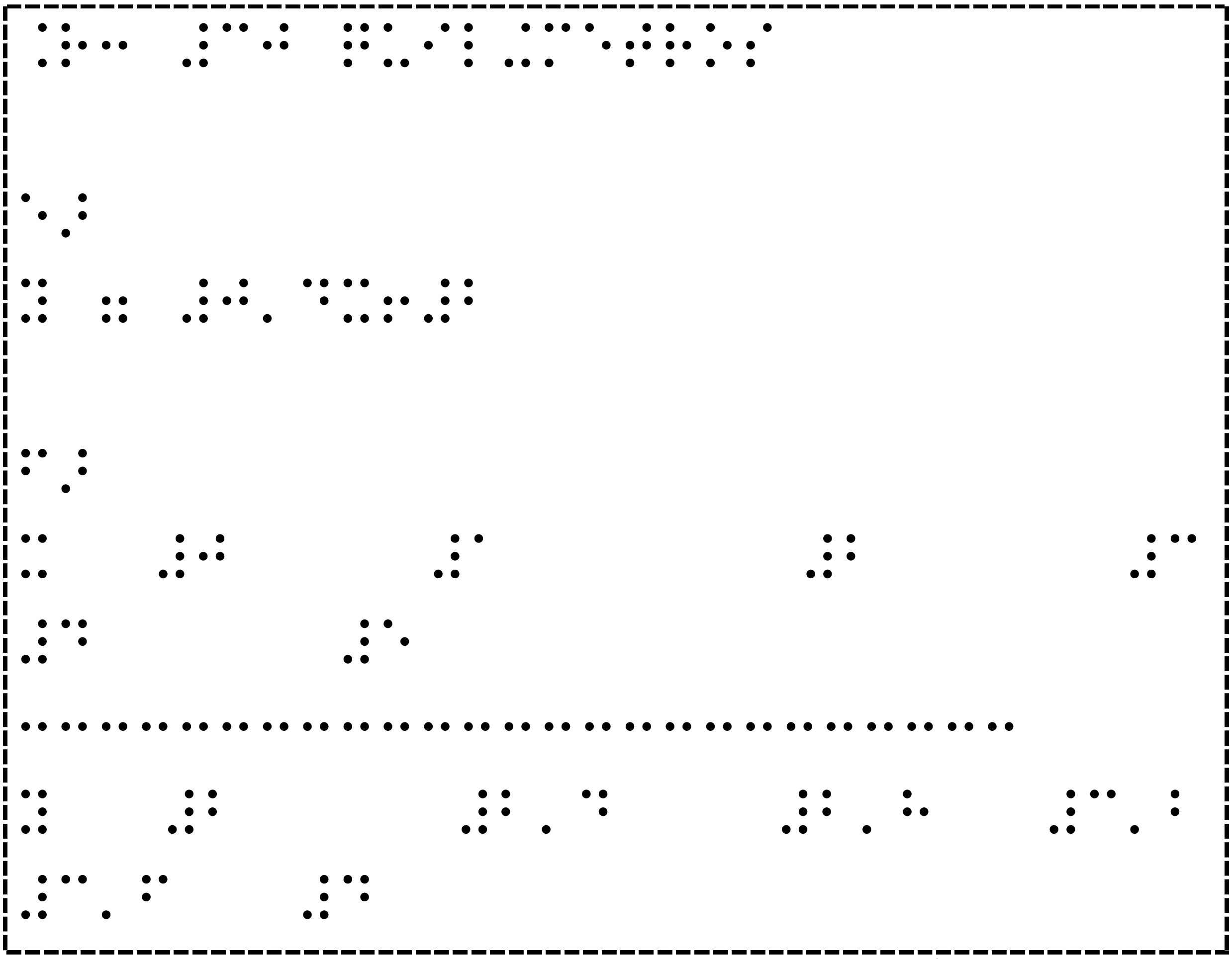


Figura 79: Extrato da resolução em Braille da questão 4 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

4)

a)

R: A taxa fixa é de zero euros.

b)

y = mx + b

b = 2

P(0,2) e Q(5,4)

m = (4-2)÷(5-0)

m = 2÷5

m = 0,4

y = 0,4x+2

x – quilómetros

y – euros

y = 0,4 x 1 + 2 ⇔

⇔ y = 2,4

R: 2,4 euros

c)

y = 0,4 x 12 + 2⇔

⇔y = 4,8 + 2⇔

⇔y = 6,8

R: 6,8 euros

d)

14 = 0,4x + 2⇔14 – 2 = 0,4x⇔

⇔12 = 0,4x⇔

⇔x = 12÷0,4⇔

⇔x = 30

R: 30 quilómetros

e)

y = 0,4x+2

f)

x	0	1	2	3	4	5
y	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4

Figura 79A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

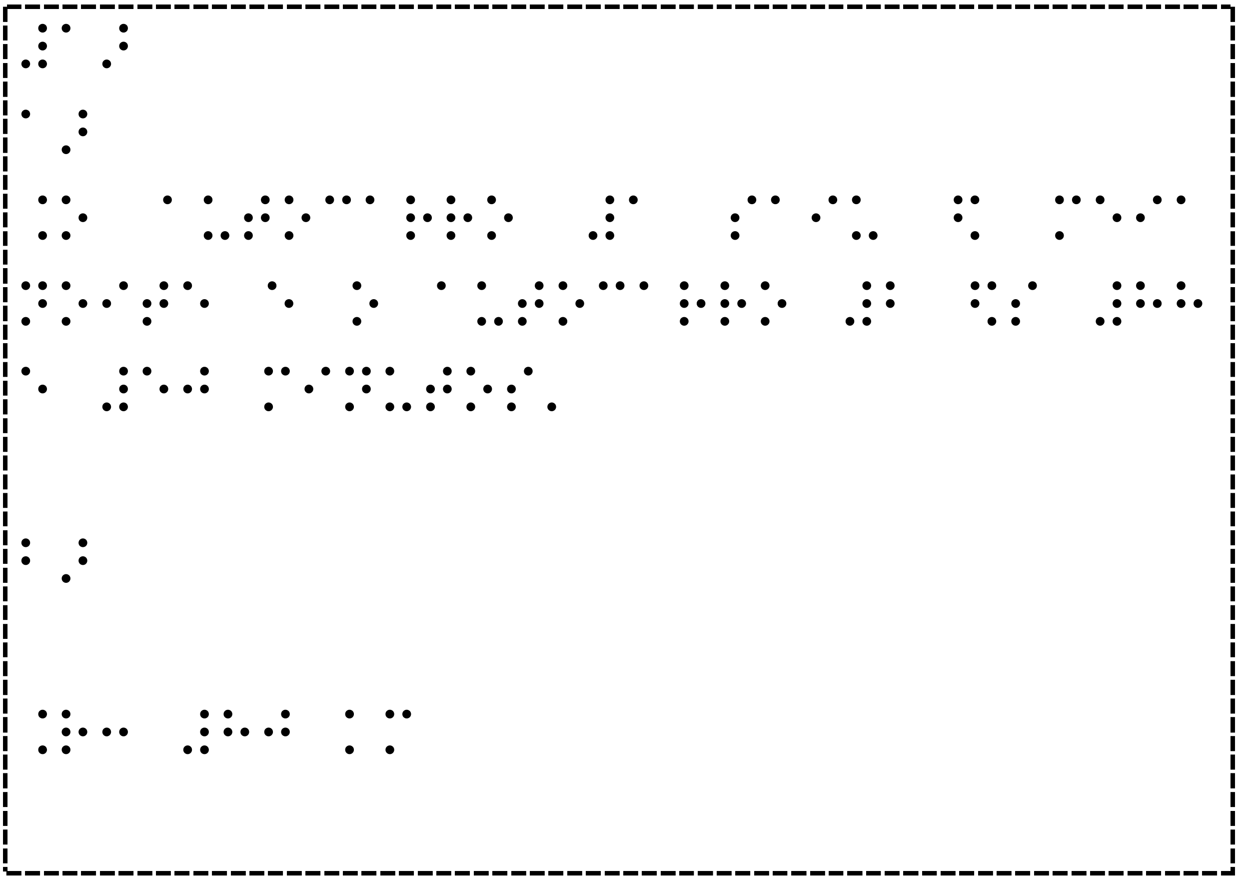
Verificou-se que a aluna faz uma incorreta interpretação gráfica, no que se refere ao valor da taxa fixa, conduzindo desta forma a uma resposta igualmente errada na resolução da questão seguinte.

Constata-se que a aluna opta por determinar imediatamente a expressão algébrica, referindo "*permite calcular tudo o que há para calcular*".

Partindo da expressão algébrica atribui valores a x e calcula valores de y, construindo desta forma a representação tabular. Por fim, revela ainda, conhecer as regras de resolução de equações e concretiza-as corretamente.

Evidências da questão 1 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

Rafael



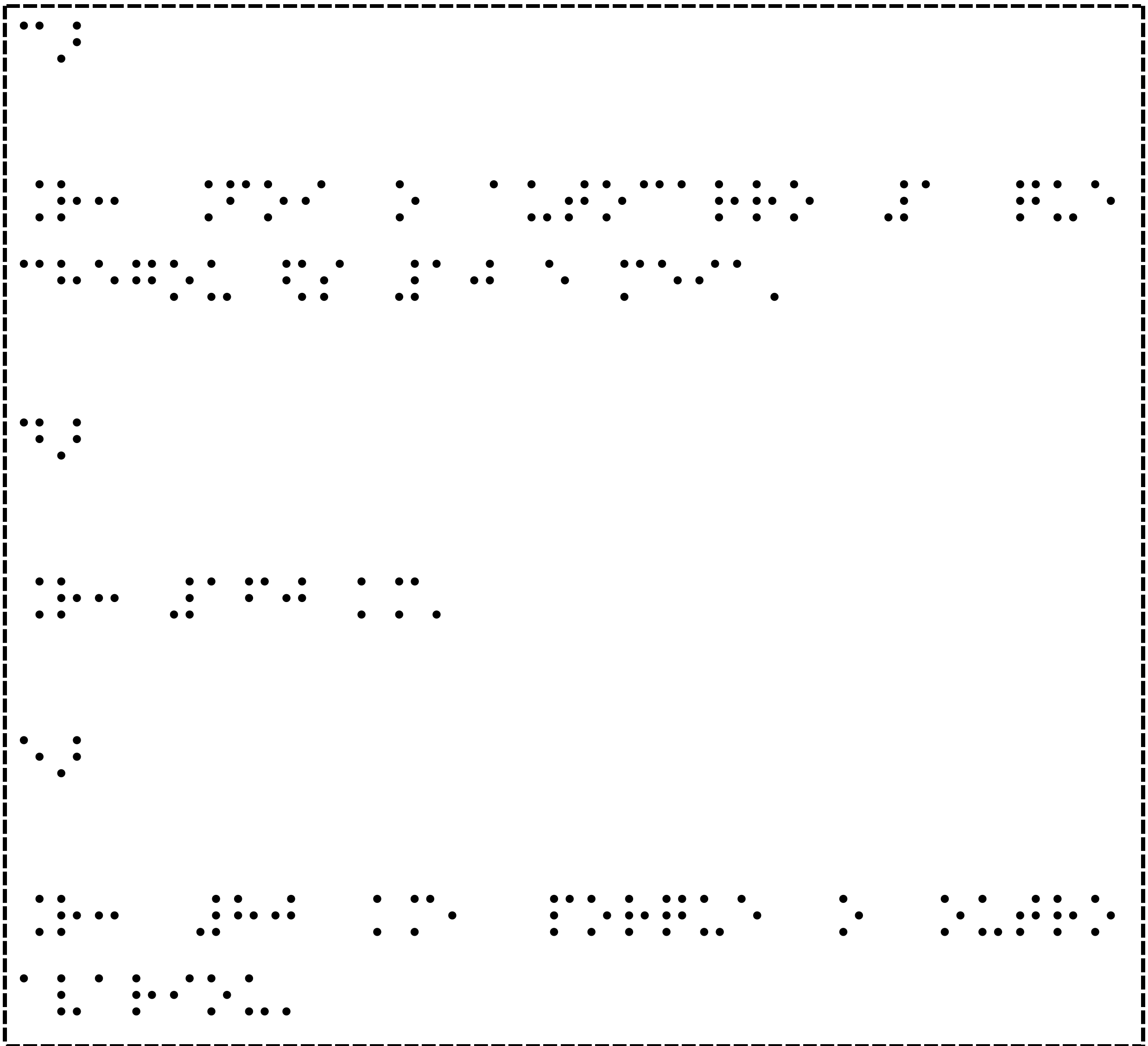


Figura 80: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

1)

a)

O autocarro 1 saiu à meia noite e o autocarro 2 às 8h e 50 minutos.

b)

R: 80 km

c)

R: Foi o autocarro 1 que chegou às 10 e meia.

d)

R: 160 km.

e)

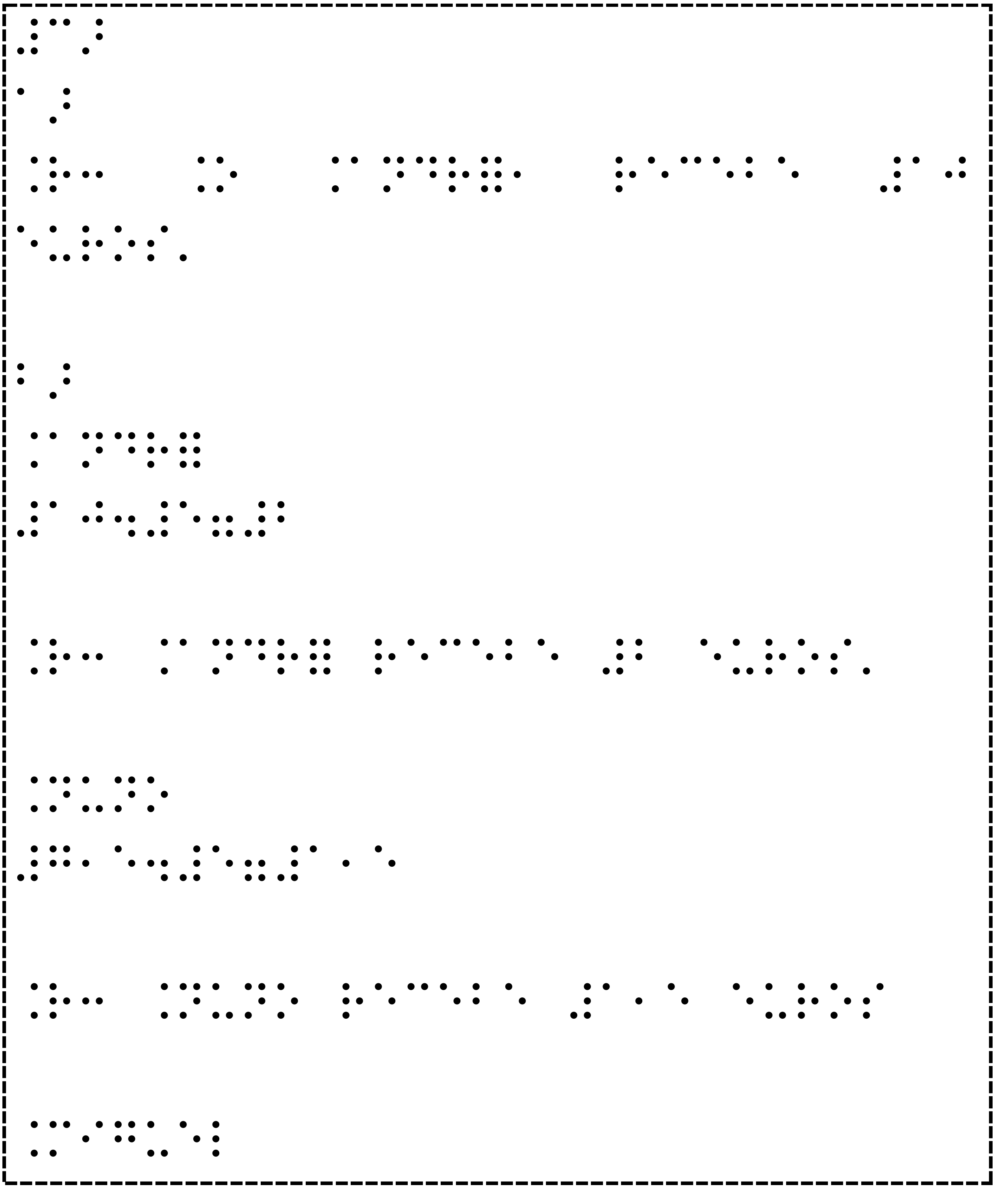
R: 80 km, porque o outro avariou.

Figura 80A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

Da observação das explorações do aluno Rafael, verifica-se inúmeras lacunas ao nível da interpretação do gráfico. Contudo, evidencia uma maior facilidade de leitura do gráfico, quando a resposta exige recorrer ao eixo vertical, eixo das ordenadas, e ainda, quando não tem de relacionar as representações gráficas das duas funções.

Na resolução da questão 1 alínea e), o aluno refere incorretamente o primeiro ponto de interseção do gráfico, evidenciando na sua resposta, uma total falta de compreensão do contexto da situação.

<u>Evidências da questão 3 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* do aluno Rafael</u>



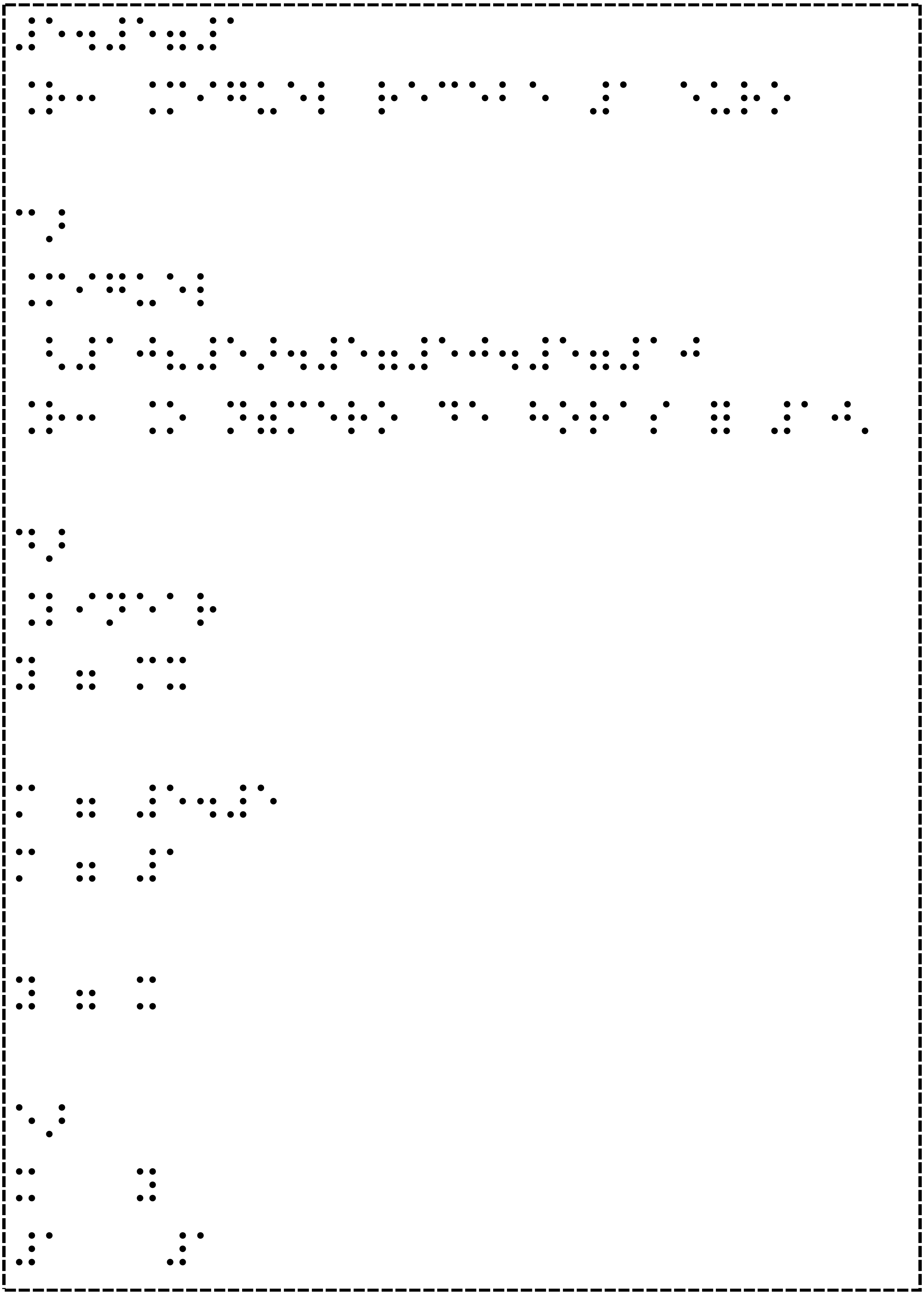



Figura 81: Extrato da resolução em Braille da questão 3 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

3)

a)

R: O André, recebe 10 euros.

b)

André

10÷5 = 2

R: André recebe 2 euros.

Nuno

7,5÷5 = 1,5

R: Nuno recebe 1,5 euros

Miguel

5÷5 = 1

R: Miguel recebe 1 euro

c)

Miguel

(10x5)÷5 = 50÷5 = 10

R: O número de horas é 10.

d)

Linear

y = mx

m = 5÷5

m = 1

y = x

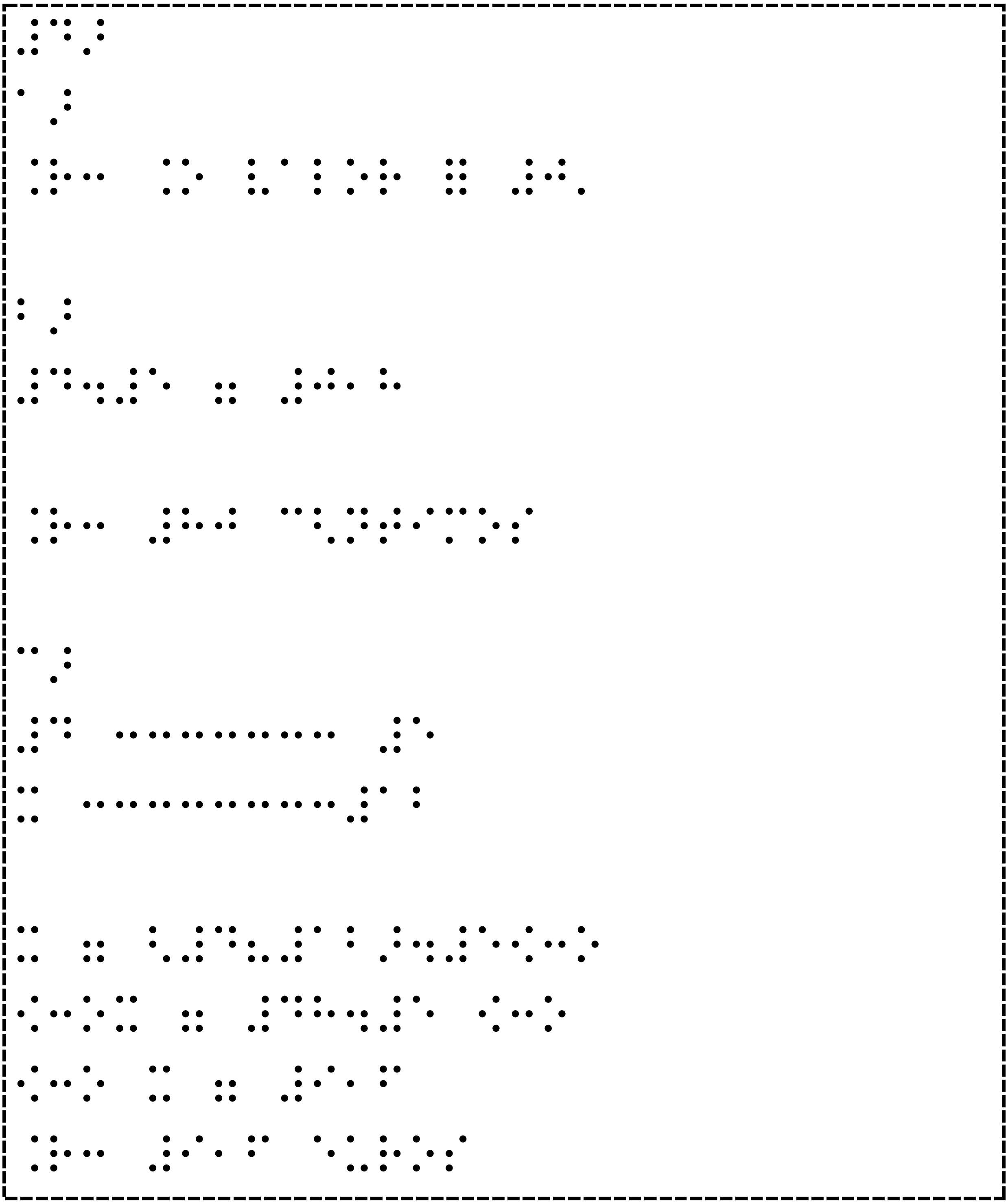
e)

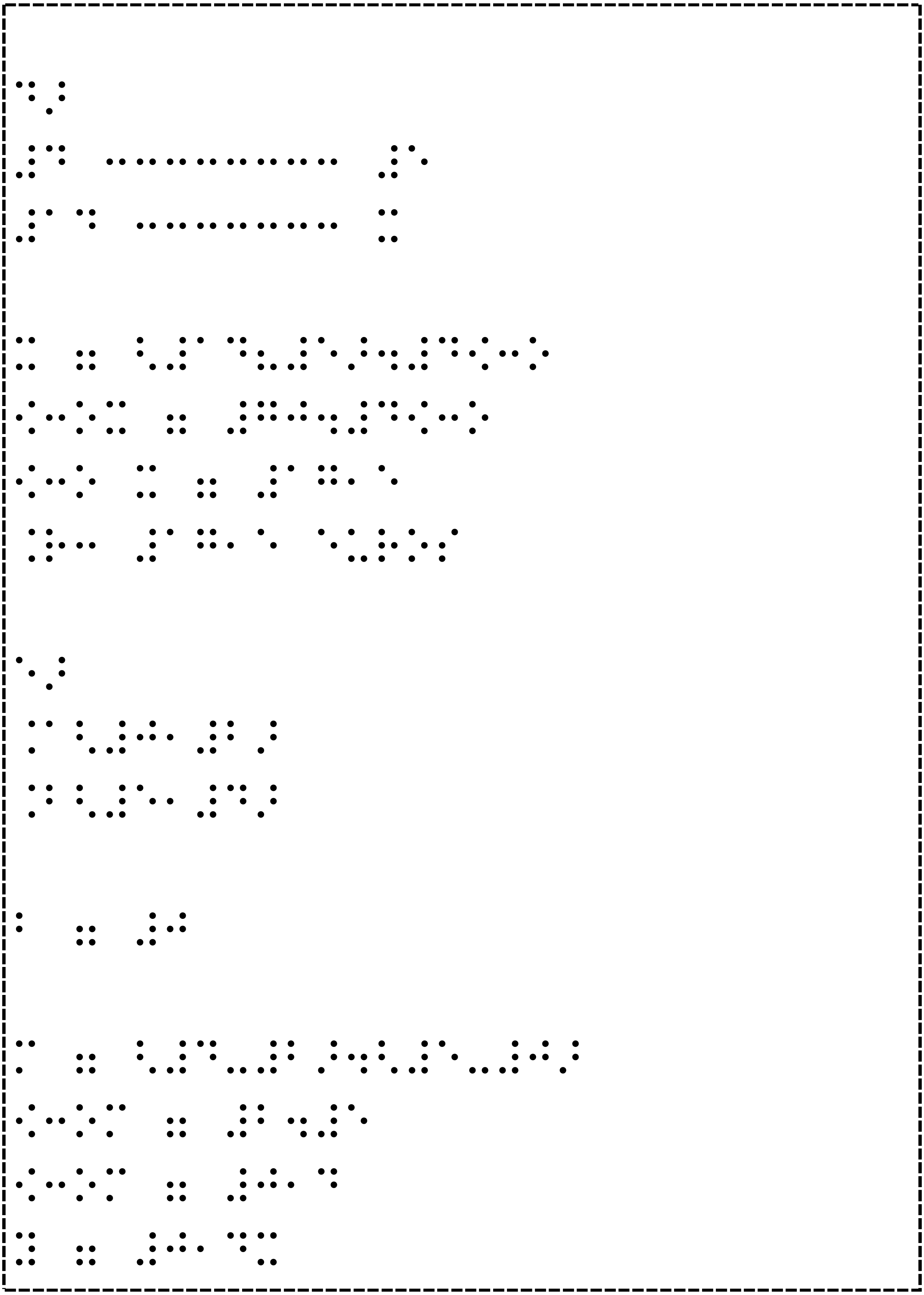
x	y
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Figura 81A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

Da análise da exploração do aluno Rafael, verifica-se que este fez uma boa interpretação gráfica, contudo na resolução da alínea c), o aluno não considerou o gráfico correspondente ao Miguel mas sim o do André, erro cometido apenas por falta de atenção. Constata-se que o aluno percebeu que graficamente estava perante funções lineares, e deste modo calcula o valor do parâmetro m recorrendo à regra de invariância do quociente entre o valor da ordenada e o valor da abcissa. Por fim, revela facilidades na conversão da representação gráfica para a representação tabular.

<u>Evidências da questão 4 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* do aluno Rafael</u>





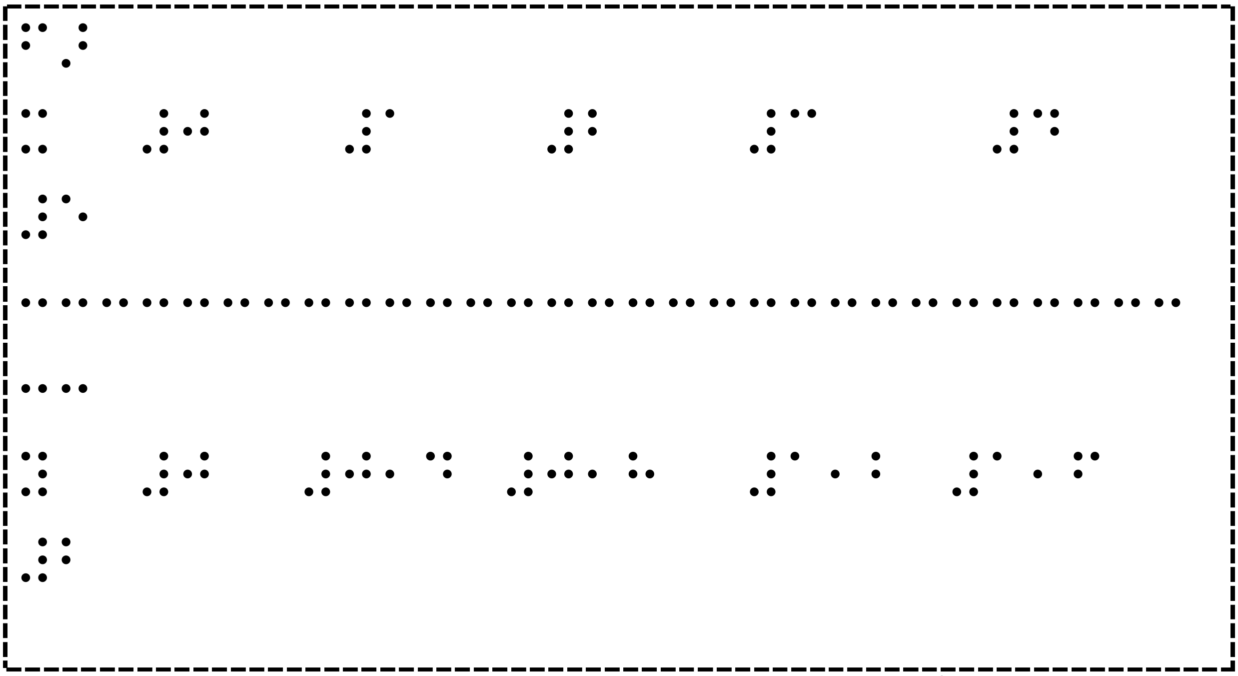


Figura 82: Extrato da resolução em Braille da questão 4 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

4)

a)

R: O valor é 0.

b)

4÷5 = 0,8

R: 80 cêntimos

c)

4 -------- 5

x ------- 12

x = (4x12)÷5 ⇔

⇔ x = 48÷5 ⇔

⇔ x = 9,6

R: 9,6 euros

d)

4 -------- 5

14 ------- x

x = (14x5)÷4 ⇔

⇔ x = 70÷4 ⇔

⇔ x = 17,5

R: 17,5 euros

e)

A(0,2)

B(5,4)

b = 0

m = (4-2)÷(5-0)

⇔ m = 2÷5

⇔ m = 0,4

y = 0,4x

f)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2

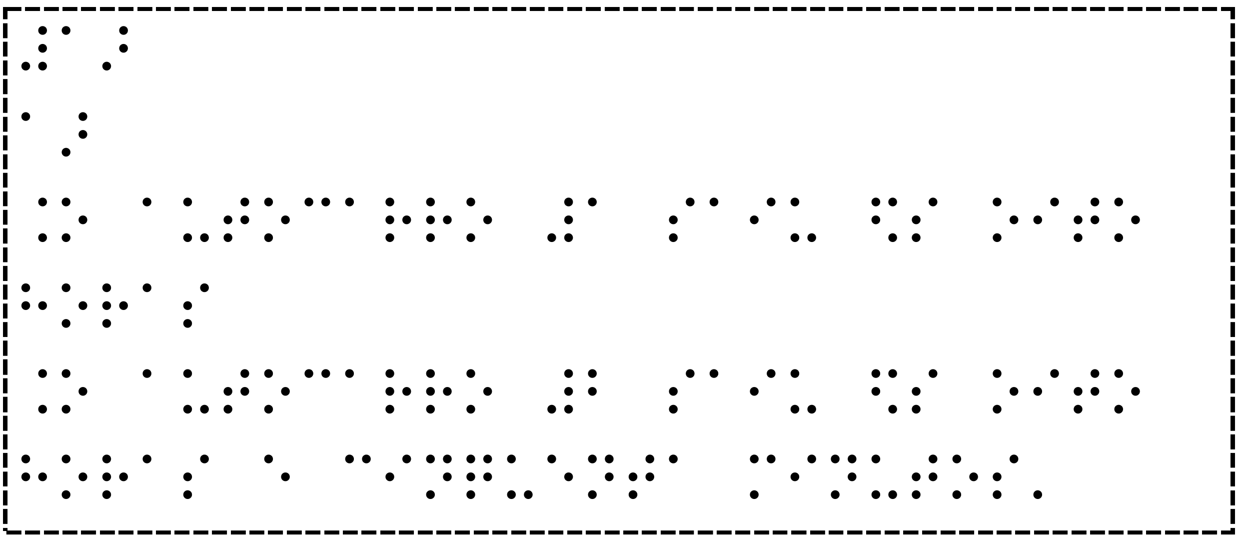
Figura 82A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

Da análise da exploração do aluno constata-se que este interpreta incorretamente a representação gráfica da situação em causa.

Na alínea a) não reconhece o valor da taxa fixa, contudo nas alíneas c) e d) opta por aplicar regras de três simples para resolver as referidas questões. No que se refere à alínea e) determina incorretamente a expressão analítica da função por considerar que se trata de uma função linear, atribuindo imediatamente o valor zero ao parâmetro b, ordenada na origem. Verifica-se que o aluno compreende como determinar os parâmetros *m* e *b* para a construção da expressão algébrica de uma função linear, contudo revela não ter a noção efetiva do conceito de função linear. Por último, não manifesta preocupação em verificar a expressão algébrica encontrada. Manifesta ainda, facilidades na construção de uma tabela através da expressão analítica da função, embora tenha cometido erros na determinação das coordenadas dos pontos da função, fruto da incorreta expressão algébrica por ele obtida.

<u>Evidências da questão 1 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* do aluno Pedro</u>

Pedro



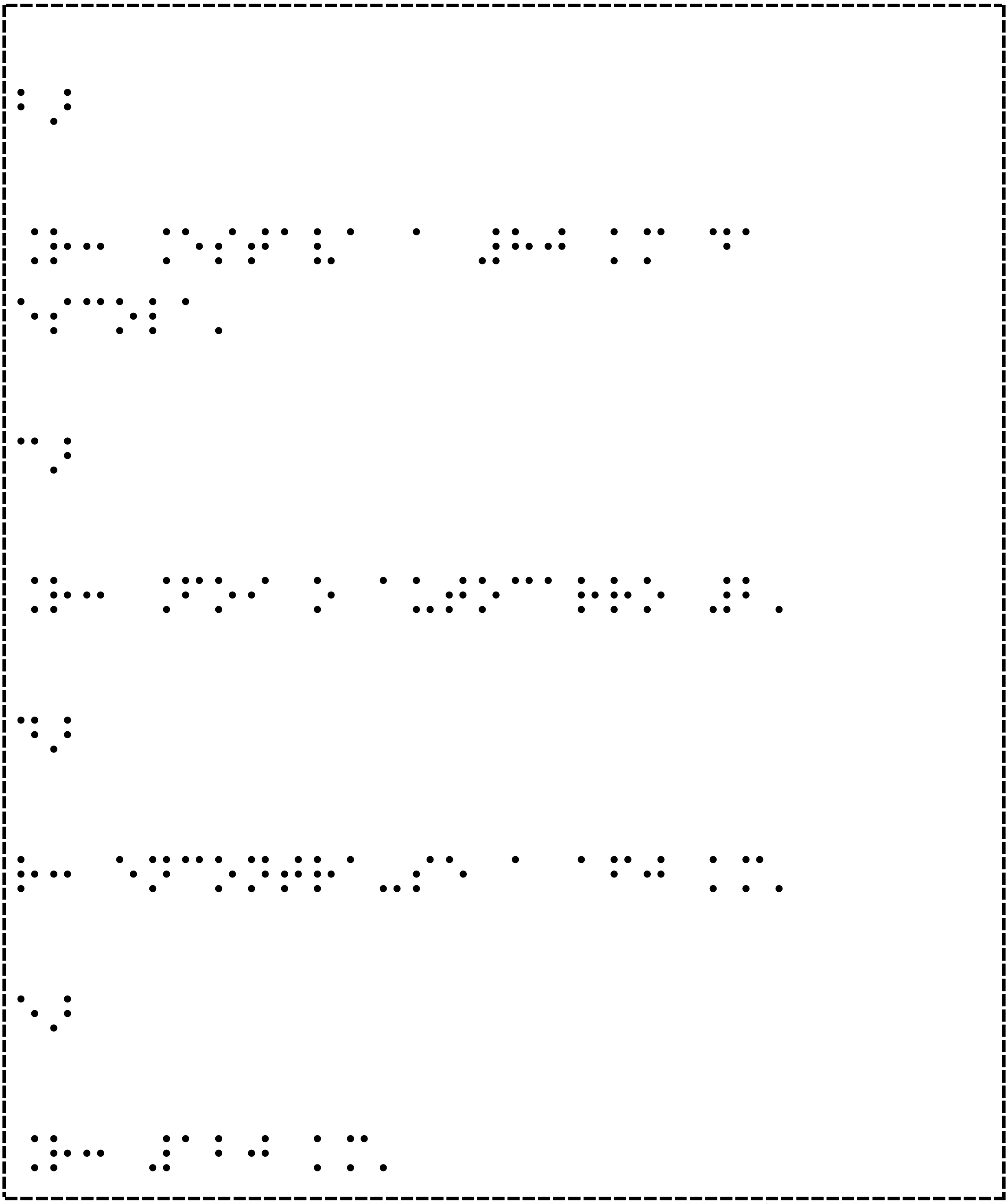


Figura 83: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

1)

a)

O autocarro 1 saiu às oito horas

O autocarro 2 saiu às oito horas e cinquenta minutos.

b)

R: Estava a 80 km da escola.

c)

R: Foi o autocarro 2.

d)

R: Encontra-se a 160 km.

e)

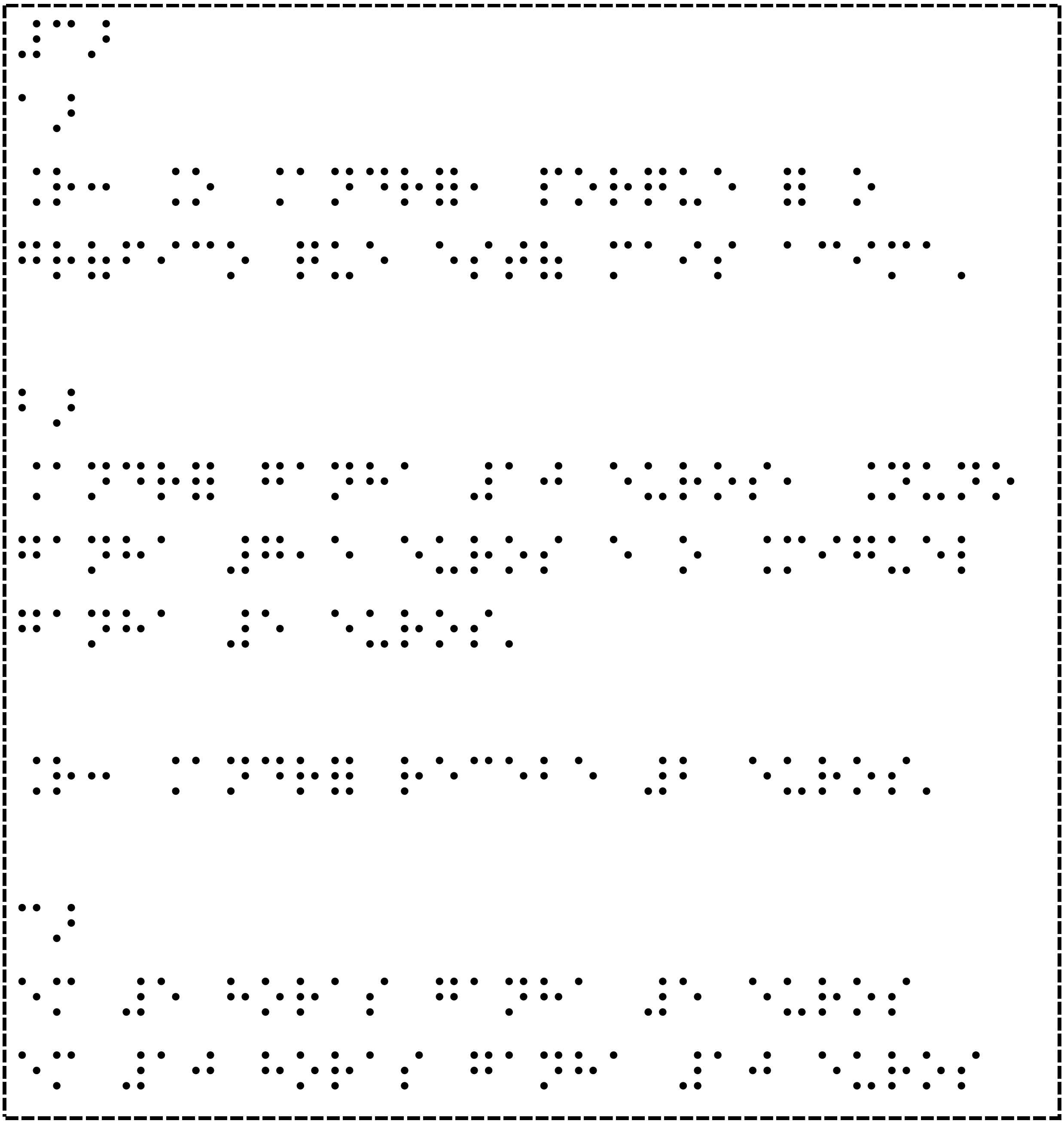
R: 120 km.

Figura 83A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

O aluno Pedro manifesta na sua resolução não ter conseguido interpretar convenientemente a representação gráfica da situação apresentada. Contudo, responde corretamente à alínea e), pelo que o professor questionou o aluno relativamente ao raciocínio por ele utilizado, tendo o aluno respondido "*Neste ponto o autocarro 1 passa pelo autocarro dois, porque o que chega primeiro é o autocarro 1 às dez e meia e o outro só chegou às dez e cinquenta*". Nota-se algum raciocínio por parte do aluno, sendo a sua justificação pouco clara e com algumas incorreções, nomeadamente no que respeita ao tempo.

<u>Evidências da questão 3 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* do aluno Pedro</u>

Pedro



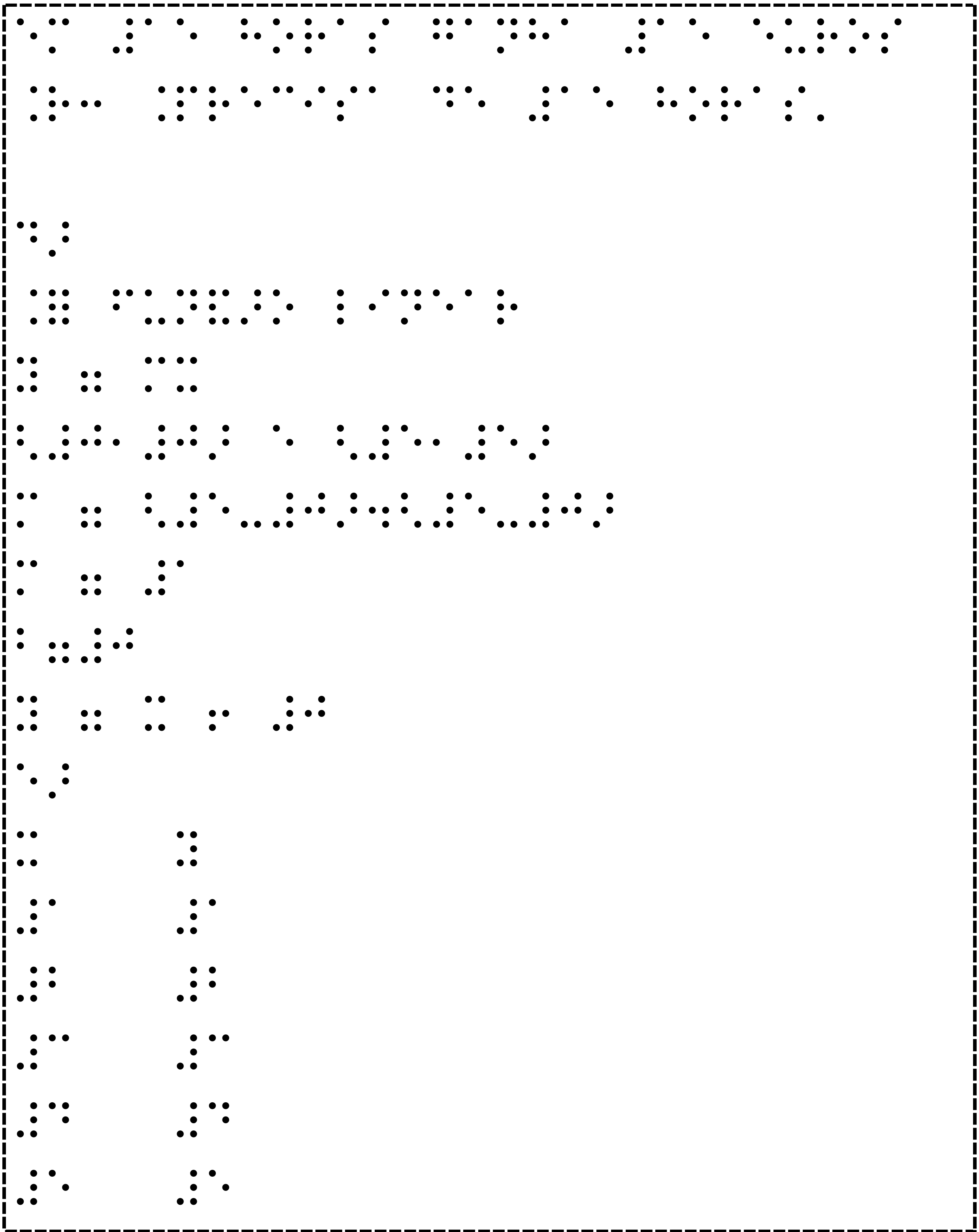


Figura 84: Extrato da resolução em Braille da questão 3 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

3)

a)

R: O André, porque é o gráfico que está mais acima.

b)

André ganha 10 euros, Nuno ganha 7,5 euros e o Miguel ganha 5 euros.

R: André recebe 2 euros.

c)

Em 5 horas ganha 5 euros

Em 10 horas ganha 10 euros

Em 15 horas ganha 15 euros

R: Precisa de 15 horas.

d)

É função linear

$y = mx$

(0,0) e (5,5)

$m = (5-0) \div (5-0)$

$m = 1$

$b=0$

$y = x + 0$

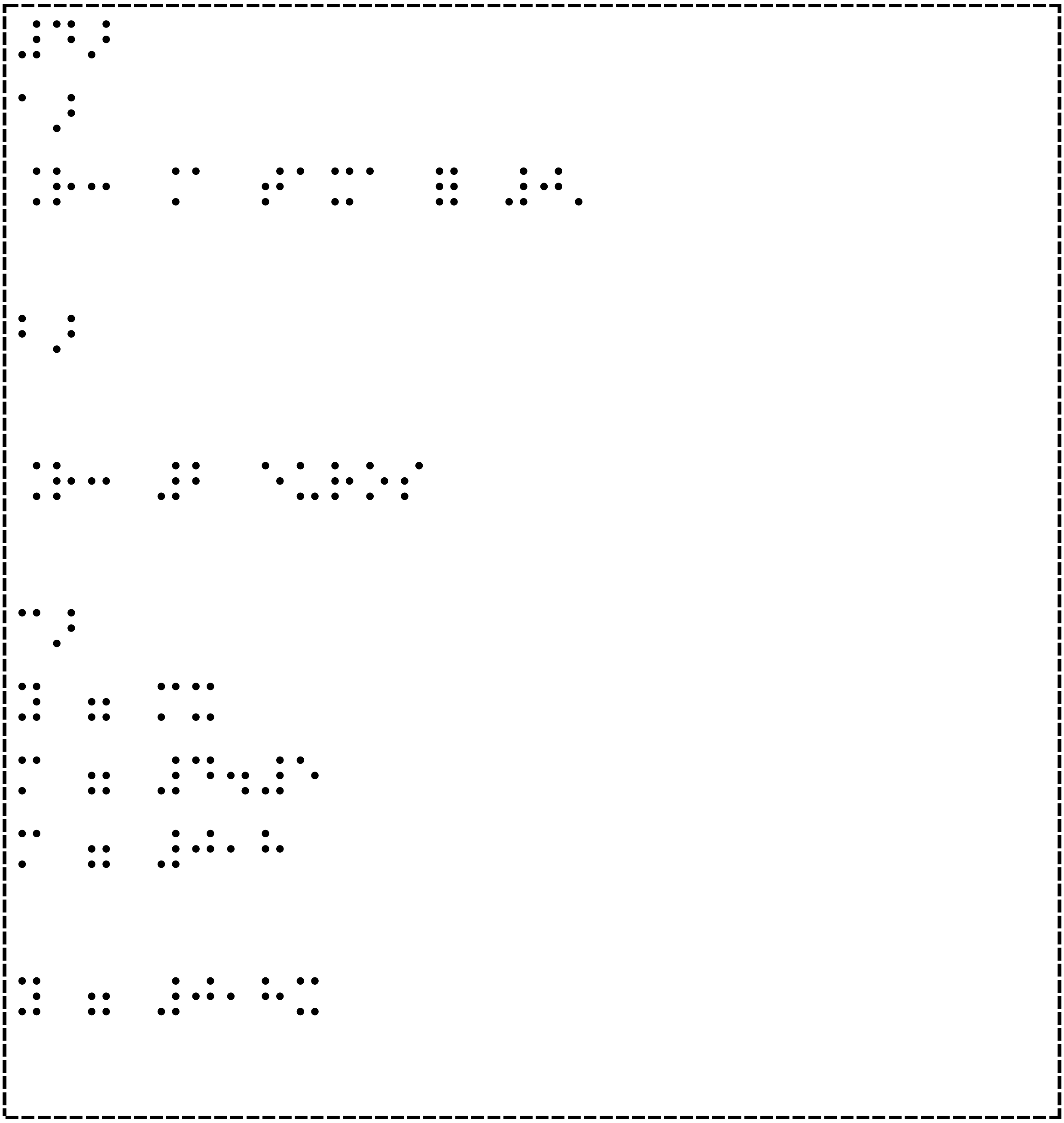
e)

x	y
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Figura 84A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

Evidências da questão 4 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

Pedro



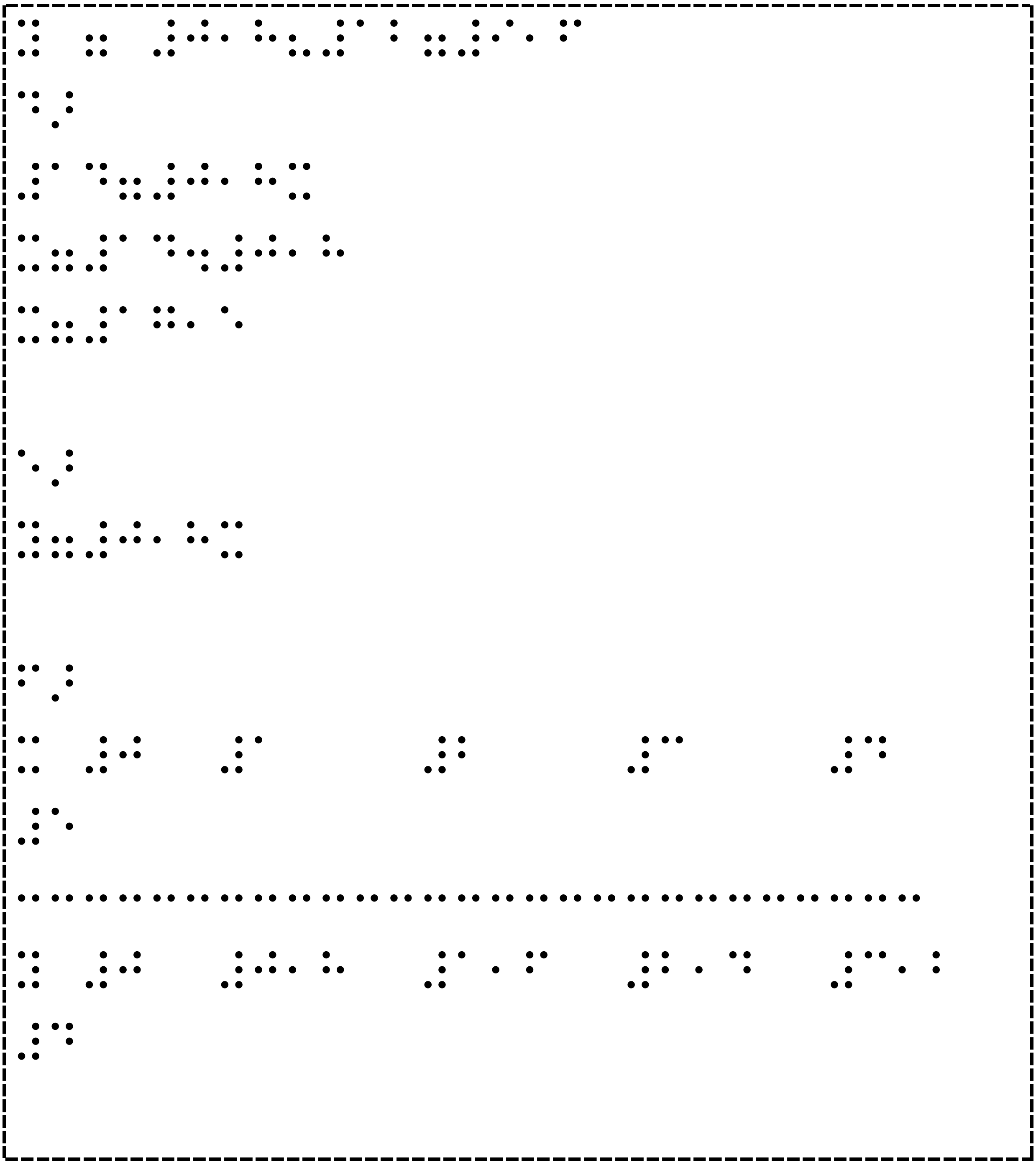


Figura 85: Extrato da resolução em Braille da questão 4 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

4)

a)

R: A taxa é 0.

b)

R: 2 euros

c)

y = mx

m = 4÷5

m = 0,8

y = 0,8x

y = 0,8 x 12 = 9,6

d)

14 = 0,8x

x = 14÷0,8

x = 17,5

e)

y = 0,8x

f)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4

Figura 85A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

O aluno Pedro revela inúmeras dificuldades no que respeita à interpretação da representação gráfica da situação em estudo. Contudo, revela conhecer os procedimentos a tomar aquando da determinação dos parâmetros de *m* e *b*, embora evidencia não conhecer a distinção entre função linear e função afim não linear. Revela ainda, facilidades na conversão de uma representação algébrica para uma representação tabular.

<u>Evidências da questão 5 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III*</u>

Margarida

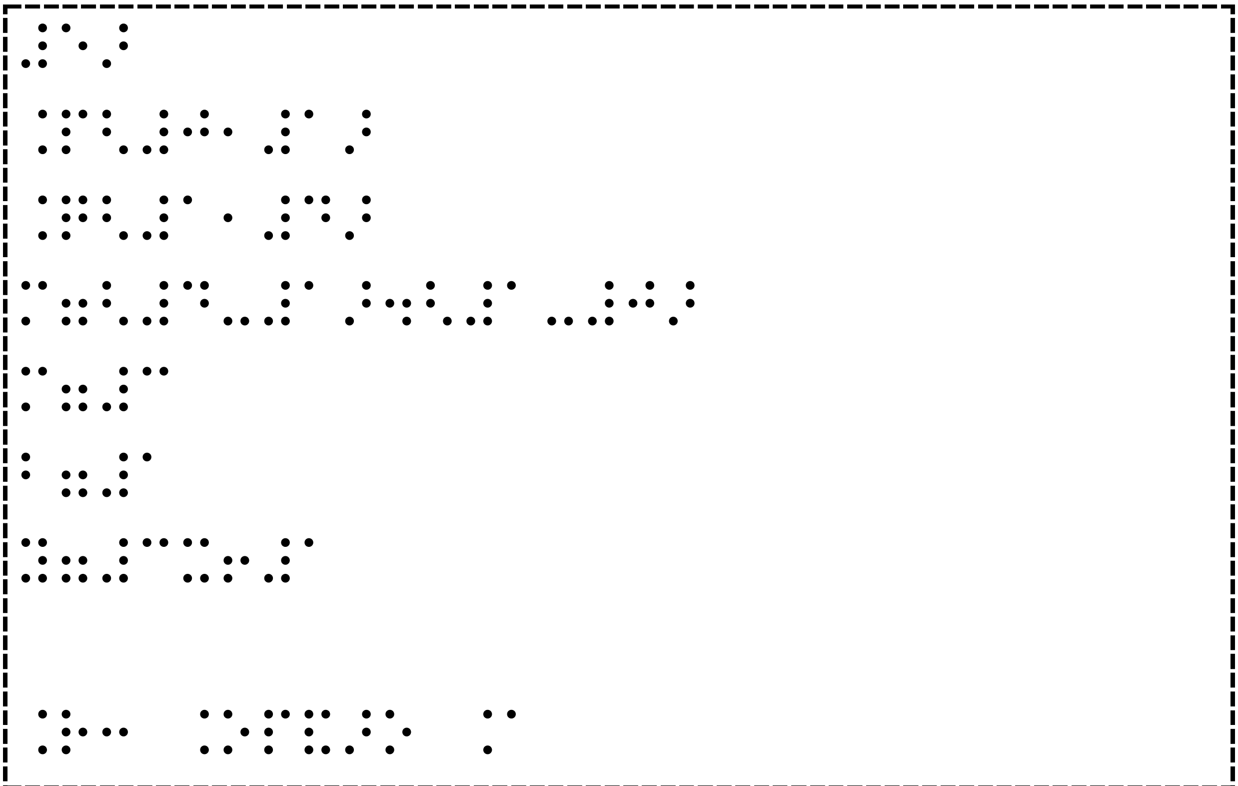


Figura 86: Extrato da resolução em Braille da questão 5 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

5)

P(0,1)

Q(1,4)

m = (4-1)÷(1-0)

m = 3

b = 1

y = 3x + 1

R: Opção A

Figura 86A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

Da observação da exploração da aluna, constata-se que opta por determinar a expressão algébrica da função, depois de obter as coordenadas de dois pontos da mesma.

Rafael

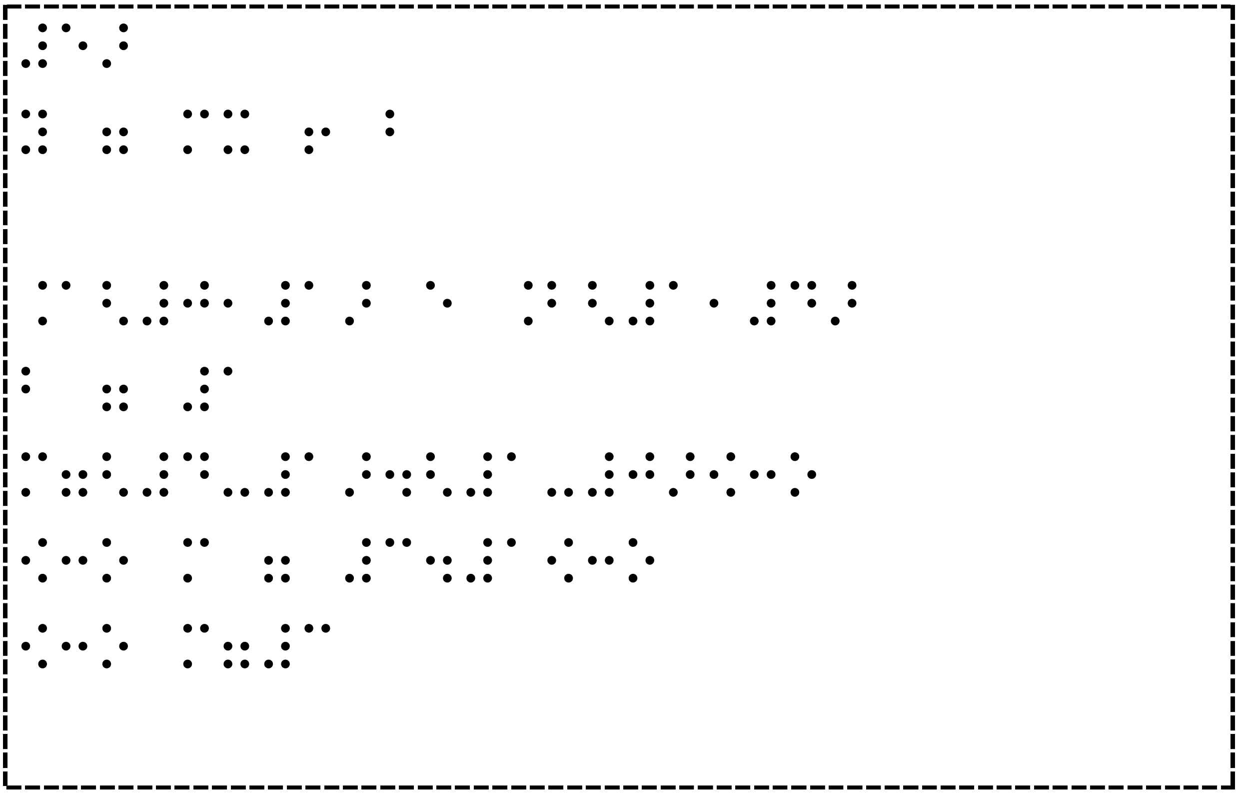


Figura 87: Extrato da resolução em Braille da questão 5 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

5)

$y = mx + b$

$A(0,1)$ e $B(1,4)$

$b = 1$

$m = (4-1) \div (1-0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = 3 \div 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = 3$

$y = 3x + 1$

R: Opção A

Figura 87A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

O aluno Rafael, tal como aconteceu com a sua colega Margarida, recorre ao gráfico para selecionar dois pontos e a partir daí determinar os parâmetros *m* e *b* e obter deste modo a expressão algébrica.

Pedro

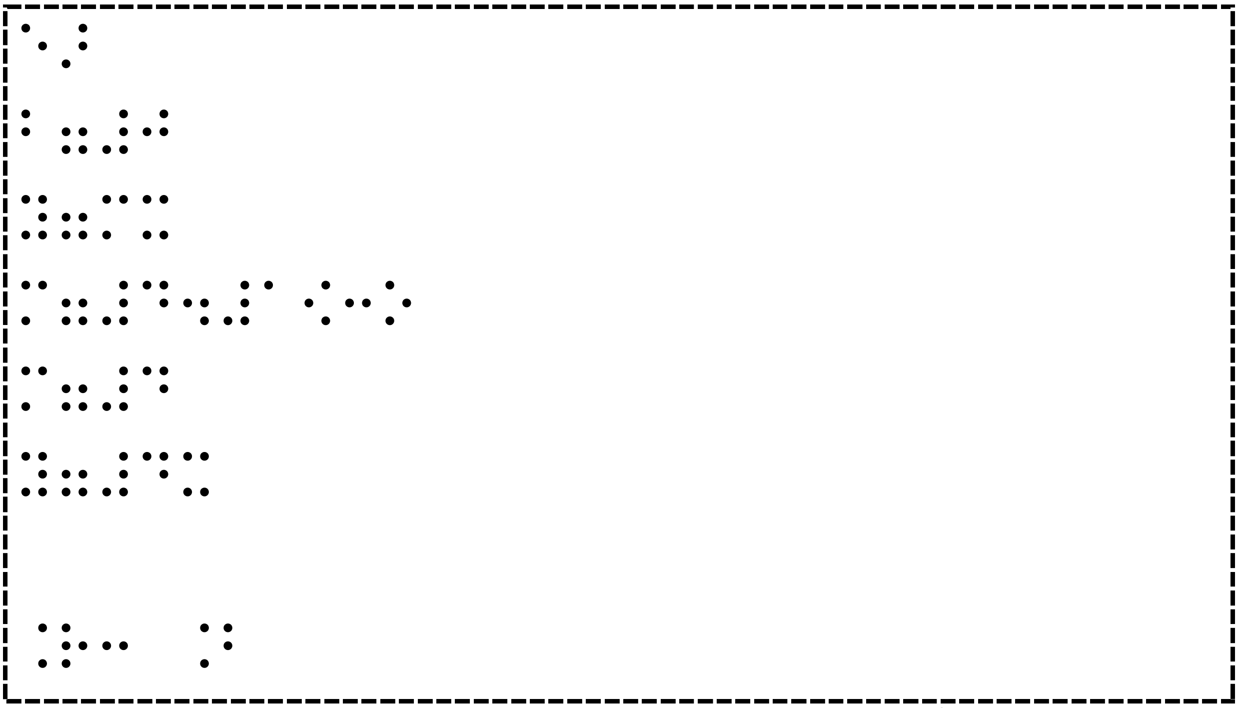


Figura 88: Extrato da resolução em Braille da questão 5 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

5)

b = 0

y = mx

m = 4÷1⇔

m = 4

y = 4x

_R: _B

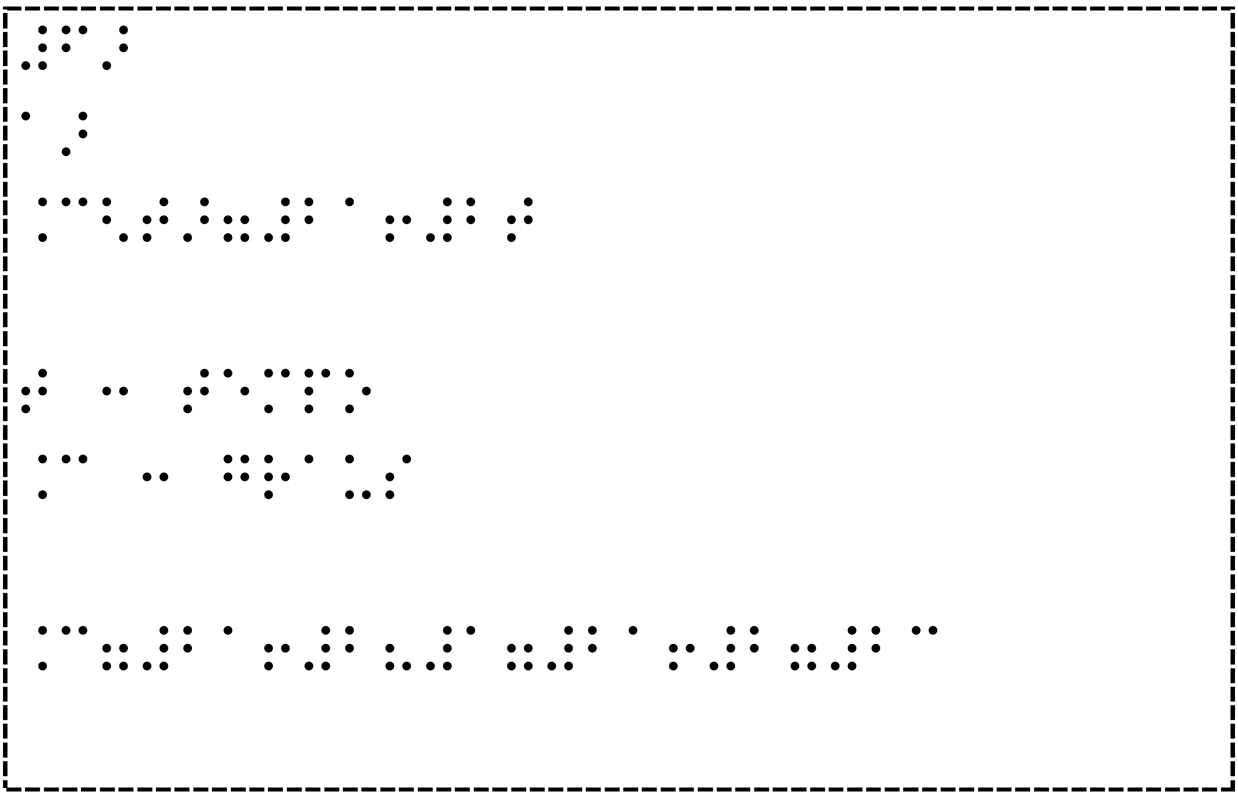
Figura 88A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

O aluno Pedro evidencia sérias dificuldades no que respeita ao estudo de funções. Primeiro, não consegue distinguir função linear de função afim não linear, segundo, na determinação do parâmetro m, considera um ponto pertencente ao gráfico da função e faz a razão entre a ordenada e a abcissa do ponto selecionado.

Constata-se que os alunos não fazem uma conexão entre a expressão algébrica e a representação gráfica, optam por tomar o procedimento de encontrar dois pontos pertencentes à representação gráfica da função para determinarem o parâmetro *m* e visualizam o valor da ordenada do ponto de interseção da reta da função com o eixo das ordenadas, considerando-o deste modo o valor do parâmetro *b*, construindo assim a respetiva expressão algébrica da função.

<u>Evidências da questão 6 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III*</u>

Margarida



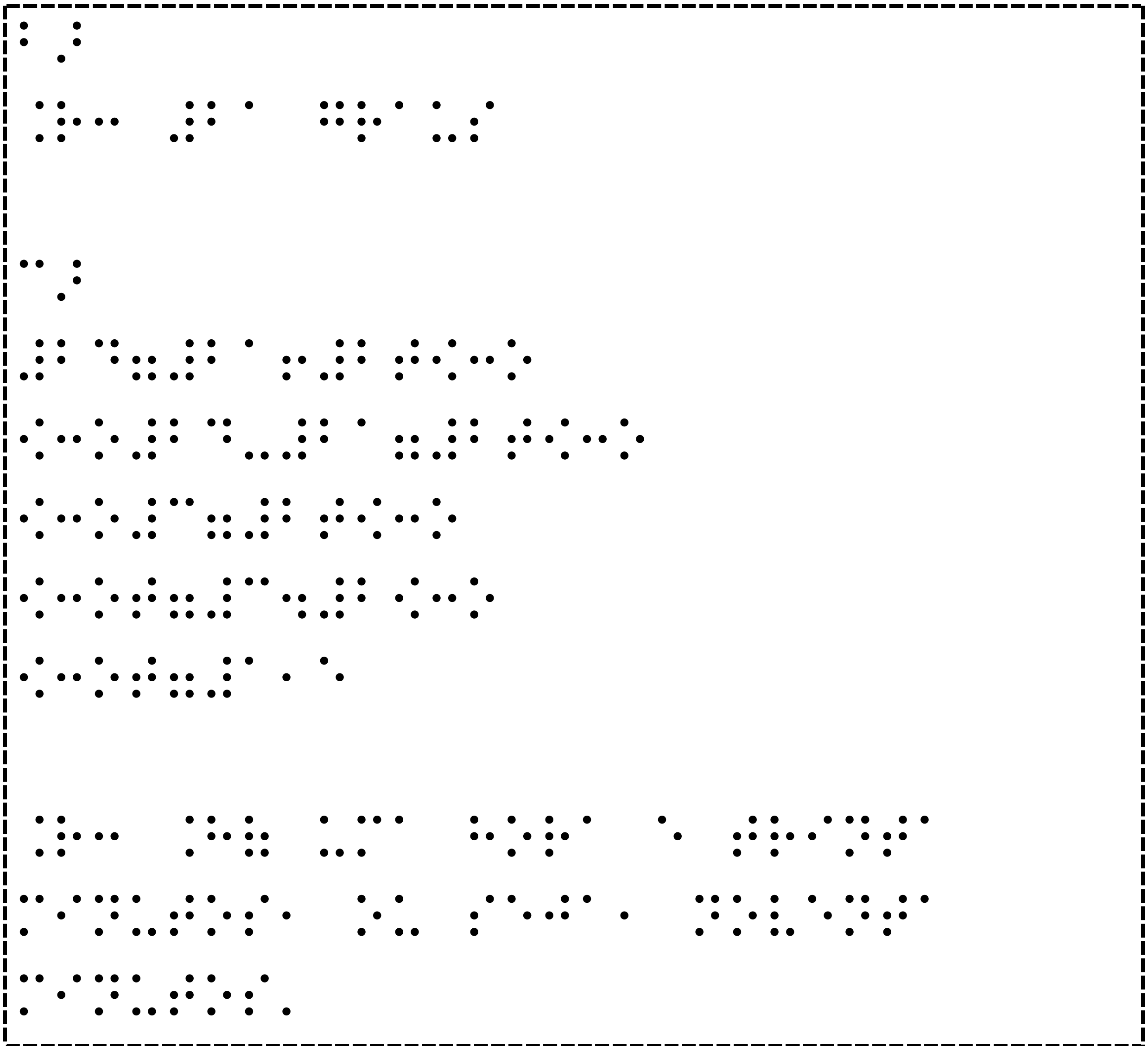


Figura 89: Extrato da resolução em Braille da questão 6 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

6)

a)

C(t) = 21 + 2t

t – tempo

C – graus

C = 21 + 2 x 1 = 21 + 2 = 23

b)

R: 21 graus

c)

$24 = 21 + 2t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24 - 21 = 2t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 = 2t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 3 \div 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 1,5$

R: Há uma hora e trinta minutos, ou seja, noventa minutos.

Figura 89A: Transcrição do extrato da resolução da questão 6 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

Rafael

6)

a)

C = 21 + 2 x 1 = 23 x 1 = 23

b)

t = 1

C = 23

t = 2

C = 21 + 2 x 2 $\Leftrightarrow$

C = 25

t = 3

C = 21 + 2 x 3 $\Leftrightarrow$

C = 27

R: 2 graus

c)

21 + 2t = 24 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$2t = 24 – 21

$\Leftrightarrow$ 2t = 3 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ t = 3÷2 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$t = 1,5

R: 1 hora e 50 minutos.

Figura 90: Extrato da resolução em Braille da questão 6 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

6)

a)

C = 21 + 2 x 1 = 23 x 1 = 23

b)

t = 1

C = 23

t = 2

C = 21 + 2 x 2 $\Leftrightarrow$

C = 25

t = 3

C = 21 + 2 x 3 $\Leftrightarrow$

C = 27

R: 2 graus

c)

$21 + 2t = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2t = 24 - 21$

$\Leftrightarrow 2t = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 3 \div 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 1{,}5$

R: 1 hora e 50 minutos.

Figura 90A: Transcrição do extrato da resolução da questão 6 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

Pedro

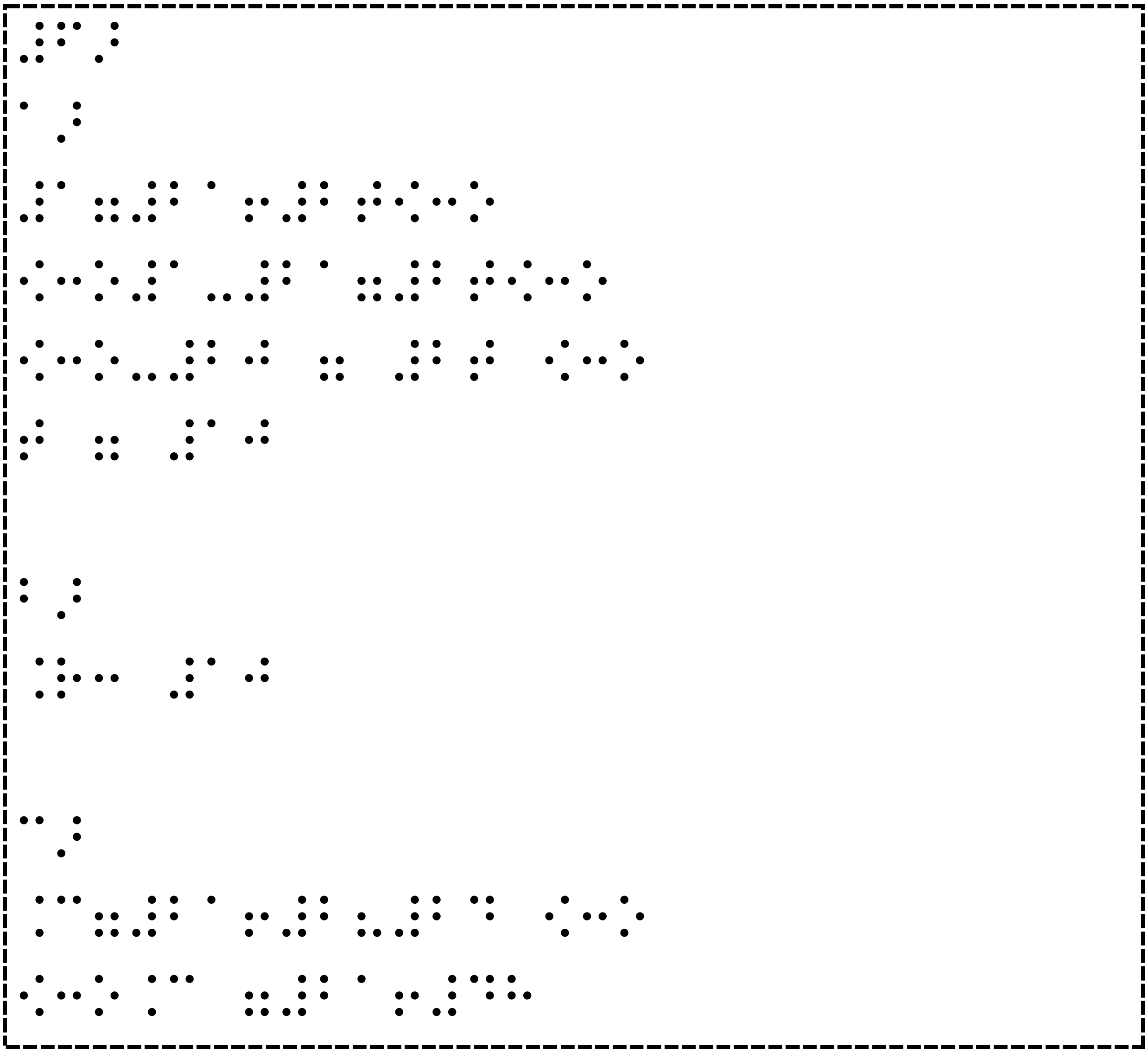


Figura 91: Extrato da resolução em Braille da questão 6 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

6)

a)

$1 = 21 + 2t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-21 = 2t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -20 = 2t \Leftrightarrow$

$t = 10$

b)

R: 10

c)

$C = 21 + 2 \times 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = 21 + 48$

$\Leftrightarrow C = 69$

R: 69 minutos

Figura 91A: Transcrição do extrato da resolução da questão 6 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

O aluno Pedro manifesta não ter compreendido a situação problemática, pelo que não respondeu corretamente a nenhuma das questões. Na alínea a) considera a variável t como sendo a temperatura e a partir desse momento todo o seu raciocínio deixa de ser válido.

<u>Evidências da questão 2 da ficha de trabalho – *Representações de uma função III*</u>

Margarida

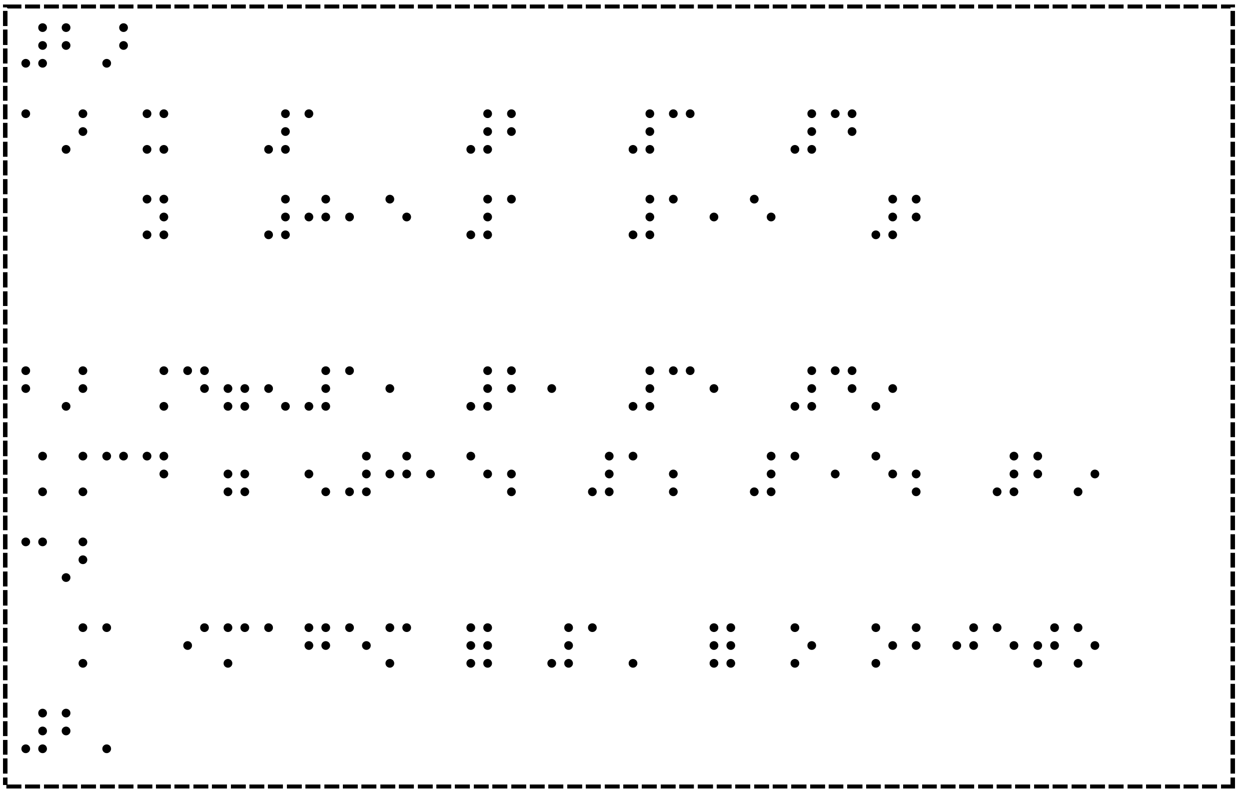


Figura 92: Extrato da resolução em Braille da questão 2 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

2)

a) x 1 2 3 4

y 0,5 1 1,5 2

b) D={1, 2, 3, 4}

CD = {0,5; 1; 1,5; 2}

c)

A imagem é 1. É o objeto 2.

Figura 92A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* da aluna Margarida

Rafael

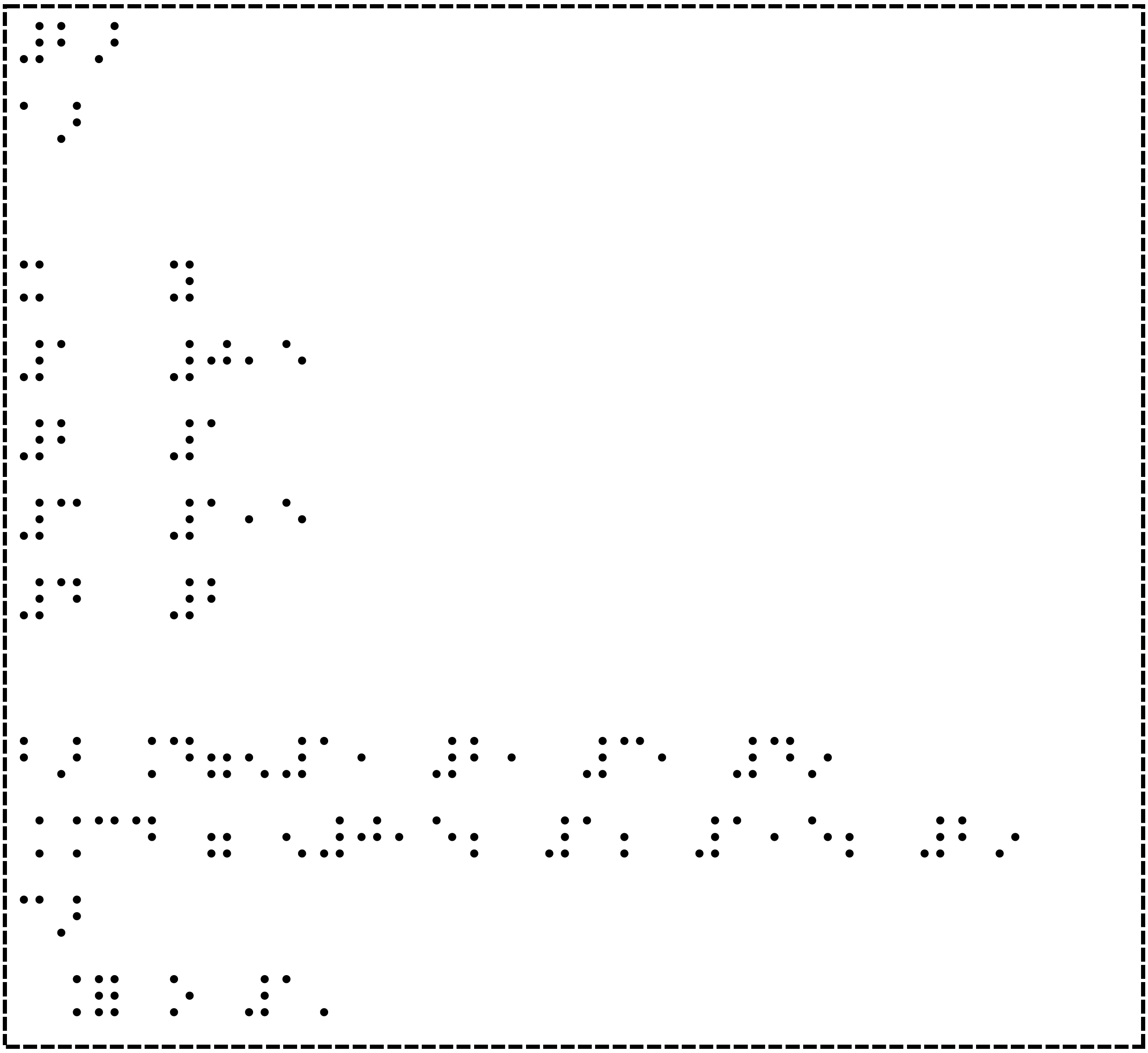


Figura 93: Extrato da resolução em Braille da questão 2 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

2)

a)

x y

1 0,5

2 1

3 1,5

4 2

b) D={1, 2, 3, 4}

CD = {0,5; 1; 1,5; 2}

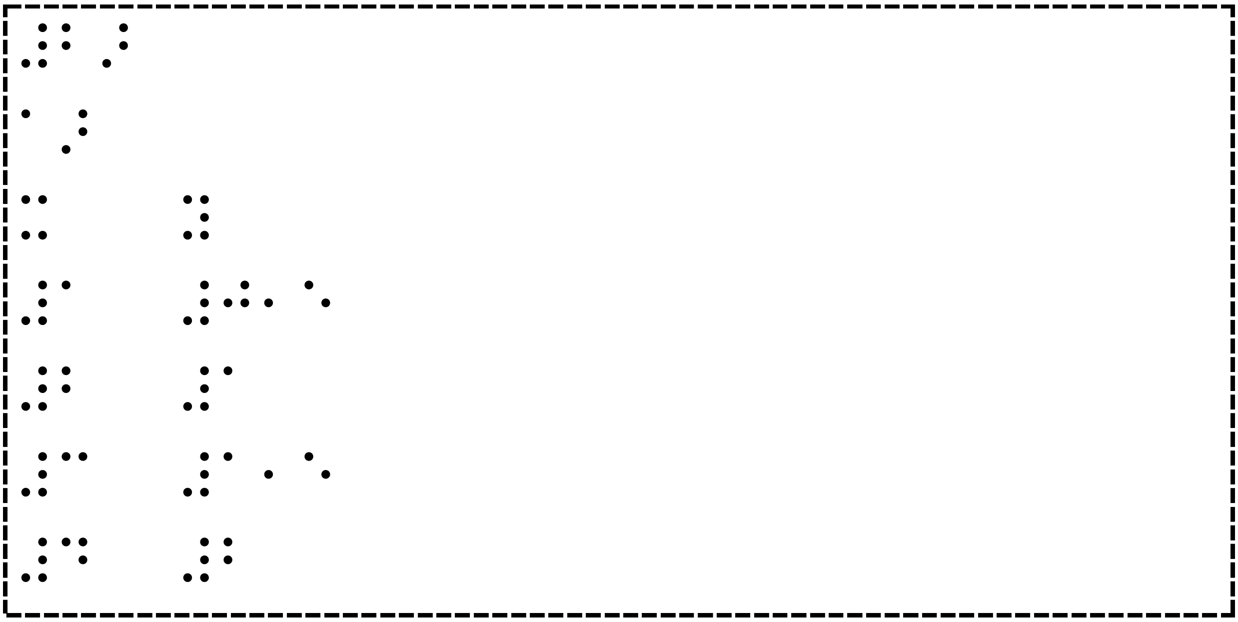
c)

É o 1.

É o 2.

Figura 93A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Rafael

Pedro



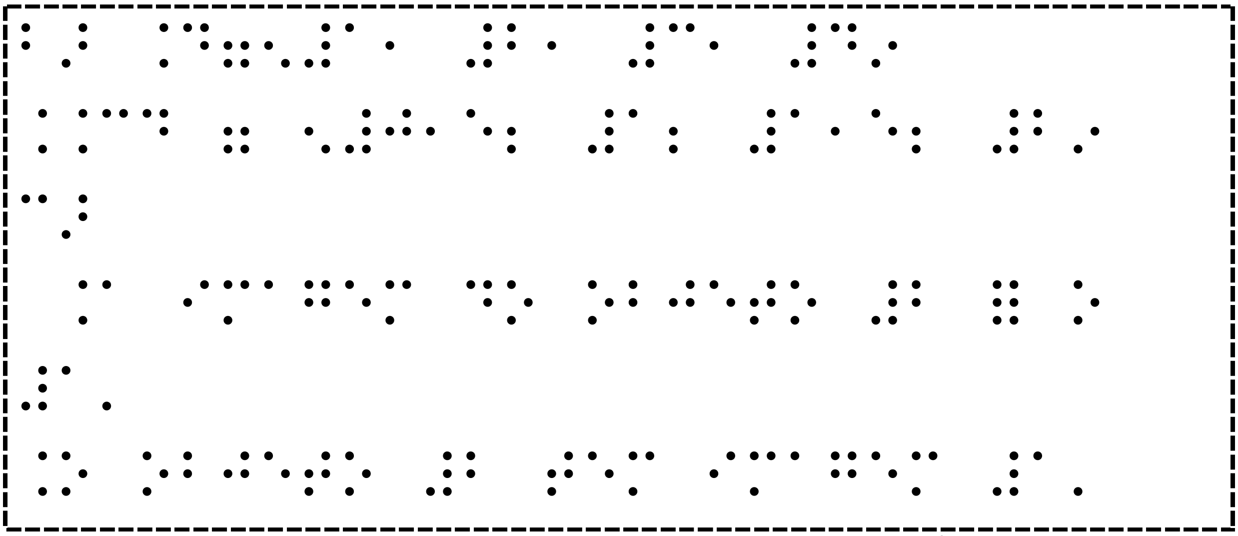


Figura 94: Extrato da resolução em Braille da questão 2 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

2)

a)

x y

1 0,5

2 1

3 1,5

4 2

b) D={1, 2, 3, 4}

CD = {0,5; 1; 1,5; 2}

c)

A imagem do objeto 2 é o 1.

O objeto 2 tem imagem 1.

Figura 94A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2 da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função III* do aluno Pedro

Todos os alunos cegos responderam corretamente a todas as alíneas da questão 2, pelo que evidenciam não terem dificuldades na conversão gráfica para a representação tabular.

7.8 – Análise dos resultados obtidos no Miniteste de Avaliação de Conhecimentos - Funções

No final da unidade didática, funções, como forma de avaliar os conhecimentos dos conteúdos lecionados nessa unidade temática, os alunos foram submetidos a um Miniteste de avaliação de conhecimentos. Esta análise é feita apenas sob ponto de vista quantitativo, contemplando a prestação global da turma e particularizando a prestação dos três alunos que fazem parte deste estudo.

No que se refere à questão 1 da ficha de avaliação de conhecimentos, pretende-se averiguar a compreensão da noção de função. São apresentadas correspondências sob a forma de diagrama sagital, de tabela e de gráfico cartesiano e pede-se que os alunos identifiquem quais representam funções. Pretende-se assim, avaliar o conhecimento da turma em relação ao conceito de função tendo por base diferentes representações. A esta questão, 16 alunos responderam corretamente e quatro respondendo incorretamente, tendo sido o aluno Pedro um deles.

Na questão 2.1, aparece uma tabela onde é apresentada uma correspondência entre duas variáveis. Pede-se que os alunos identifiquem essa correspondência como função e justifiquem adequadamente. Observou-se que 14 alunos obtiveram a cotação total, entre eles a Margarida e o Rafael e 4 alunos, entre eles, o Pedro tiveram cotação parcial, pois apresentaram uma justificação adequada mas genérica e apenas 2 alunos da turma tiveram cotação zero, não reconheceram que se tratava de uma função.

Relativamente à questão 2.2, é pedido que os alunos identifiquem o domínio e o contradomínio da função, representada na forma tabular. Observou-se que 15 alunos obtiveram a cotação total, entre eles a Margarida e o Pedro; 2 alunos com cotação parcial, devido a erro de notação, tendo sido um deles o aluno Rafael, e 3 alunos tiveram cotação zero.

Na questão 2.3, pede-se que os alunos indiquem a imagem de um determinado objeto e o objeto que origina determinada imagem. Observou-se que 17 alunos obtiveram cotação totalmente correta, entre eles a Margarida, o Rafael e o Pedro; 2 alunos com cotação parcial devido a erro de cálculo aquando da determinação do objeto, e 1 aluno com cotação zero.

Na questão 3.1, pretende-se que os alunos façam uma interpretação adequada do enunciado e consigam converter esta informação que se encontra representada verbalmente numa representação tabular. Observou-se que todos os alunos tiveram cotação total nesta questão.

Na questão 3.2, solicita-se aos alunos que identifiquem as variáveis independente e dependente. Verificou-se que 16 alunos tiveram cotação total, entre eles a Margarida, o Rafael e o Pedro e 3 alunos obtiveram cotação zero, na medida em que trocaram as variáveis em estudo e 1 aluno não respondeu à questão.

Na questão 3.3, pretende-se que os alunos consigam escrever a expressão algébrica da função representada verbalmente ou tabularmente. Observou-se que 12 alunos tiveram a cotação total, entre eles a Margarida e o Rafael, 5 alunos tiveram cotação parcial, entre eles o aluno Pedro, pois apenas substituíram o espaço em branco pela letra k e 3 alunos tiveram cotação zero.

Na questão 3.4, pretende-se que os alunos identifiquem se as grandezas são ou não diretamente proporcionais, que indiquem a constante de proporcionalidade e expliquem o seu significado. Observou-se que 11 alunos obtiveram cotação total, entre eles a aluna Margarida, 7 alunos com cotação parcial, entre eles, o Rafael e o Pedro, pois ambos não apresentaram uma resposta explícita no que diz respeito ao significado da constante no contexto do problema; 2 alunos não responderam à questão, tendo ambos obtido cotação zero.

De seguida apresenta-se uma tabela síntese dos resultados obtidos na ficha de avaliação de conhecimentos.

Questão	**N.º de respostas com cotação total**	**N.º de respostas com cotação parcial**	**N.º de respostas com cotação zero**
1.	16 (Margarida) (Rafael)	----	4 (Pedro)
2.1	14 (Margarida) (Rafael)	4(Pedro)	2
2.2	15 (Margarida) (Pedro)	2 (Rafael)	3
2.3	17 (Margarida) (Rafael) (Pedro)	2	1
3.1	20 (Margarida) (Rafael) (Pedro)	----	----
3.2	16 (Margarida) (Rafael) (Pedro)	3	1
3.3	12 (Margarida) (Rafael)	5 (Pedro)	3
3.4	11 (Margarida)	7 (Rafael) (Pedro)	2

Tabela 22**:** Resultados obtidos na ficha de avaliação de conhecimentos – Tópico funções

7.9 - Considerações

Num momento inicial, os alunos manifestaram problemas no que se refere à aquisição e compreensão do conceito de *função*, mais especificamente na identificação das variáveis independente e dependente e, consequentemente, na identificação de objeto e imagem, tendo os mesmos, nesta fase, recorrido unicamente à memorização, como se pode verificar pelas evidências registadas no âmbito da Ficha de Trabalho N.º 1 – *Conceito de Função*. Salienta-se que as dificuldades apresentadas foram transversais à maioria dos alunos, tendo-se, no entanto, acentuado nos alunos cegos, devido à abstração inerente ao conceito, tarefa particularmente difícil para os alunos cegos. Após a aplicação, em contexto de sala de aula, das "estratégias de definição" dos diferentes conceitos inerentes a uma função e suas conexões, delineadas e aplicadas pelo investigador, os alunos demonstraram compreender a noção de *função*, bem como todos os conceitos daí advenientes, como é evidenciado na mesma Ficha de Trabalho (questão 2, alínea b), ultrapassando uma das lacunas previsíveis no processo de aprendizagem dos conceitos em causa, isto é a capacidade de trabalharem com conceitos abstratos.

Constatou-se ainda que, aquando da análise gráfica de uma função, conforme evidenciado na Ficha de Trabalho N.º 1 – Conceito de Função (questão 1, alínea b1) existe uma enorme tendência para se confundir o conceito de *função* com a noção de *injetividade* de uma função, a qual se acentua quando confrontado com mais do que uma função no mesmo referencial. Destaca-se que esta transferência se verificou apenas com os alunos cegos, pelo que se depreende que se relaciona unicamente com a ausência de hábitos regulares de trabalho tátil com gráficos, consideração atestada pelo facto de a referida dificuldade, apesar de ter permanecido ao longo dos três anos letivos correspondentes ao 3.º Ciclo do Ensino Básico, ter diminuído à medida que os alunos desenvolveram práticas mais regulares de manipulação tátil de dados gráficos.

Verificou-se também que, na conversão de uma função, da representação algébrica para a representação gráfica, os alunos cegos recorrem, preferencialmente, a um conjunto de procedimentos numéricos, começando por atribuir valores à variável independente (x) na expressão algébrica e, deste modo, obtêm os valores da variável dependente (y) e determinam coordenadas de pontos e a partir dos pontos obtidos constroem o gráfico. Neste campo é notória a dificuldade dos alunos cegos em associar diretamente a expressão algébrica da função ao respetivo gráfico, tendo, por isso, recorrido ao processo descrito, processo mais trabalhoso e moroso, mas ao qual alguns alunos sem qualquer Necessidade Educativa Especial também recorrem. Salienta-se, contudo, que os alunos também referidos, apesar de mostrarem maior segurança na utilização deste processo, conseguem proceder à conversão de uma função sem o utilizarem, o que não acontece com os alunos cegos. Depreende-se que a limitação ao uso desta estratégia se prende, uma vez mais, com a ausência de hábitos de trabalho relacionados com a perceção tátil de gráficos, pelo que, tal como referido por Borges e Chagas[292], embora os cegos possuam o costume de ler e escrever linearmente, é fundamental que o professor trabalhe desenhos e outras representações bidimensionais, como a construção de tabelas e gráficos, a fim de acostumá-los a ler em duas dimensões.

Através das evidências da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função II*, constatou-se que os alunos, estando perante uma função linear, no que respeita à conversão da representação gráfica para a representação algébrica, recorrem a dois processos de resolução, sendo que em ambos relacionam o gráfico da função com a sua expressão algébrica: primeiro, recorrendo ao gráfico, obtém as coordenadas de um ponto assinalado no gráfico e, recorrendo à regra de invariância do quociente entre o valor da ordenada e o valor da abcissa, calculam o valor da constante de proporcionalidade e, de seguida, procedem à substituição do valor da constante na expressão algébrica ($y=mx$); segundo, retiram do gráfico da função as coordenadas de um ponto, com os valores das coordenadas substituem as variáveis x e y na expressão algébrica e, de seguida, resolvem a equação em ordem a m,

[292] BORGES, J.A. e CHAGAS, J. (2001) – Impressão Braille no Brasil: o papel do Braivox, Braille Fácil e Pintor Braille - *Anais do I Simpósio Brasileiro sobre Sistema Braille*. Salvador.

determinando, deste modo, o parâmetro *m*; por último, substituem o valor do parâmetro *m* na expressão algébrica. Na concretização das primeiras atividades, contudo, os alunos cegos apresentaram um ritmo substancialmente mais lento que o restante grupo-turma, pelo que necessitaram de um reforço do apoio individualizado por parte do professor. O mesmo aconteceu quando os alunos trabalharam com funções afins não lineares, sendo que, neste caso, para além de substituírem as variáveis x e y pelos valores das coordenadas de um ponto da função, recorrem ao gráfico para determinarem o parâmetro b, observando o ponto de interseção da reta da função com o eixo das ordenadas e obtendo, deste modo, a ordenada na origem, conforme demonstrado nas evidências da ficha de trabalho n.º3 – *Representações de uma função II*.

No que diz respeito à conversão de uma função da representação verbal para a representação gráfica, os alunos, tendencialmente, optam por utilizar uma conversão intermédia, representação algébrica, procurando, deste modo, um procedimento "comum": identificam as variáveis do problema; procuram através do enunciado dois pontos pertencentes à reta que representa a função; determinam a razão entre as diferenças das ordenadas e as abcissas dos pontos, calculando, deste modo, o parâmetro *m*; substituem na expressão algébrica as variáveis x e y pelos valores das coordenadas de um dos pontos; e resolvem a equação em ordem *b*, determinando, deste modo, o parâmetro *b*, ordenada na origem; por último, substituem os valores dos parâmetros *m* e *b*, obtendo assim a expressão algébrica e consequentemente constroem o gráfico da função. Este modo de proceder, utilizando a representação algébrica como ponte de transição da representação verbal para a representação gráfica contraria o estudo levado a cabo por Elia et al.[293], onde se constatou que, em problemas que exigiam a conversão da representação verbal para a representação algébrica, foram onde os alunos obtiveram resultados menos satisfatórios. Neste caso, também não foi necessário adotar qualquer estratégia específica, embora, uma vez mais, os alunos cegos tenham evidenciado uma necessidade imperativa de realizarem todos os procedimentos descritos, não tendo desenvolvido a capacidade

[293] Elia, I. et al. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, pp.533-556.

de estabelecerem um elo de ligação direto entre a representação verbal e a representação gráfica.

Por último, ao nível da representação algébrica de uma função, os alunos apresentaram enormes dificuldades no que se refere à notação matemática de *função*, devido à sua ambiguidade, na medida em que *f(x)* representa o nome da função, como poderá representar o valor da função *f*, sendo que o seu significado depende da sua contextualização. Já Sajka[294] havia defendido que uma das dificuldades no estudo de funções resulta da dualidade do próprio conceito de função e, por sua vez, Saraiva e Teixeira[295] afirmam que algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando tentam compreender o conceito de função estão relacionadas com o uso do conjunto de símbolos relacionados com ele. Constatou-se ainda que esta dificuldade, comum à maioria dos alunos, se acentua no caso dos alunos cegos, uma vez que, como demonstrado, estes apresentam dificuldades acrescidas em todos os conceitos que impliquem abstração e, consequentemente, também nos que se revelam ambíguos.

[294] Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics 53*, pp.229-254.
[295] Saraiva, M. J. & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento nº 4 al Nº 19*. Itália: Palermo, pp.74-83.

CAPÍTULO VIII – ESTRATÉGIAS DE ENSINO NO ESTUDO DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU A UMA INCÓGNITA

8 – Unidade de ensino – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU A UMA INCÓGNITA

8.1 – Introdução

A noção de equação é um tema de elevada importância na Álgebra escolar, sendo certo que é a partir daqui que muitos alunos abandonam a disciplina, devido à sua complexidade.

O processo de ensino e aprendizagem do aluno cego, relativamente ao conceito de equação e sua resolução, não foge muito à problemática dos alunos normovisuais. Contudo, acresce-se os problemas ao nível do enunciado e da GMB (acréscimo de simbologia).

8.2 – Equações e Inequações do 1.º grau a uma incógnita no Programa de Matemática do Ensino Básico em Portugal

No que se refere ao tópico "Equações do 1º grau a uma incógnita", o PMEB refere que se deve procurar atingir os seguintes objetivos específicos:

- Compreender a noção de equação;
- Compreender a noção de solução de uma equação;
- Identificar equações equivalentes;
- Resolver equações do 1º grau a uma incógnita utilizando as regras de resolução[296].

Relativamente ao tópico "*Inequações do 1.º grau a uma incógnita*" são apresentados os seguintes objetivos específicos:

- Compreender as noções de inequação e de solução de uma inequação.
- Resolver inequações do 1.º grau utilizando as regras de resolução.
- Resolver e formular problemas envolvendo inequações[297].

Pretende-se ainda, atendendo aos objetivos gerais do referido documento, que os alunos aprendam a resolver equações interpretando e representando situações em diferentes contextos e sejam capazes de resolver problemas recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

De forma a atingir os objetivos a que se propõe, são indicadas algumas orientações metodológicas. Ao nível da abordagem, é sugerido que no desenvolvimento dos conceitos e procedimentos algébricos sejam proporcionadas aos alunos, experiências informais antes da manipulação algébrica formal. Mais ainda, alerta para o facto da aprendizagem das operações com monómios e polinómios, e da simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos

[296] ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*, p.56. Disponível em (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

[297] Ibidem.

alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efetuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos. É conveniente usar expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, e introduzir expressões com variáveis ligadas a um contexto. O conceito de variável, pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (nomeadamente, em equações e fórmulas) e discutam os seus significados. Na resolução de equações, os alunos devem fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática, opção didática que também é pertinente para a abordagem da resolução de inequações do 1.º grau.

No que respeita a tarefas, destaca-se a importância para a diversificação das mesmas, devendo ser privilegiada a resolução de problemas, tendo sempre em atenção, a consolidação dos procedimentos algébricos de rotina. É também recomendado que, devem ser estabelecidas conexões com a Geometria e os Números e Operações de forma a evitar a abordagem à Álgebra apenas como um conjunto de regras e procedimentos a memorizar[298].

Na tabela seguinte será apresentado o tópico lecionado, assim como os objetivos específicos a alcançar.

Tópico	**Objetivos específicos**
Equações do 1.º grau a uma incógnita	• Compreender a noção de equação • Compreender a noção de solução de uma equação • Identificar equações equivalentes • Resolver equações do 1º grau a uma incógnita utilizando as regras de resolução
Inequações do 1.º grau a uma incógnita	• Compreender as noções de inequação e de solução de uma inequação. • Resolver inequações do 1.º grau utilizando as regras de resolução.

[298]Ibidem.

	• Resolver e formular problemas envolvendo inequações.

Tabela 23: síntese referente ao estudo das *Equações e Inequações*

8.3 - Conceitos matemáticos relativos à unidade de ensino

Pretende-se aqui apresentar diversos conceitos matemáticos relacionados com o tópico Equações do 1º grau a uma incógnita e que foram abordados ao longo da lecionação desta unidade de ensino.

Equação

Uma equação é uma igualdade entre duas expressões algébricas onde aparece pelo menos um valor desconhecido. Aos valores desconhecidos chamamos ***Incógnitas***. Na unidade que lecionei foi tratado apenas o caso em que existe apenas um valor desconhecido.

Membros de uma equação

A expressão algébrica à esquerda do sinal de "igualdade" designa-se por ***primeiro membro***. A expressão algébrica à direita do sinal de "igualdade" designa-se por ***segundo membro***.

Monómio

Um monómio é um número, ou um produto de números em que alguns podem ser representados por letras. Quando estão presentes letras, podemos distinguir duas partes num monómio, uma parte numérica, ***coeficiente***, e a ***parte literal***, constituída essa por letras.

Termos

Cada um dos membros de uma equação pode ser constituído por um ou mais monómios, que se designam por ***termos*** da equação. ***Termos semelhantes*** são termos que têm a mesma parte literal (termos com incógnita ou termos independentes).

Solução de uma Equação

Ao valor da incógnita que transforma a equação numa igualdade numérica verdadeira chama-se **solução** ou **raiz** da equação.

Equações equivalentes

Uma equação diz-se ***equivalente*** a outra, quando toda a solução da primeira é solução da segunda e reciprocamente, toda a solução da segunda é solução da primeira, ou quando são ambas impossíveis.

Para a resolução de equações há que ter em conta diversas transformações, também chamadas de transformações elementares de equivalência, que se baseiam nos seguintes princípios:

1º Princípio de equivalência

Quando somamos ou subtraímos o mesmo número a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente à dada.
Deste princípio de equivalência surge a seguinte regra prática:

• Numa equação podemos mudar um termo de um membro para o outro, trocando-lhe o sinal.

2º Princípio de equivalência

Quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à inicial.

Desigualdade

Uma desigualdade é uma condição em que aparece um dos símbolos: <, >, ≤ ou ≥, sendo estes denominados de símbolos ou sinais de desigualdade.

Inequação

Uma inequação é uma desigualdade entre duas expressões onde figura, numa das expressões ou em ambas, pelo menos uma letra (x).

Solução de uma inequação

Um número diz-se que é solução de uma inequação quando, ao substituir a variável (ou a incógnita) por esse número, se obtém uma proposição verdadeira.

Uma inequação pode apresentar uma única solução, muitas soluções, infinitas soluções ou nenhuma solução. Quando não tem solução representa-se o conjunto-solução por conjunto vazio, ou seja, { } ou Ø.

Conjunto-solução de uma inequação

Chama-se conjunto-solução de uma inequação ao conjunto de todas as soluções de uma inequação.

Inequações equivalentes

Duas inequações dizem-se equivalentes quando têm o mesmo conjunto-solução.

8.4 – Símbolos e Variáveis

A simbologia utilizada pelos alunos aquando da aprendizagem da Aritmética, é uma vez mais usada na aprendizagem da Álgebra, sendo que a mesma é agora apresentada com outro significado, tais como o sinal de igual, o sinal de mais ou menos e as letras.

Assim sendo os alunos ficam sujeitos a uma nova compreensão desta simbologia, pelo que a escassez de articulação do binómio Álgebra e Aritmética se torna uma variável de bloqueio para uma aprendizagem algébrica efetiva.

Segundo Canavarro[299], uma abordagem algebrizada da Aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da Álgebra em anos posteriores.

Arcavi[300] refere que, no ensino da Álgebra se deve ter em conta o desenvolvimento do sentido de símbolo, tal como acontece no ensino da Aritmética que visa o desenvolvimento do sentido de número. Contudo, o sentido de símbolo não tem uma definição singular e concisa, o que implica diferentes visões do termo, existindo, no entanto, pontos em comum.

Ainda, para Arcavi[301], o sentido do símbolo envolve vários fatores, tais como:

---

[299] Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, XVI (2),* pp.81-118.

[300] Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14(3)*, pp.24-35; Arcavi, A. (2006). *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.* Lisboa: SEM-SPCE, pp.29-48.

[301] Arcavi, A. (2006). *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, pp.29-48.

(I) compreensão dos símbolos (quando e como podem e devem ser usados para exibir relações, generalizações e demonstrações) e sentido estético do seu poder;

(II) capacidade tanto de manipular como de ler através de expressões simbólicas;

(III) consciência que é possível exprimir informação dada ou desejada através de relações simbólicas;

(IV) capacidade de selecionar uma representação simbólica e de melhorá-la se necessário;

(V) consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a realização de uma tarefa, tendo em conta a nossa intuição e o contexto do problema;

(VI) consciência que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis em diferentes contextos.

Assim sendo trata-se, claramente, de um conhecimento complexo que requer múltiplas e variadas experiências de aprendizagem ao longo de um percurso escolar de vários anos.

A definição do sentido do símbolo, segundo Zorn[302] passa por uma capacidade muito geral de extrair significados e estruturas matemáticas dos símbolos, para atribuir um significado eficiente aos símbolos e para manipulá-los para descobrir novos significados e estruturas matemáticas. Ou seja, *sentido do símbolo* refere-se, essencialmente, à capacidade de dar significado a símbolos, a expressões e a fórmulas e a ter uma compreensão da sua estrutura.

Assim sendo, enquanto que para Zorn, o sentido de símbolo, passa pela capacidade de dar significado e compreender a sua estrutura, para Arcavi, o sentido de símbolo envolve vários fatores. Pode concluir-se que, para ambos, o sentido de símbolo

[302] Zorn, P. (2002). Algebra, computer algebra, and mathematical thinking. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*.

assenta na compreensão e na capacidade de dar significado. Todavia, discordam no que respeita ao facto de que, para Zorn é necessário primeiro dar significado para poder compreender; já para Arcavi é necessário primeiro compreender para posteriormente dar significado. Arcavi acrescenta também, neste âmbito, que é necessário rever os significados dos símbolos bem como os significados adquiridos consoante os seus contextos.

No painel " *Ensino Aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios?", quando questionado sobre o symbol sense, Arcavi*[303] menciona que *"…se os símbolos são o instrumento principal da Álgebra, podemos concentrarmo-nos no symbol sense em relação com a noção geral de "sense making", criação de significados em geral e não somente na álgebra. De alguma maneira o symbol sense é um caso específico de algo que me preocupa muitíssimo e que é o "sense making" em Matemática. Eu penso que a chave do divórcio entre os nossos alunos e a Matemática, se deve a esse corte entre os significados e o formalismo.*"

A compreensão do conceito de equação faz-se recorrendo à noção de equilíbrio, surgindo, neste ponto, dificuldades na compreensão da transformação do símbolo de igualdade "=", uma vez que a interpretação deste símbolo, para o aluno, está à partida associada a uma indicação de operação. Contudo, em Álgebra o mesmo assume uma significação diferente, sendo esta a equivalência entre o primeiro e o segundo membro da equação, na medida em que define uma condição onde x satisfaz um valor para a igualdade. Assim sendo, é necessário que os alunos compreendam esta significação e que a utilizem no âmbito da resolução de equações, de modo a evitar que a sua interpretação como o ponto de partida de um cálculo.

Kieran[304], ao abordar esta questão, menciona que, para minimizar as dificuldades sentidas pelos alunos, este sinal deve ser apresentado, desde logo, como um sinal de equivalência entre igualdades Aritméticas.

---

[303] Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, pp.363.

[304] Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, pp.317-326.

Filloy e Rojano[305] classificam as equações de 1.º grau com uma incógnita em duas categorias, consoante a presença da incógnita num ou em ambos membros da equação. Às equações que podem ser escritas na forma $x+a=b$ ou $ax+b=c$ classificam de "equações do tipo aritmética" e às equações que se podem reduzir à forma $ax+b=cx$ ou $ax+b=cx+d$ de "equações do tipo algébrico". Kieran refere a possibilidade de, nas equações de tipo aritmético, os alunos ainda entenderem o sinal de igual como sinal operacional, em que a expressão do 1º membro deve ser operada de modo a obter o resultado do 2º membro. A resolução deste tipo de equações pode facilmente ser realizada recorrendo à utilização de operações inversas, o que não acontece nas equações do tipo algébrico cuja resolução implica a utilização de regras de manipulação mais complexas. Filloy e Rojano apontam para a possível existência de um corte didático na passagem da resolução de equações aritméticas para equações do tipo algébrico. Se efetivamente chegam à solução nas "equações aritméticas" operando no 1º membro, certamente quando confrontados com "equações algébricas" tentarão inicialmente operar sobre o primeiro membro na tentativa de obter o 2.º membro e desta forma experimentando a dificuldade.

Outro símbolo que requer uma diferente conceção por parte dos alunos é o sinal de menos. Kieran[306] afirma que o sinal de menos e as diferenças subtis com este sinal, usado nas expressões algébricas e nas equações, constitui um fator gerador de dificuldades nos alunos. A necessidade do conhecimento da negatividade, referido num estudo por Vlassis[307], o autor confere a capacidade de interpretar o sinal de menos em três vertentes:

I) sentido binário, como operação binária;
II) sentido unário, segundo o qual subtrair 3, significa menos 3;

[305] Filloy & Rojano, (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9(2)*, pp.19-25.
[306] Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning.* NCTM, pp.707-762.
[307] Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in negativity. In L., Verchaffel, & S, Vosniadu (Eds), *The conceptual change approach to mathemathics learning and teaching, special issue of learning and instruction, 14*, pp.469-484.

III) sentido de simetria, que permite, na equação $-x = 1$, identificar $-x$ como o simétrico de x.

Os resultados do seu estudo levam a concluir que as várias interpretações do sinal menos são contra intuitivas para a maioria dos alunos que iniciam o estudo em Álgebra e que a perspetiva binária levanta menos dificuldades aos alunos do que as interpretações do sinal nos sentidos unário ou de simetria.

Ponte, Branco & Matos[308] referem que, desde a década de oitenta, têm sido discutidas diferentes visões da Álgebra e delinear o que deve ser incluído na álgebra escolar. A primeira visão da Álgebra, que a reduz à sua vertente simbólica, é conhecida como a ***visão letrista***, em que o objetivo é aprender a manipular símbolos apenas através de treino e prática. A ***visão estruturalista***, uma corrente centrada nas estruturas algébricas abstratas, surge apoiada nas propriedades das operações ou das transformações geométricas. Mais recentemente existe uma terceira visão, em que se procura dar ênfase aos significados que podem ser representados por símbolos e que procura promover o pensamento algébrico.

Ainda assim, é quando surgem as letras no ensino da Álgebra que os alunos mais sentem desconforto. Nos anos setenta, num estudo realizado no Reino Unido, Kuchemann[309], indicava diversas interpretações para as letras usadas em Álgebra:

I) ***Letra como incógnita***, representando um número específico mas desconhecido, com o qual é possível operar diretamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como $x+3=6$, por exemplo.

II) ***Letra como número generalizado***, situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor.

---

[308] Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* DGIDC, Ministério da Educação.
[309] Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed) *Children´s understanding of mathematics*: 11-16, London: Murray, pp.102-119.

III) ***Letra como variável***, caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre dois conjuntos.

8.5 - Resolução de Equações

Para se compreender efetivamente o conceito de equação é necessária a compreensão de vários aspetos. O sinal de igual e de número desconhecido são alguns dos conceitos que devem ser interiorizados de forma significativa por parte dos alunos. O conceito de número desconhecido pode começar a ser desenvolvido antes da aprendizagem formal da Álgebra. O PMEB explicita que no desenvolvimento dos conceitos e procedimentos algébricos é importante que sejam proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal. Também Linchevski[310] sugere a realização de um trabalho pré-algébrico relativo ao tema equações que abranja as quatro áreas seguintes:

I) Desenvolver a noção de solução através de oportunidades para realizar a substituição de números por letras (verificação numérica);

II) Lidar com equações equivalentes através de substituição;

III) Construir esquemas cognitivos através de atividades reflexivas que permitam que os alunos usem os seus procedimentos espontâneos próprios;

IV) Praticar a formulação de equações como uma atividade complementar para a resolução de equações.

Na resolução de equações, o PMEB refere que os alunos devem fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática. É omisso no PMEB a referência sobre as regras de resolução de uma equação de primeiro grau. Neste subtópico é permitido ao aluno abordar a resolução de equações, de uma forma mais

[310] Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, pp.113-120.

aberta dando-lhe deste modo, a liberdade de escolher a melhor estratégia de resolução.

De acordo com Branco[311] na resolução de equações podem ser usadas diferentes estratégias de resolução, sendo que umas recorrem a situações de visualização e outras a abordagens numéricas. Em cada uma das situações encontram-se vantagens e desvantagens, pelo que, ao longo de toda a escolaridade os alunos devem ser confrontados com situações de aprendizagem que promovam o uso destas estratégias.

Kieran[312] defende, que os alunos iniciantes na álgebra utilizam vários métodos intuitivos para resolver equações algébricas. Alguns desses métodos podem ajudar na perceção de equações e resolução de equações. Os alunos que são incentivados a usar inicialmente o método tentativa e erro desenvolvem uma melhor noção de equivalência entre os dois lados da equação e são mais tarde bem sucedidos na aplicação de métodos mais formais. Em contrapartida, os alunos que são ensinados a resolver equações por métodos formais podem não entender o que estão a fazer. Os alunos que são ensinados a utilizar o método da "transposição" aplicam mecanicamente o facto - muda de lado, troca de sinal.

Kieran[313] refere três abordagens à resolução de equações, no início do estudo da Álgebra: I) abordagem intuitiva, que inclui estratégia relativa às propriedades dos números, a estratégia de contagem e a estratégia de *cover up*;
II) Abordagem de substituição por tentativa-erro,
III) abordagem formal.

As várias estratégias a que Kieran[312] chama de métodos para resolver equações estão resumidas na tabela que se segue.

[311] Branco, N. (2008). O *estudo de Padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de mestrado. (Universidade de Lisboa).
[312] Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* NewYork: Macmillan, pp.390-419.
[313] Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education:Past, present and future*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, pp.11-49.

Estratégia		Exemplo
a)	***Uso da realidade***	$3 + n = 5$; $5 - 3 = 2$, logo $n = 2$
b)	***Técnicas de contagem***	$3 + n = 5$, os alunos podem contar 3, 4, 5, logo são necessárias duas unidades para ir do três ao cinco.
c)	***Cobertura (Cover-up)***	$2x + 9 = 5x$; $2x + 9 = 2x + 3x$; $9 = 3x$
d)	***Desfazer (Undoing)***	$2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 14 \div 2 \Leftrightarrow x = 7$
e)	***Tentativa e erro***	$2x + 4 = 18$; para $x = 5$, vem $14 = 18$, o que não é verdade; para $x = 6$, vem $16 = 18$, o que não é verdade; para $x = 7$, vem $18 = 18$, logo $x = 7$.
f)	***Transposição (mudar de membro, mudar de sinal)***	$2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$
g)	***Realização da mesma operação em ambos os membros da equação***	$2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x + 4 - 4 = 18 - 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x \div 2 = 14 \div 2 \Leftrightarrow x = 7$

Tabela 24: Estratégias de resolução de equações (Kieran, 1992)

De acordo com o PMEB, em vigor nos primeiros anos de escolaridade, não há referência às equações. Mesmo assim o professor pode proporcionar experiências de aprendizagem que proporcionem aos alunos a resolução de equações utilizando estratégias informais, como a contagem ou o uso de propriedades conhecidas dos números. Por exemplo, resolver a equação $5+x=8$ ou sem utilizar a letra *x*, 5+? = 8. Neste caso, os alunos utilizam os conhecimentos anteriores da adição, 5 mais 3 é igual a 8 e utilizando os conhecimentos relativos às propriedades dos números determinam facilmente o valor da incógnita, x=3. A mesma equação pode ser resolvida usando a estratégia de contagem, 5, 6, 7, 8. Os alunos verificam que do 5 para chegar ao 8, têm de contar três números (segundo Kieran)[314].

[314] Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* NewYork: Macmillan, pp.390-419.

Ainda segundo Kieran, outra estratégia bastante informal é a realização de substituições por tentativa e erro. Nesta estratégia, os alunos substituem a incógnita por vários valores, até encontrarem ao valor que torna a expressão numa proposição verdadeira. Por exemplo, na equação $2x + 5 = 13$ podem experimentar valores tais como, 2, 6 e depois o 4. Esta estratégia exige algum conhecimento das propriedades dos números pois se a tentativa e erro se basear em experimentação aleatória a resolução pode tornar-se morosa e fastidiosa. É necessário que os alunos tenham uma boa noção das propriedades dos números pois esta estratégia permite, ao mesmo tempo, confirmar a validade de uma solução que é determinada pelo método formal. A mesma autora refere que os alunos que adotam este método no início da aprendizagem da resolução de equações, têm mais desenvolvida a noção de equilíbrio entre o lado direito e o lado esquerdo da equação e do papel de equivalência do sinal de igual, do que os alunos que nunca adotaram esta estratégia na resolução de equações.

As estratégias para resolver equações pelos métodos *cover up* e desfazendo as operações revelam-se como estratégias mais sofisticadas e são vistas pelos alunos como uma sequência de equações. Numa primeira situação, estas apenas contêm uma operação, como por exemplo, $n + 17 = 21$, e coloca questões como “que número mais 17 dá 21?”. A partir desta ideia o aluno poderá pensar que 21 -17 é igual a 4, chegando deste modo à solução da equação. Recorrendo a esta técnica a determinação do valor desconhecido não passa por pensar na adição, mas na subtração. Numa segunda fase as equações do tipo $2 \times n + 5 = 47$, os alunos colocam questões como “que número mais cinco dá 47?”. Ao obterem 42 questionam “duas vezes que número dá 42?” e obtêm assim a solução da equação inicial que é 21 como resposta final. A investigação desta autora relaciona o método e os procedimentos formais na resolução de equações. Confere que os alunos que aprendem a resolver equações segundo este método antes de aprender as técnicas formais têm mais sucesso neste domínio que os alunos que aprendem técnicas formais. Quando os alunos adotam o método de ”andar para trás” acabam por pensar nas operações inversas. Por exemplo, quando resolvem por este método a equação $2x + 4 = 18$, os alunos tomam o valor numérico 18 e realizam as operações inversas às indicadas no lado esquerdo, isto é, fazem $18 - 4 = 14$, e de seguida realizam a operação inversa à multiplicação por 2 e fazem 14÷2 =7. Assim, operam exclusivamente com números e evitam abordar a equação como uma estrutura matemática de equivalência.

Ainda sobre os outros dois métodos que a autora apresenta, de cunho mais formal, a transposição e a realização da mesma operação em ambos os membros, a autora defende que as operações inversas que são realizadas no método relativo à realização das mesmas operações em ambos os lados da equação são bastante diferentes das usadas quando se realiza a transposição. Apesar de, por vezes, a estratégia da transposição ser considerada uma versão mais reduzida da realização da mesma operação em ambos os membros da equação, estas duas estratégias não têm o mesmo significado para os alunos que iniciam o estudo da Álgebra. Kieran[315], salienta a diferença entre estes dois métodos de resolução de equações: "*O método de realizar em ambos os lados da equação uma operação que seja inversa a uma das operações dadas torna explícito o equilíbrio entre o lado esquerdo e direito da equação. Por outro lado, a justificação para realizar a mesma operação dos dois lados é precisamente para manter a equação equilibrada e para manter a sua solução inalterada ao longo do processo de resolução da equação. Além disso, este procedimento também envolve a simplificação dos lados esquerdo e direito da equação, em vez de só um lado, o que ocorre quando um dos termos é transposto para o outro lado.*"

De modo a tornar mais clara a abordagem à resolução de equações do 1.º grau, Filloy e Rojano[316] sugerem a utilização de uma abordagem geométrica. Pretendem desta forma, dar sentido às equações dos tipos c e c*e* às operações algébricas usadas na resolução dessas equações. De acordo com esta abordagem, os alunos têm a possibilidade de transformar uma equação algébrica numa equação aritmética recorrendo à "manipulação geométrica". No caso particular de equações do tipo $ax \pm b = cx$, onde *a*, *b* e *c* são números inteiros positivos dados e, neste caso, *c*> *a*, esta pode ser interpretada como representando a situação em que a adição da área

[315] Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p.95.
[316] Filloy & Rojano, (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9(2)*, pp.19-25.

de um retângulo de comprimento ***a*** e largura ***x*** com a área de um retângulo de área ***b*** é igual à área de um retângulo de comprimento ***c*** e largura ***x*** como mostra a figura seguinte:

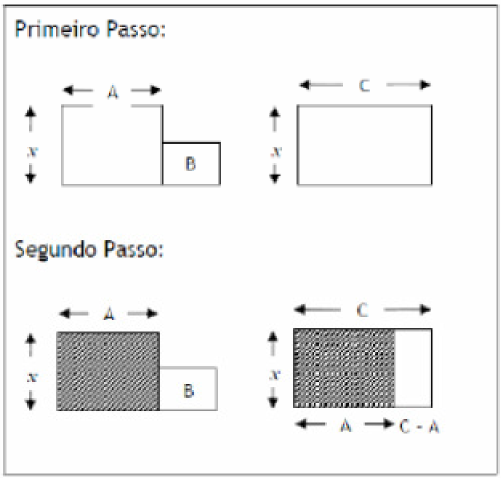


Figura 95: Abordagem geométrica na resolução de uma equação
(adaptado de Filloy &Rojano, 1989, p. 21)

Com este modelo, os alunos transformam uma equação algébrica numa equação de tipo aritmética, tendo a possibilidade de concluir a sua resolução com recurso à utilização de operações inversas.

Os mesmos autores sugerem ainda a utilização da balança com dois pratos equilibrados. A vantagem deste modelo assenta no facto de ter significado em diferentes situações do dia-a-dia e de os alunos poderem criar facilmente uma imagem mental da balança. Além disso, este método quando introduzido no capítulo das equações, salienta o conceito de equivalência presente nas mesmas. No entanto, este é um método limitado uma vez que a abordagem às equações que envolvam números negativos não é adequada. Warren e Cooper[317] estudam alunos cuja média de idades é oito anos com o objetivo de explorar a utilização do modelo da balança para a representação de equações e a determinação das incógnitas. Estes autores verificam que este modelo fez com que os alunos não se centrassem no significado do sinal de igual como indicando uma resposta mas que interpretem a equação como

[317] Branco, N. (2008). O *estudo de Padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de mestrado. (Universidade de Lisboa).

uma entidade. Todos os alunos representam em linguagem simbólica as indicações presentes no modelo da balança mostrando, assim, que a utilização deste modelo é eficaz. Neste estudo, a estratégia que mais adotam é uma estratégia relativa ao isolamento da incógnita através da realização das operações inversas, seguida pelo uso de uma estratégia numérica. Na realização da equação ? – 4 = 13, dez alunos adotam o modelo da balança e determinam corretamente a sua solução. Ao fazerem isto, Warren e Cooper consideram que os alunos se "deslocam para além das limitações do modelo da balança". Esta conclusão é também suportada pelo facto de três alunos terem usado com sucesso esta estratégia para descobrir o valor da incógnita na equação ? + ? + 2 = ? + 5.

8.5.1 – Estratégia de ensino de resolução de Equações do 1.º grau a uma incógnita

Na resolução de equações, o professor deverá reforçar que uma equação é uma igualdade onde figura pelo menos uma letra. Assim sendo, para se estar perante uma equação é necessário visualizar uma letra e um sinal de igual. De seguida, deverá mencionar que durante o processo de resolução se irá trabalhar com equações equivalentes, ou seja, cada procedimento que se tome deverá ser utilizado um sinal de equivalência ("se e só se") (⇔), em Braille será ⠪⠒⠕ , pontos (246) (25) (135).

Dever-se-á, numa fase inicial, começar por resolver equações simples, ou seja, sem parênteses e sem denominadores, o que importa neste momento é transmitir o processo de resolução nas suas diferentes etapas e ao mesmo tempo familiarizar o aluno com a nova simbologia. Nesta fase, o professor deverá apresentar um esquema de resolução de uma determinada equação com os passos devidamente discriminados, como se pode observar no esquema exemplificativo que se segue:

Equações sem parênteses e sem denominadores

$$5x - 6 = 3x + 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3x = +6 + 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = 10 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{10}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5$$

$$\text{Conjunto solução } = \{5\}$$

- Resolver uma equação é determinar a sua solução.
- Numa equação podemos **mudar termos de um membro para o outro**, desde que lhes **troquemos o sinal**
- **Num dos membros ficam os termos com incógnita e no outro os termos independentes**
- efectuamos as operações.
- **Dividimos ambos os membros pelo coeficiente da incógnita**.
- **Determinamos a solução.**

Todavia, este tipo de esquema torna-se muito perigoso no processo de ensino das equações alertando desde já, para que no segundo passo "Numa equação podemos **mudar termos de um membro para o outro**, desde que lhes **troquemos o sinal**", está-se a cometer um erro e a levar o aluno para a confusão, na medida em que ele pensa se muda de membro, muda de sinal, então se tenho 3y = 9 ⇔ y = 9 – 3 ⇔ y = 6. É muito usual, os professores utilizarem este tipo de linguagem, "troca de sinal", o problema é que poderá levar o aluno a não realizar nenhuma equação. É obrigatório chamar a atenção do aluno, para que quando se diz "*trocar de sinal*", primeiro que se está a referir-se a um termo da equação e segundo está-se a referir à **operação aritmética**, ou seja, o que é que o termo está a fazer no primeiro membro, se a somar, se a subtrair, se a multiplicar ou se está a dividir. Por exemplo, quando estamos perante a equação 3y - 5 = 7, efetivamente o sinal do 5 é "-", então passará para o segundo membro +5. O problema reside quando temos, por exemplo 3y = 6, pela mesma ordem de ideias, o sinal do 3 é "+", logo passará para o segundo membro como -3, o que é de todo errado, basta verificar a equação, a solução seria 3 e não 2. Aqui há que pensar na operação aritmética, isto é, o que é que o 3 está a fazer no primeiro membro ao y, está a multiplicar, então é a operação aritmética inversa que se utiliza, ou seja, está a multiplicar no primeiro membro passa para o segundo membro a dividir e aí sim obtém a solução correta da equação, neste caso 2. O mesmo acontece no exemplo anterior, dever-se-á pensar, o que é que o 5 está a fazer no primeiro membro da equação, está a subtrair ao 3y, então passará para o segundo a somar.

Esta situação acontece inúmeras vezes e poderá comprometer seriamente a continuidade do ensino e aprendizagem das equações e tudo o resto. Contudo, esta situação vai um pouco ao encontro de Kieran[318], que sugere que os alunos que usam o método da transposição não estão a operar as equações como objetos matemáticos mas sim a aplicar cegamente a regra: muda de membro, logo muda de sinal. Também Nabais[319] refere que ainda que os alunos possam aplicar cegamente regras de manipulação ou procedimentos que julgam ter compreendido, a ocorrência de raciocínios erróneos revela ausência de compreensão do significado matemático de equação.

A estratégia utilizada nesta fase de resolução das equações, passa por apelar ao interesse e à concentração do aluno, pelo que se deve utilizar uma estratégia fantasista em que os alunos acatem e acham graça à situação. Começo por chamar a atenção dos alunos para o facto de se estar a trabalhar uma equação dita normal, ou seja, simples, não há parênteses nem denominadores. Assim sendo, o primeiro passo a dar será o ***divórcio***, isto é, todos os termos com incógnita para o primeiro membro e todos os termos independentes (sem incógnita) para o segundo membro, no fundo existe uma separação de termos. Uma vez o divórcio efetuado, passa-se a

[318] Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NewYork: Macmillan, pp.390-419.
[319] Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.ºano*. Tese de Mestrado. (Universidade de Lisboa).

arrumação da casa, isto é, vamos simplificar ambos os membros da equação. Finalmente, passamos para o último passo que se designa por ***cambalhota***, uma vez que o coeficiente da incógnita passara para debaixo do termo que estará no segundo membro. Assim, pode constatar-se que se utilizam apenas três passos para resolver a equação.

De seguida, o professor deverá resolver várias equações do mesmo género a fim de consolidar os procedimentos de resolução das equações.

Resolvidas as equações, dever-se-á apresentar uma equação com parênteses. Aqui é necessário o aluno dominar a propriedade distributiva da multiplicação, o que normalmente não acontece, ou seja, o aluno ou não resolve, ou tem a tendência em multiplicar o primeiro fator que se encontra dentro dos parênteses. Aqui, o professor em vez de avançar, deverá fazer uma ressalva, ou seja, deverá trabalhar a propriedade distributiva da multiplicação. Por exemplo, o professor deverá apresentar quatro situações, que se passa a descrever:

1ª Situação: Desembaraça de parênteses e simplifica a seguinte expressão: $\mathbf{2}(-\mathbf{3}x+\mathbf{1})$.

Para resolvermos esta situação, vou pedir-vos que visualizem um ***cenário de guerra***. Isto é, vamos considerar o parênteses como sendo um *bunker* (esconderijo), onde permanecem lá dois vietnamitas (-3x e 1) e cá fora está um cambojano (2). Então, o cambojano quando entra no bunker vai disparar, no nosso caso multiplicar, para os dois vietnamitas e assim ficamos com -6x + 2. O professor deverá referenciar o erro habitual tomado pelos alunos, que, neste caso, será a tendência de multiplicar apenas o -3x, ficando a expressão -6x + 1, o que é de todo errado.

2ª Situação: Desembaraça de parênteses e simplifica a seguinte expressão: $-\frac{1}{2}(x-7)$.

A resolução desta situação passa pela estratégia anterior, ou seja, o cenário de guerra, sendo apenas os protagonistas diferentes, os vietnamitas passam a ser o x e -7, enquanto que $-\frac{1}{2}$ passará a ser o cambojano. Assim sendo, a expressão será $-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

3ª Situação: Desembaraça de parênteses e simplifica a seguinte expressão: $-(x-7)$.

Nesta situação, pode aplicar-se o mesmo cenário, embora em alguns casos o aluno não consega determinar todos os protagonistas, uma vez que observa apenas um sinal de "menos" fora dos parênteses e a primeira reação é onde está o cambojano? Não há?. Perante esta situação, o professor deverá perguntar ao aluno qual o coeficiente, ou o número que está a multiplicar, por exemplo ***-3x*** e qual o coeficiente que está a multiplicar, por exemplo ***x***. Poderá ainda alertar o aluno para o facto de quando aparece um sinal (-) ou um sinal (+), nunca surge sozinho, mas sim com um número associado. Assim sendo, neste caso apenas alteram-se os sinais, ficando c.

4ª Situação: Desembaraça de parênteses e simplifica a seguinte expressão: c.

Nesta situação, uma vez abordada a 3ª situação, tudo fica mais fácil, é com rapidez que o aluno constata que a expressão não sofre alteração, ficando $x-7$.

Convém referir que, estando a trabalhar com alunos que apresentam uma forma de memorização muito elevada, pode-se contudo explorar as duas últimas situações com a seguinte estratégia: Quando aparecer um sinal de "-", significa que há ***perigo***, ou seja, todos os sinais dos há que se encontram dentro do bunker alteram, caso contrário se houver um sinal "+", significa que se está no ***paraíso***, ou seja, nada altera.

É de referir, que se constatou nos alunos cegos uma maior tendência para a utilização da questão do perigo e do paraíso, ou seja, fazerem uso do seu poder de memorização.

Por último, irá trabalhar-se uma equação com parênteses e denominadores. Neste caso, o professor deverá alertar os alunos para a prioridade dos procedimentos a tomar. Assim, dever-se-á começar por desembaraçar de parênteses, em seguida igualar toda a equação ao mesmo denominador e depois eliminar todos os denominadores e aí ficar-se-á uma equação dita normal, ou seja, parte-se para o divórcio, depois a arrumação da casa e por fim, procede-se à cambalhota e claro está apresenta-se o conjunto-solução da equação.

Sugere-se então, a apresentação do seguinte esquema síntese das diferentes etapas de resolução de uma equação do 1.º grau a uma incógnita:

$$\frac{2(x-1)}{3}=\frac{3}{2}-\frac{x+1}{6}$$

1.º - Desembaraçar de parênteses (usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição).

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{3}=\frac{3}{2}-\frac{x+1}{6} \Leftrightarrow$$

2.º - Reduzir todos os termos ao mesmo denominador.
No exemplo temos que: m.m.c.(2; 3; 6) = 6.

$$\Leftrightarrow \frac{2\times(2x-2)}{6}=\frac{3\times 3}{6}-\frac{1\times(x+1)}{6}$$

3.º - Eliminam-se os denominadores de toda a equação.

$$\Leftrightarrow 2\times(2x-2)=3\times 3-1\times(x+1)$$

4.º - Desembaraçar de parênteses (usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição).("*Estratégia de guerra*")

$$\Leftrightarrow 4x-4=9-x-1 \Leftrightarrow$$

5.º - Passar todos os termos com incógnita para o 1º membro e para o 2º membro todos os termos que não têm incógnita, aplicando a regra prática da adição. ("*Divórcio*")

$$\Leftrightarrow 4x+x=9-1+4 \Leftrightarrow$$

6.º - Simplificar os termos semelhantes. ("*Arrumação da casa*")

$$\Leftrightarrow 5x=12 \Leftrightarrow$$

7.º - Dividir ambos os membros pelo valor que está a multiplicar pela incógnita. ("*Cambalhota*")

$$\Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$$

8.º - Escrever o conjunto-solução da equação.

$$S=\left\{\frac{12}{5}\right\}$$

Figura 96: As diferentes Etapas de resolução de uma equação do 1.º grau a uma incógnita

8.6 - *Word Problems*

Um dos aspetos fundamentais na aprendizagem da Álgebra diz respeito à transição da linguagem natural para a linguagem algébrica. Neste ponto, Kieran[320] apelida de *word problems* e subdivide-os em três campos:

I) Problemas tradicionais
II) Problemas de abordagem funcional
III) Problemas de generalização, de resposta aberta.

Os *word problems* tradicionais referem-se à elaboração de uma equação que represente uma relação. Nesta situação, formula-se uma equação envolvendo incógnitas e operações de acordo com algumas relações matemáticas, procede-se à resolução dessa equação, isolando a incógnita por meio de alguma manipulação algébrica, e determina-se o valor da incógnita.

Os problemas de abordagem funcional que, apesar não serem muito diferentes dos tradicionais *word problems*, o seu modo de apresentação e a abordagem de resolução são diferentes. De um modo geral, as relações entre duas variáveis neste tipo de problemas são estabelecidas antes da resolução do problema em particular. A expressão que representa essa mesma relação funcional torna explícita a interpretação do problema.

Nos problemas de generalização, a letra assume o papel de variável em regras relativas a relações numéricas, como por exemplo, o problema “Mostra que a soma de dois números inteiros consecutivos é sempre um número ímpar”.

[320] Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NewYork: Macmillan, pp.390-419.

Os autores Bednarz e Janvier[321] alertam para a importância da resolução de problemas no desenvolvimento do pensamento algébrico e no ensino da Álgebra. Nos problemas aritméticos, os alunos podem raciocinar de dados conhecidos para desconhecidos diretamente com um raciocínio aritmético ao passo que, a resolução de problemas algébricos requer um raciocínio com incógnitas. Estas autoras verificam que os alunos adotam preferencialmente estratégias Aritméticas na resolução de *word problems* e manifestam dificuldades em usar as equações para resolver este tipo de problemas. Também neste sentido, Van Ameron[322] refere que a resolução de problemas, segundo duas abordagens diferentes, pode causar dificuldades. Os alunos têm dificuldade em reconhecer a estrutura do problema de modo a representá-lo simbolicamente. Podem reconhecer o procedimento aritmético para determinar a solução, mas não conseguem raciocinar com as incógnitas. Para além disso, tendem a esquecer os seus conhecimentos informais à medida que aprendem Álgebra.

Numa investigação conduzida por Matos[323], numa turma com 27 alunos de idades compreendidas entre os treze e os dezasseis anos, desafiou alunos a trabalhar situações de carácter exploratório formulando problemas matemáticos no tópico das equações. Nesse mesmo estudo, a autora investiga o uso de linguagem algébrica na resolução de problemas e identifica que a resposta de uma aluna se baseia, sobretudo, na sua intuição sobre os efeitos das operações da adição e multiplicação decorrente das suas experiências anteriores em Aritmética. Na resolução de equações, consegue resolver equações do tipo aritmético por um processo intuitivo, mostrando compreender a noção de equação e reconhecer se um número é ou não solução, por substituição, no entanto, nesta fase, não consegue resolver equações do tipo algébrico. O processo de ensino e de aprendizagem engrandece com a utilização de tarefas de cunho exploratório.

[321] Bednarz, N., Janvier, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra*. Dordrecht: Kluwer, pp.115-136.
[322] Van Ameron, B. (2002). Reinvention of early algebra: The developmental research on the transition from arithmetic to algebra (Dissertation thesis, Freudhental Instituut, Utrecht). Retirado em 10 de outubro de 2014 de http://www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2002-1105-161148/inhoud.htm
[323] Matos, A. (2007). *Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Tese de mestrado. (Universidade de Lisboa).

Sobre a natureza das tarefas em sala de aula, Matos[324] afirma: "A resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo relações funcionais, e a sua discussão parecem assim ter contribuído de forma assinalável para o desenvolvimento de um significado mais rico da linguagem algébrica, nas suas diferentes utilizações, por parte dos alunos, promovendo o desenvolvimento do seu sentido de símbolo e a evolução do seu pensamento algébrico. As dificuldades que ocasionalmente continuam a manifestar comprovam, no entanto, que a compreensão dos fundamentos da álgebra é um processo lento, que não se esgota num só ano de escolaridade."

8.7 – Análise e reflexão das explorações dos alunos

8.7.1 – Evidências - Resolução da ficha de trabalho "*Equações I*"

A construção desta ficha de trabalho, tem como finalidade, dar início ao estudo da temática sobre Equações. Assim sendo, as quatro questões iniciais são de carácter exploratório, baseando-se em conhecimentos anteriormente adquiridos pelos alunos e destinam-se à introdução do conceito de equação, bem como de toda a terminologia intrínseca à mesma.

A questão 1, trata-se de uma questão de caris desafiadora, onde o aluno terá de reconhecer a incógnita, traduzi-la por meio de uma equação e permite ainda substanciar a noção de solução de uma equação. No que se refere à questão 2, apela-se à construção de igualdades numéricas verdadeiras, tendo como objetivo primordial a aplicação do significado de equivalência ao sinal de igual. Relativamente à questão 3, houve a necessidade de traduzir as figuras geométricas (triângulos

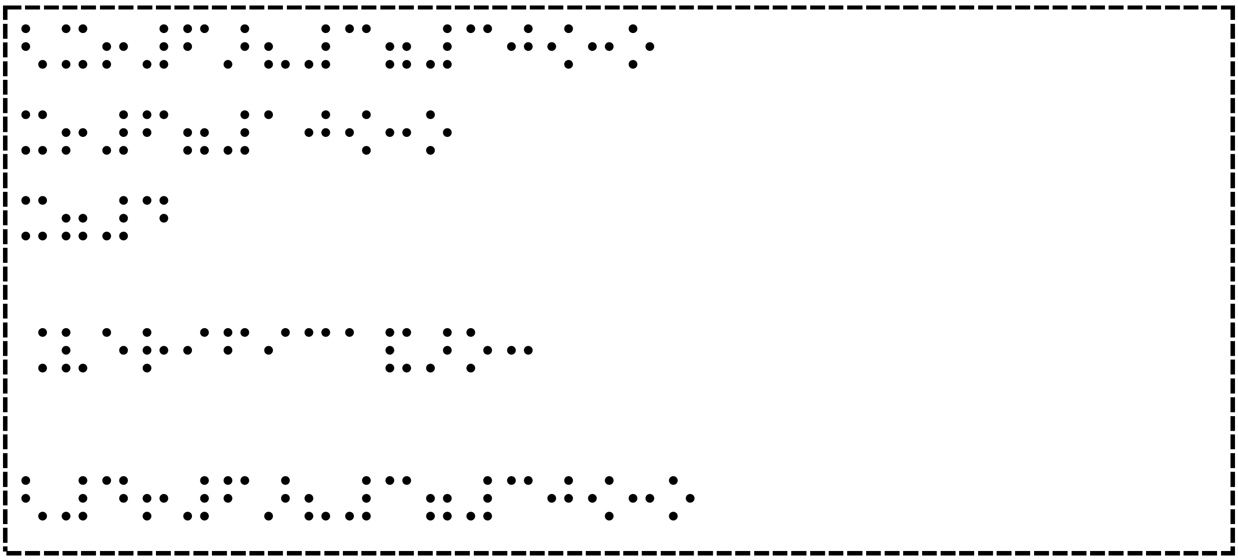
[324] Ibidem, pp.229-230.

equiláteros) para uma melhor compreensão do enunciado por parte do aluno, cria-se uma ligação com a geometria, o aluno terá de descobrir o valor a atribuir à incógnita de modo a obter igualdades numéricas verdadeiras. Na questão 4, existe novamente uma ligação à geometria, pretende-se que o aluno utilize os conhecimentos anteriormente adquiridos no que respeita às expressões algébricas. Pretende-se na alínea 4.1, que o aluno recorra a uma estratégia adequada para obter o valor correspondente à medida da largura e do comprimento do retângulo; enquanto que na alínea 4.2, refere a atribuição da letra L para dimensionar a medida da largura e obterem uma expressão matemática para a determinação do perímetro. Assim, através da expressão algébrica e do valor indicado na alínea 4.1, para o perímetro, deseja-se escrever uma equação e verificar a solução obtida na alínea 4.1.

No que diz respeito às duas últimas questões da ficha, existiu a necessidade de reformular o enunciado, uma vez que o enunciado original, na questão 5, as soluções encontravam-se dentro de quadrados e o aluno teria de colocar um círculo na solução correta, enquanto que na questão 6, o seu enunciado original apresenta-se na forma tabular, pelo que a estratégia de reformulação passou por transformar cada linha da tabela numa situação específica, neste caso situação A e B. No entanto, pretende-se com estas duas questões que haja uma efetiva consolidação de conhecimentos.

Evidências da questão 1 da ficha de trabalho – "*Equações I*"

Margarida



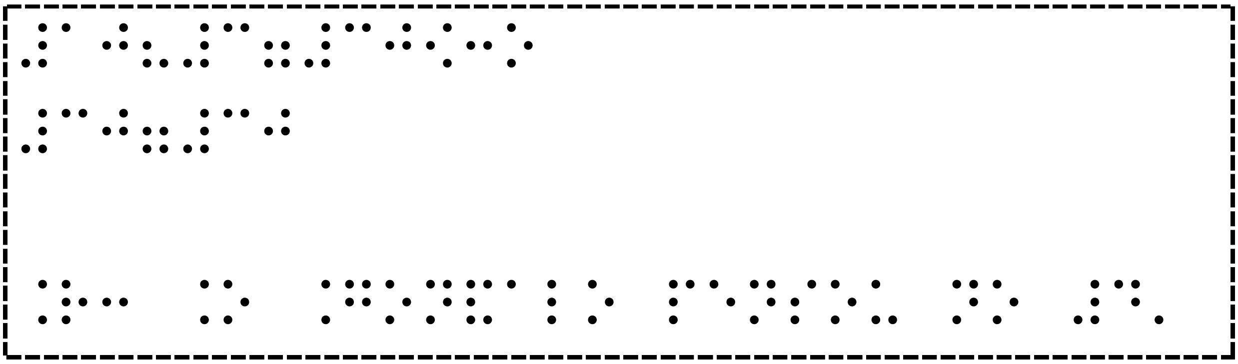


Figura 97: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

$(x + 6) \times 3 = 30 \Leftrightarrow$

$x + 6 = 10 \Leftrightarrow$

$x = 4$

Verificação:

$(4 + 6) \times 3 = 30 \Leftrightarrow$

$10 \times 3 = 30 \Leftrightarrow$

$30 = 30$

R: O Gonçalo pensou no 4.

Figura 97A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

A aluna apresenta uma estratégia interessante de resolver a equação, manifestando ter interpretado convenientemente o enunciado e equacionou exemplarmente o problema. Na resolução da equação manifestou ter compreendido o princípio de equivalência.

Rafael

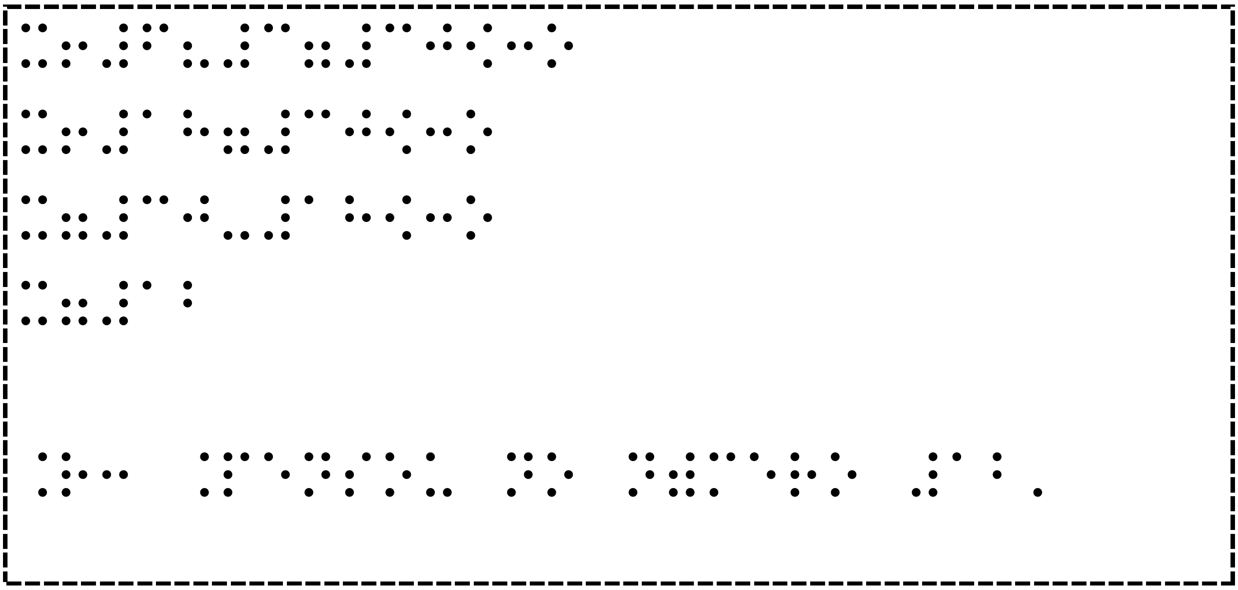


Figura 98: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

$x + 6 \times 3 = 30 \Leftrightarrow$

$x + 18 = 30 \Leftrightarrow$

$x = 30 - 18 \Leftrightarrow$

$x = 12$

R: Pensou no número 12.

Figura 98A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

Da análise do extrato de resolução do aluno, observa-se dificuldades ao nível da interpretação do enunciado e na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. Revela ter adquirido todo o processo de resolução de equações, embora a equação seja simples. Acresce-se ainda, a falta de verificação da solução encontrada, que permitiria ao aluno constatar que o resultado obtido era descontextualizado.

Pedro

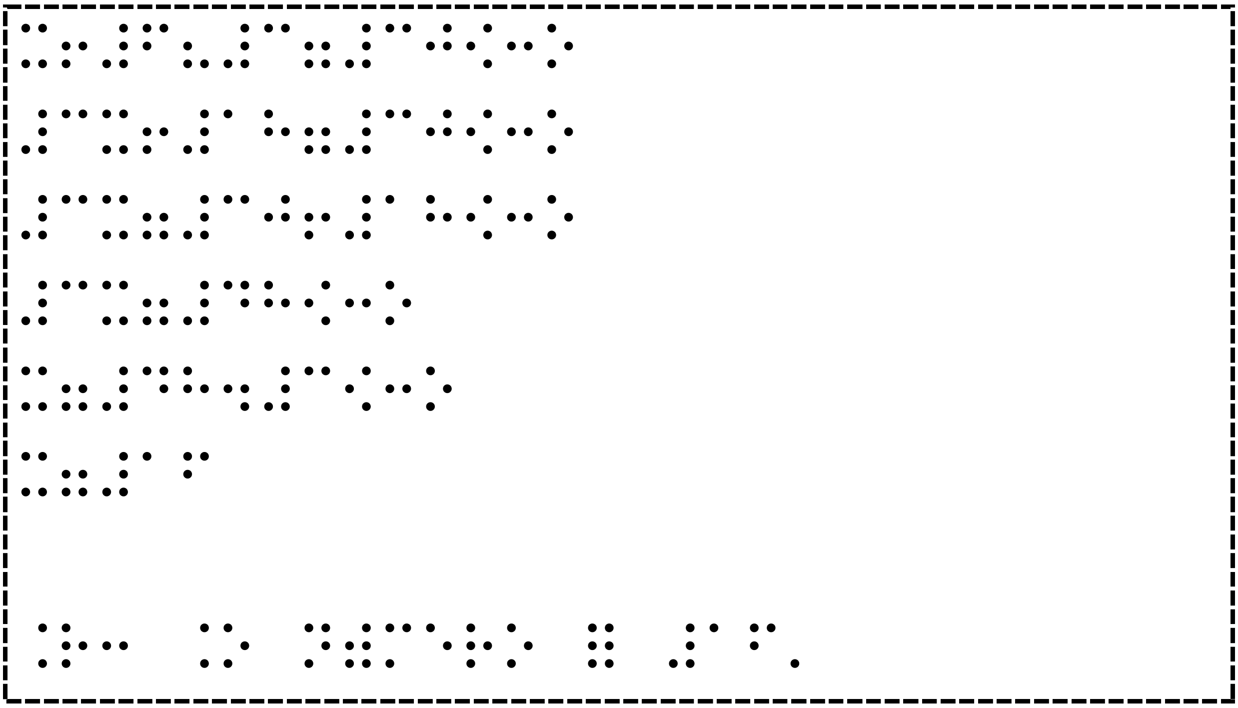


Figura 99: Extrato da resolução em Braille da questão 1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Pedro

$x + 6 \times 3 = 30 \Leftrightarrow$

$3x + 18 = 30 \Leftrightarrow$

$3x = 30 + 18 \Leftrightarrow$

$3x = 48 \Leftrightarrow$

$x = 48 \div 3 \Leftrightarrow$

$x = 16$

R: O número é 16.

Figura 99A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Pedro

O aluno Pedro manifesta entender a situação problemática. Contudo, erra na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, esquecendo-se de colocar os parênteses, tal como havia acontecido com o seu colega Rafael, no entanto aplica corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tomando deste modo um procedimento mental correto, embora tenha falhado no equacionamento do problema. Comete novamente outro erro, aquando da resolução da equação, na etapa da separação dos termos com incógnita e dos termos independentes ("*divórcio*"), o termo 18 que se encontra a somar no primeiro membro da equação passa para o segundo membro novamente a somar, em vez de passar a subtrair. Constata-se ainda, que na etapa correspondente ao isolamento da incógnita "*cambalhota*", o aluno concretiza corretamente. Também na efetua a verificação da solução obtida.

Evidências da questão 2 da ficha de trabalho – "*Equações I*"

Todos os alunos realizaram a questão corretamente através de um procedimento mental, no fundo acabaram por adotar, o que Kieran[325] apelida de abordagem intuitiva, que inclui estratégia relativa às propriedades dos números ou a abordagem de tentativa e erro.

É de referir que relativamente à questão 2.4, não deixa de ser curioso, uma vez que a questão corresponde à equação da questão 1, onde os alunos Pedro e Rafael falharam, pelas razões já expostas anteriormente, nesta situação ambos utilizaram o processo de raciocínio da sua colega Margarida, o que se comprova que muitas das vezes, a apresentação do enunciado de uma dada questão tem implicações na seleção do processo de resolução da mesma.

[325] Kieran, C. (2006). *Research on the learning and teaching of algebra*. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, pp.11-49.

Evidências da questão 3.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*"

Margarida

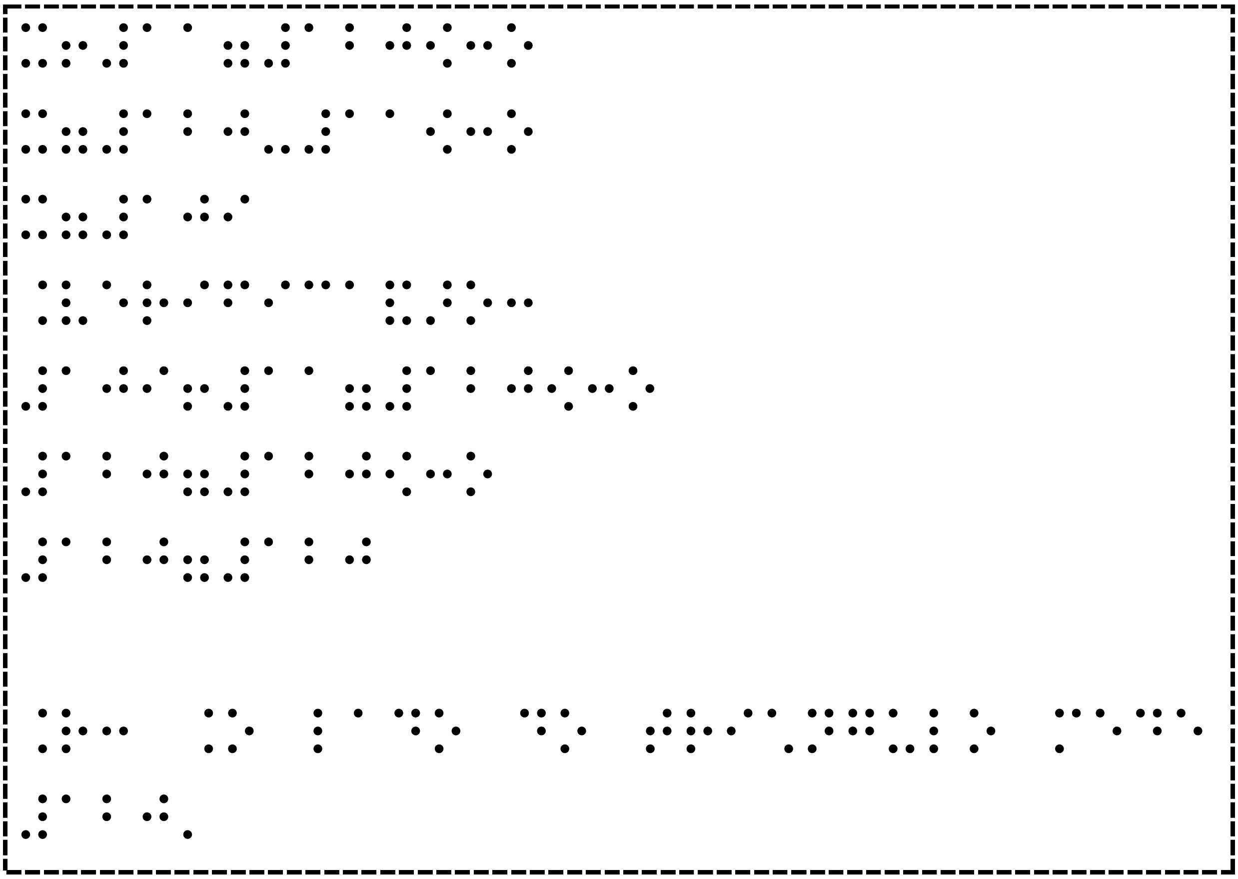


Figura 100: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

$x + 11 = 120 \Leftrightarrow$

$x = 120 - 11 \Leftrightarrow$

$x = 109$

Verificação:

$109 + 11 = 120 \Leftrightarrow$

$120 = 120 \Leftrightarrow$

120 = 120

R: O lado do triângulo mede 120.

Figura 100A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

Como se pode observar, a aluna apenas comete um erro, na resposta ao problema. Trata-se apenas, de uma questão de desconcentração, que não deixa de ser natural e muito comum, na medida em que faz a verificação e obtém 120 = 120 e ao perceber que está perante um triângulo equilátero, todos os lados vão ter como medida o valor 120, responde à medida do lado (x+11) e não ao valor da incógnita, o que efetivamente lhe era pedido.

Rafael

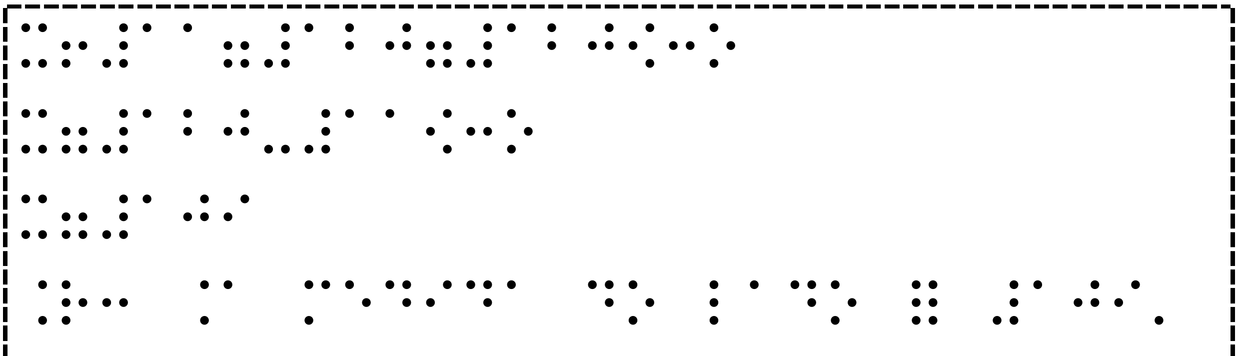


Figura 101: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

$x + 11 = 120 = 120 \Leftrightarrow$

$x = 120 - 11 \Leftrightarrow$

$x = 109$

R: A medida do lado é 109.

Figura 101A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

É muito comum aparecer neste tipo de problemas, representações do tipo (x + 11 = 120 = 120 $\Leftrightarrow$), devido à necessidade que o aluno tem em exprimir, neste caso, que é conhecedor da definição de triângulo equilátero, esquece-se no entanto, que deixa de estar presente uma igualdade e passa a estar duas, deixando desde logo de ter uma equação. Todavia, no segundo passo, revela que deve estar perante uma igualdade apenas, e que deverá levar consigo uma incógnita, demonstra desta forma ter noção de equação, apenas comete o erro, devido à expressa necessidade de demonstrar que sabe o que é um triângulo equilátero.

Pedro

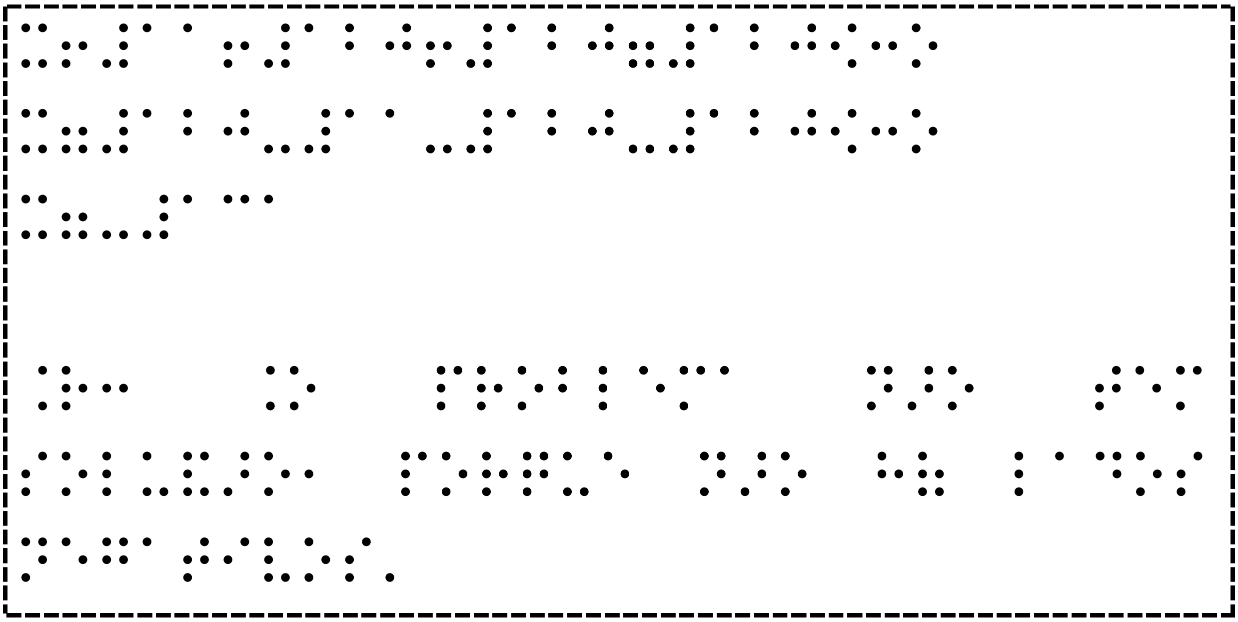


Figura 102: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Pedro

x + 11 + 120 + 120 = 120 $\Leftrightarrow$

x = 120 – 11 -120 - 120 $\Leftrightarrow$

x = -131

R: O problema não tem solução, porque não há lados negativos.

Figura 102A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Pedro

Da observação do extrato da resolução, constata-se que o aluno revelou dificuldades na compreensão do enunciado do problema, daí não ter equacionado convenientemente, pelo que lhe foi perguntado ao aluno qual o raciocínio efetuado por ele, tendo respondido que não sabia ao certo o que era um triângulo equilátero, que julgava que a soma dos três lados tinha de dar 120, por que os outros eram 120. Da resposta do aluno, não se consegue retirar nenhuma ilação, a não ser que desconhece o significado de triângulo equilátero. Contudo, observa-se que soube resolver corretamente a equação e concluiu que o resultado obtido é um absurdo, não havendo assim, necessidade de verificação da solução encontrada.

<u>Evidências da questão 3.2 da ficha de trabalho – "*Equações I*"</u>

Margarida

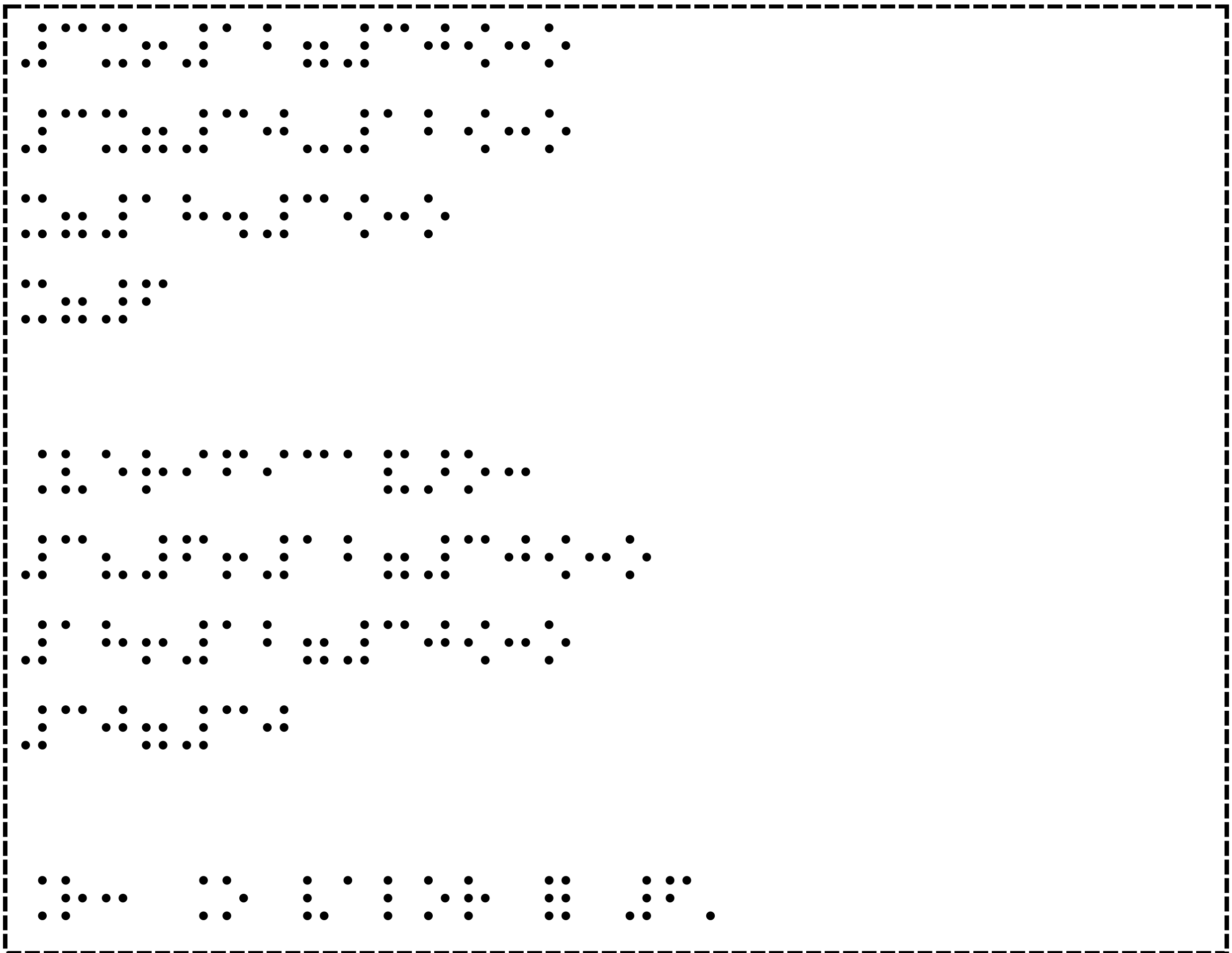


Figura 103: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

$3x + 12 = 30 \Leftrightarrow$

$3x = 30 - 12 \Leftrightarrow$

$x = 18 \div 3 \Leftrightarrow$

$x = 6$

Verificação:

$3 \times 6 + 12 = 30 \Leftrightarrow$

$18 + 12 = 30 \Leftrightarrow$

$30 = 30$

R: O valor é 6.

Figura 103A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

Como se pode observar, a aluna resolveu corretamente a questão. Desta vez, respondeu ao que lhe era pedido.

Rafael

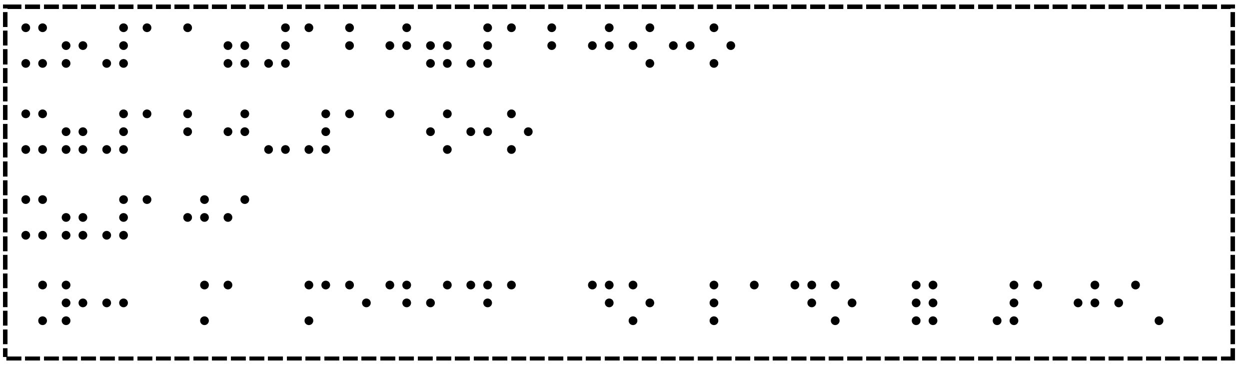


Figura 104: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

$3x + 12 = 30 \Leftrightarrow$

$x = (30 - 12) \div 3 \Leftrightarrow$

$x = 9$

R: O x é 9.

Figura 104A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

Verifica-se que o aluno equacionou e resolveu corretamente o problema, mas cometeu um erro de cálculo na divisão de 18 por 3. Mais uma vez, não verificou o resultado obtido. Assim sendo, foi chamado à atenção pelas sucessivas faltas de verificação, pois se as tivesse concretizado, possivelmente alertá-lo-ia de que o resultado não corresponderia à solução do problema. O aluno aceitou a chamada de atenção, tendo mesmo jurado que a partir daquele momento iria fazer sempre a verificação da solução obtida.

Pedro

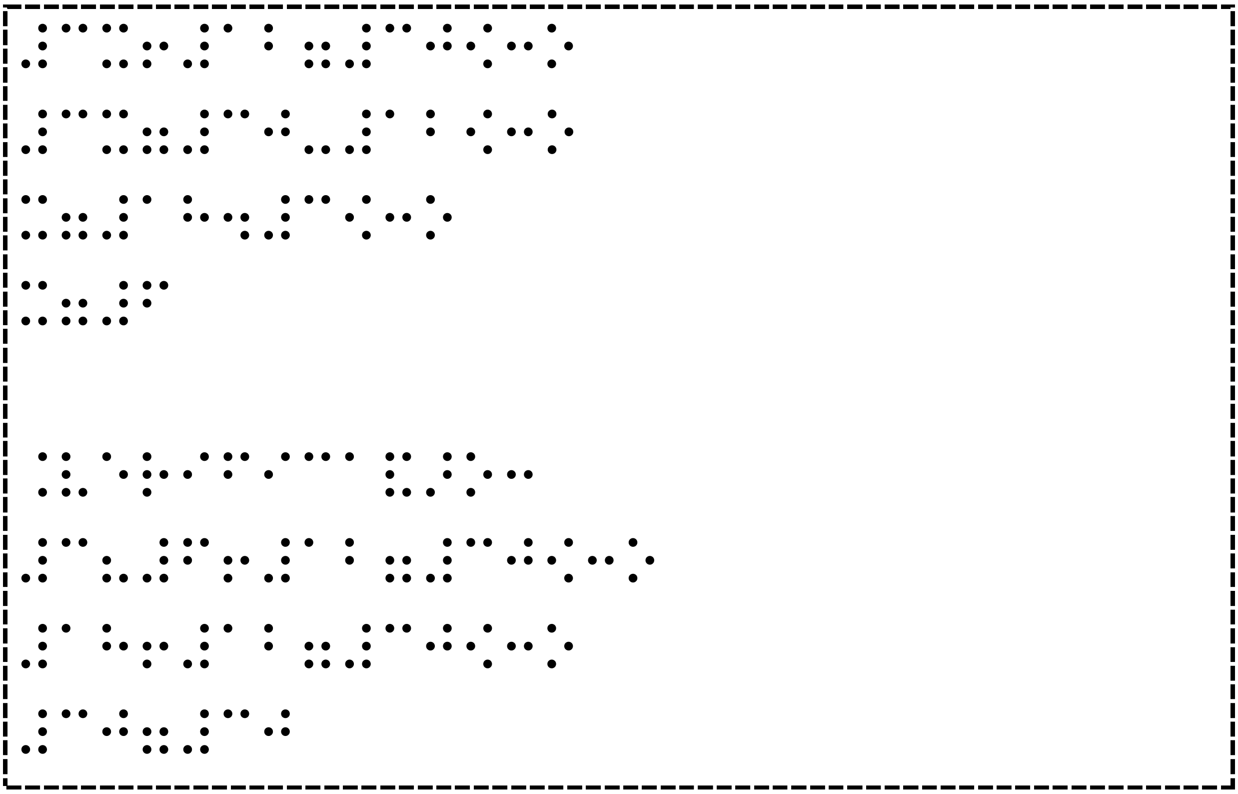


Figura 105: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 da ficha de trabalho – “*Equações I*” do aluno Pedro

$3x + 12 = 30 \Leftrightarrow$

$3x = 30 - 12 \Leftrightarrow$

$x = 18 \div 3 \Leftrightarrow$

$x = 6$

Verificação:

$3 \text{ x } 6 + 12 = 30 \Leftrightarrow$

$18 + 12 = 30 \Leftrightarrow$

$30 = 30$

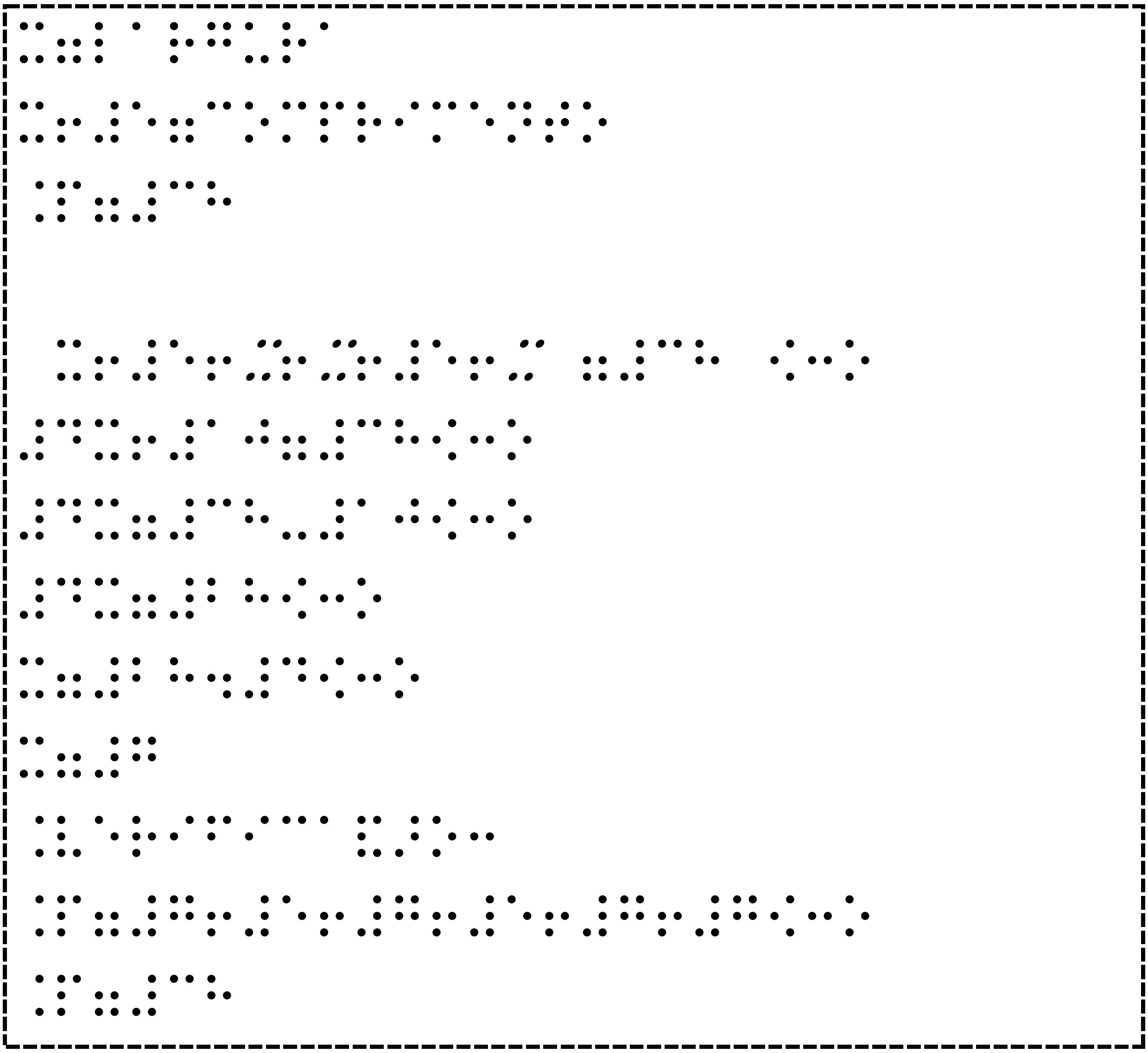
Figura 105A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 da ficha de trabalho – “*Equações I*” do aluno Pedro

Através da observação do extrato de resolução percebe-se que o aluno entendeu o problema, o mesmo não aconteceu no problema anterior. Apenas não respondeu à questão.

Deve-se ter em conta que, aquando da resolução da questão 3.2, já se tinha feito a identificação dos erros e devidamente corrigidos cometidos na questão 3.1.

<u>Evidências da questão 4.1 da ficha de trabalho – "*Equações I*"</u>

Margarida



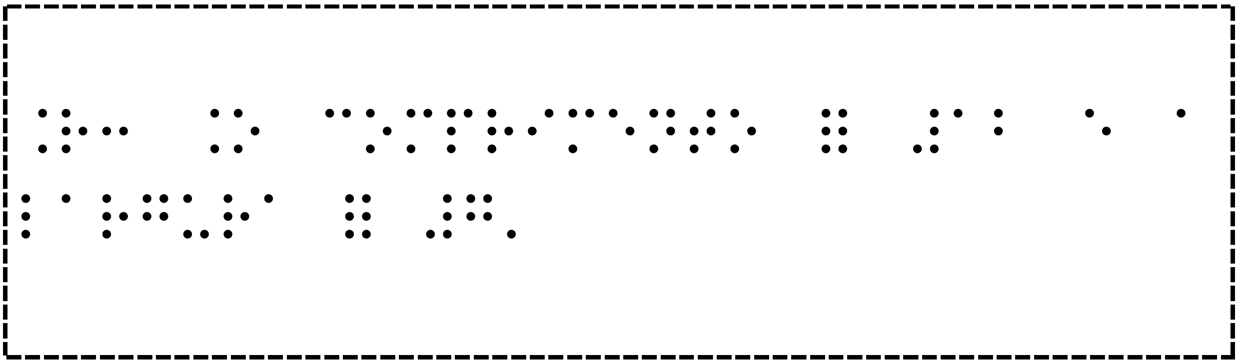


Figura 106: Extrato da resolução em Braille da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

x = largura

$x + 5$ = comprimento

$P = 38$

$x + 5 + x + x + 5 + x = 38$

$4x + 10 = 38 \Leftrightarrow$

$4x = 38 - 10 \Leftrightarrow$

$4x = 28 \Leftrightarrow$

$x = 28 \div 4 \Leftrightarrow$

$x = 7$

Verificação:

$P = 7 + 5 + 7 + 5 + 7 + 7 \Leftrightarrow$

$P = 38$

R: O comprimento é 12 e a largura é 7.

Figura 106A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

Como se pode observar, a aluna demonstra um bom domínio ao nível da resolução de problemas. Compreendeu com facilidade todo o processo de ensino desenvolvido em contexto de sala de aula, tendo mesmo o cuidado de começar o problema dimensionando as variáveis em causa, fundamental para a construção de todo o raciocínio inerente ao mesmo. Resolve corretamente a equação e tem a preocupação de fazer a respetiva verificação da solução. A aluna revela que compreendeu com facilidade a resolução de problemas.

Rafael

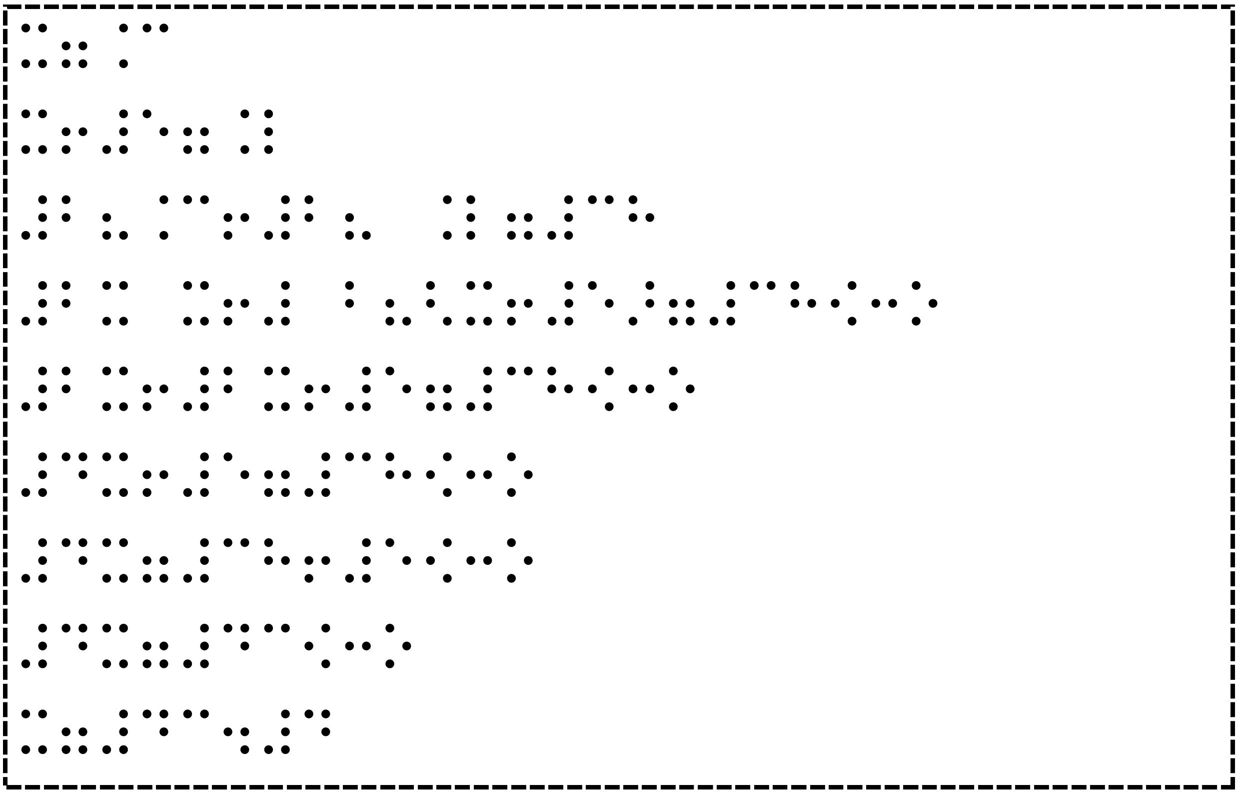


Figura 107: Extrato da resolução em Braille da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

x = C

x + 5 = L

2 x C + 2 x L = 38

2 x x + 2 x (x+ 5) = 38 $\Leftrightarrow$

$2x + 2x + 5 = 38 \Leftrightarrow$

$4x + 5 = 38 \Leftrightarrow$

$4x = 38 + 5 \Leftrightarrow$

$4x = 43 \Leftrightarrow$

$x = 43 \div 4$

Figura 107A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

O Rafael começa por dimensionar as variáveis de forma errada. Contudo, fê-lo, embora incorretamente. Revela um bom pensamento algébrico e um bom domínio de expressões algébricas, opta por utilizar uma expressão simplificada do perímetro, não se limita a somar todos os lados do retângulo. Em seguida, comete novamente um erro, aquando da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, erro muito comum e que já foi referido nesta investigação em questões analisadas anteriormente. Volta mais uma vez, a cometer um erro, naquilo que Kieran caracteriza por transposição, ou seja, mudança de membro, mudança de sinal.

Todavia, observa a solução obtida e constata de forma repentina, ser impossível a solução obtida para o problema. Chama o professor e pergunta: "*Há qualquer coisa que não está bem, não é?", pelo que o professor responde: - Observo vários erros, o melhor será verificares toda a resolução, desde o início.*". O aluno começa a olhar para a sua folha de resposta e diz: "*Vou começar de novo*".

Passa-se então a apresentar o extrato da nova resolução do aluno Rafael:

Rafael

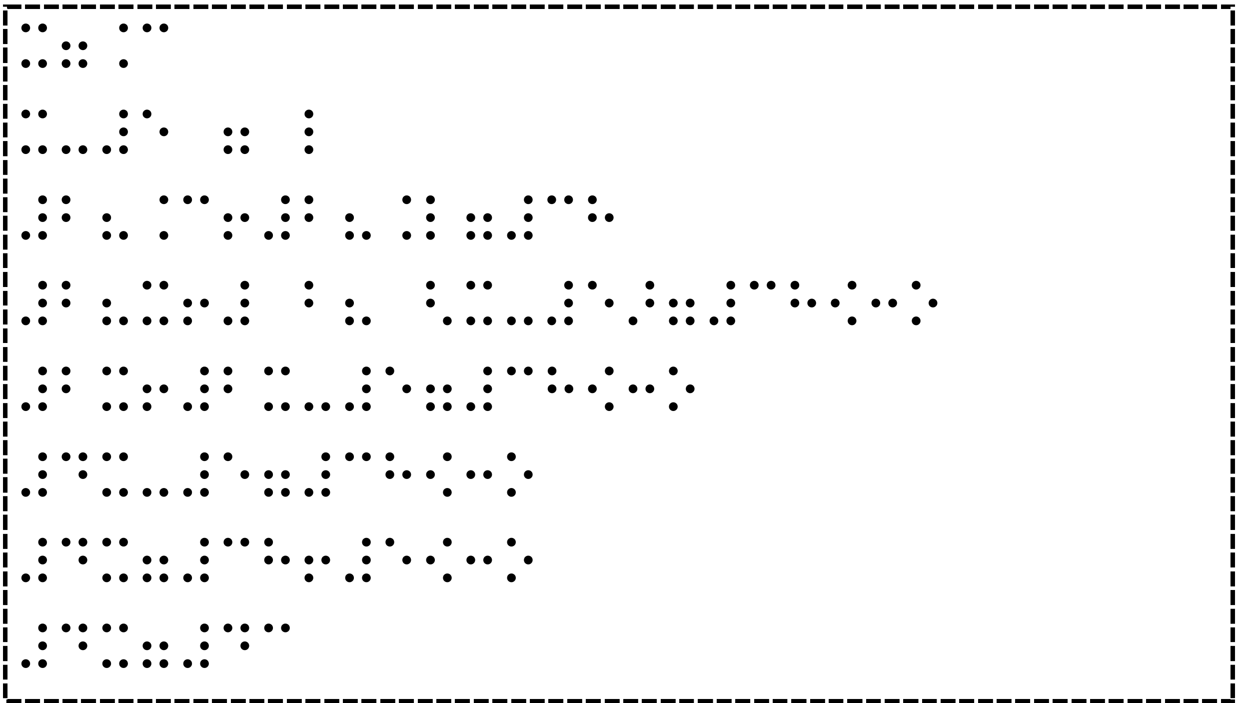


Figura 108: Extrato da nova resolução em Braille da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

x = C

x - 5 = L

2 x C + 2 x L = 38

2 x x + 2 x (x - 5) = 38 ⇔

2x + 2 x - 5 = 38 ⇔

4x - 5 = 38 ⇔

4x = 38 + 5⇔

4x = 43

x = 43 ÷ 4

Figura 108A: Transcrição do extrato da nova resolução da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

Depois de resolver novamente o problema, o aluno comenta: "*Estou a ficar doido professor, fiz várias alterações e o resultado é o mesmo*."

Na nova resolução constata-se situações interessantes:

1ª – O aluno verificou e dimensionou corretamente as variáveis, depois de várias leituras do enunciado;

2ª – Teve o cuidado de modificar a equação do problema;

3ª - Não identificou o erro cometido na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação;

4ª – Identificou o erro cometido na transposição de termos.

5ª – A solução do problema manteve-se, o que não deixa de ser caricato.

Em suma, o aluno identificou todos os erros cometidos tendo procedido à sua correção, à exceção da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação. Para a disparidade revelada nas duas resoluções terão contribuído a ansiedade e a falta de atenção.

Pedro

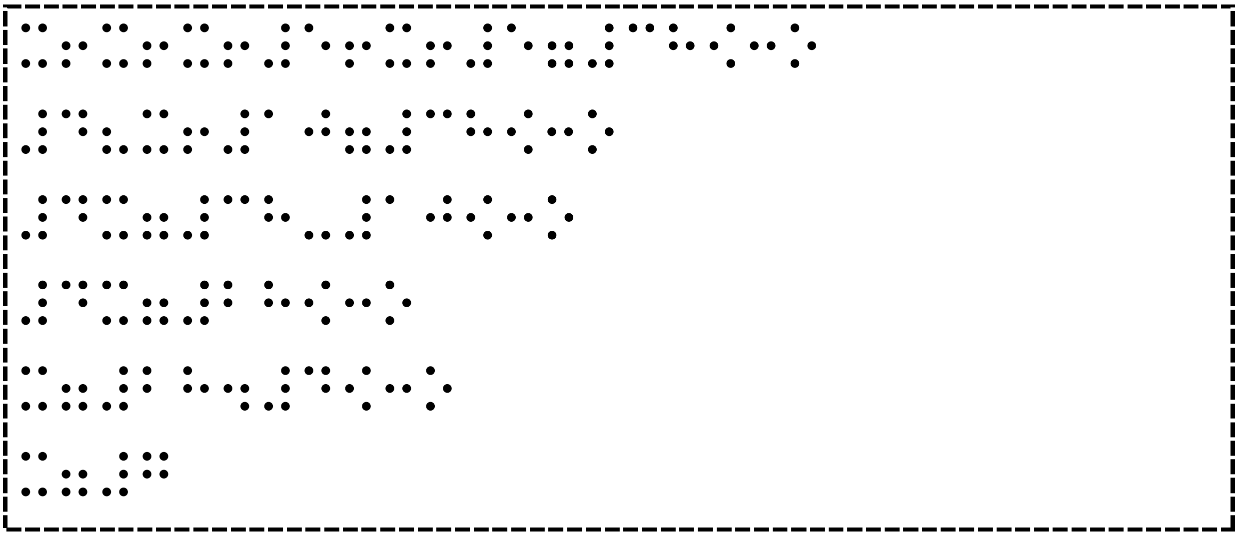


Figura 109: Extrato da resolução em Braille da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Pedro

$x + x + x + 5 + x + 5 = 38 \Leftrightarrow$

$4 \times x + 10 = 38 \Leftrightarrow$

$4x = 38 - 10 \Leftrightarrow$

$4x = 28 \Leftrightarrow$

$x = 28 \div 4 \Leftrightarrow$

$x = 7$

Figura 109A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Pedro

Relativamente ao extrato da resolução realizada pelo aluno Pedro, não se pode constatar que o aluno tenha compreendido integralmente o problema. Primeiro, por não identificar as variáveis em causa e segundo, por não apresentar uma resposta ao problema, fruto do não dimensionamento das mesmas. Constata-se assim, que o aluno sabe que está a trabalhar com duas dimensões, daí ter equacionado corretamente o problema e que adquiriu o processo de resolução de equações.

<u>Evidências da questão 5 da ficha de trabalho – "*Equações I*"</u>

Margarida

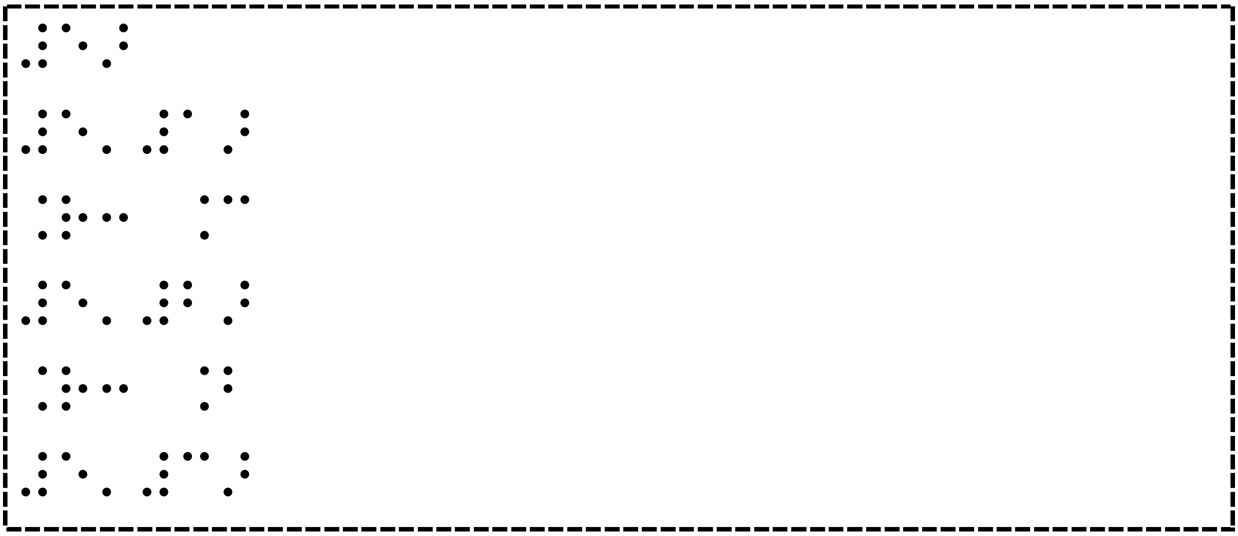


Figura 110: Extrato da resolução em Braille da questão 5 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

5)

5.1)

R: C

5.2)

R: B

5.3)

R: B

Figura 110A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 da ficha de trabalho – "*Equações I*" da aluna Margarida

Rafael

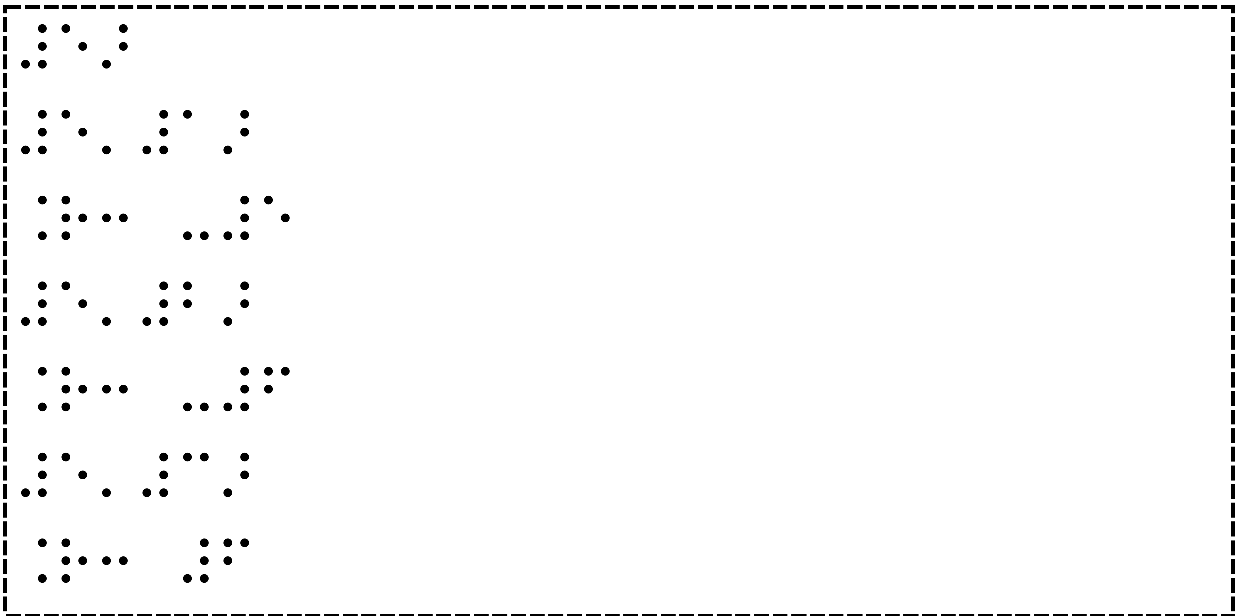


Figura 111: Extrato da resolução em Braille da questão 5 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

5)

5.1)

R: -5

5.2)

R: -6

5.3)

R: 6

Figura 111A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 da ficha de trabalho – “*Equações I*” do aluno Rafael

Pedro

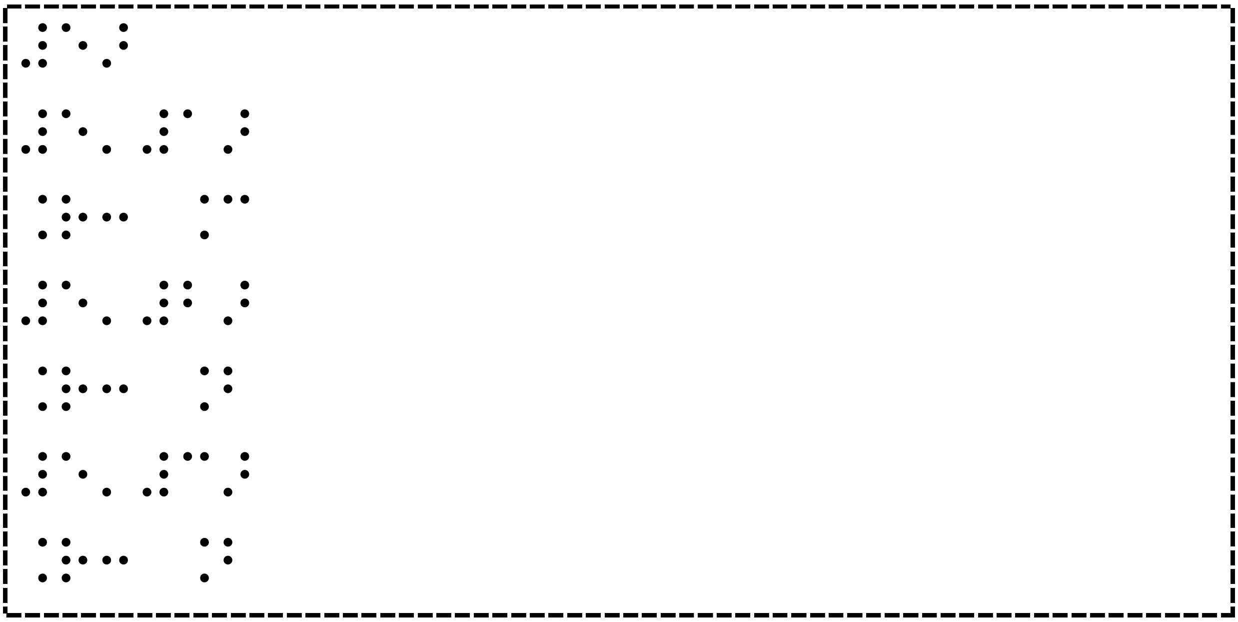


Figura 112: Extrato da resolução em Braille da questão 5 da ficha de trabalho – “*Equações I*” do aluno Pedro

5)

5.1)

R: C

5.2)

R: B

5.3)

R: B

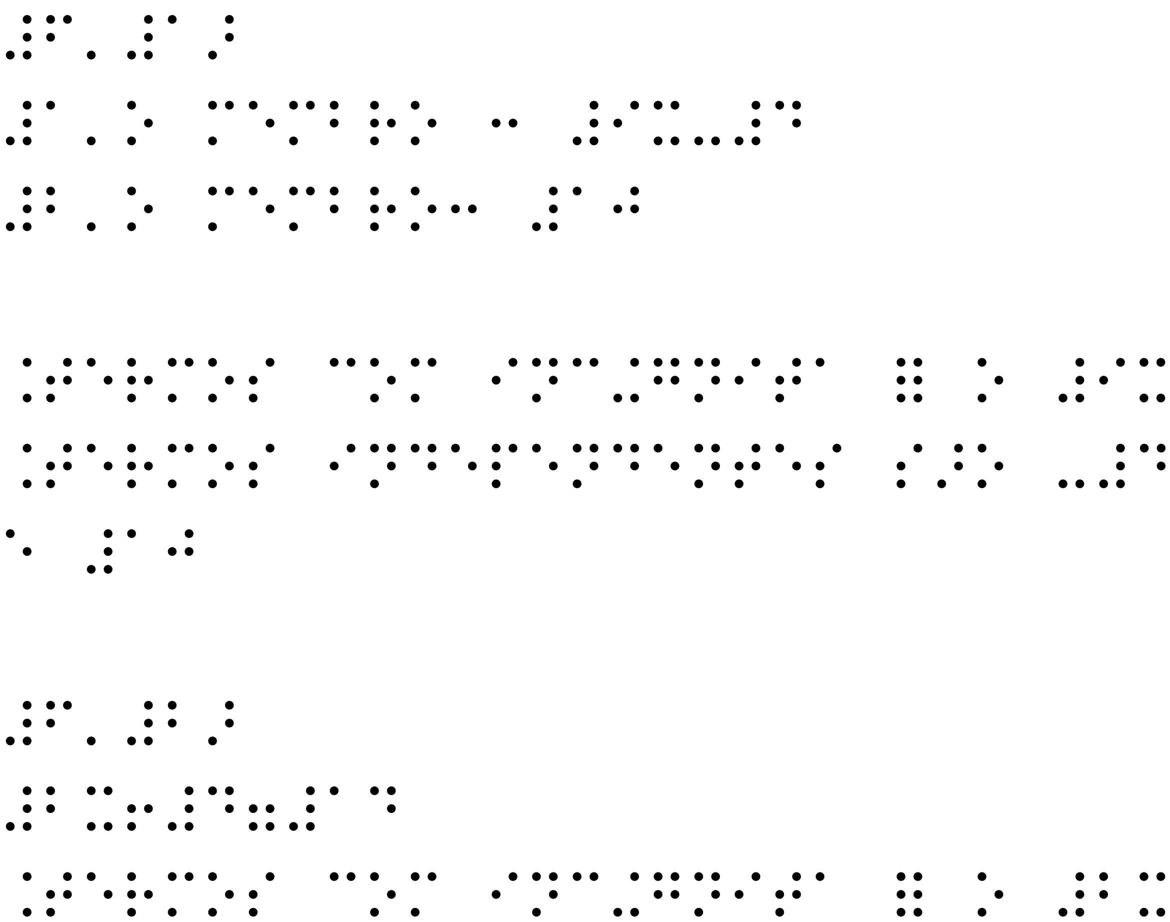
Figura 112A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 da ficha de trabalho – “*Equações I*” do aluno Pedro

Na resolução da questão 5, todos os alunos responderam corretamente às alíneas, não revelando dificuldades em resolvê-las, mas curiosamente todos resolveram aritmeticamente, e quando questionados do motivo pela qual optaram resolver dessa forma, os alunos foram unanimes a responder, que foi mais rápido e os números eram pequenos.

<u>Evidências da questão 6 da ficha de trabalho – "*Equações I*"</u>

Margarida

6)



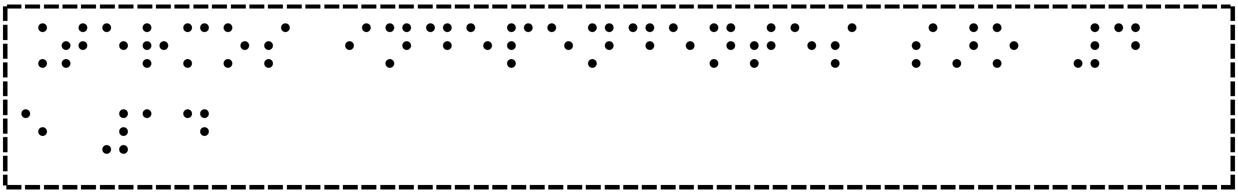


Figura 113: Extrato da resolução em Braille da questão 6 da ficha de trabalho – “*Equações I*” da aluna Margarida

6)

6.1)

1.º membro – 9x – 4

2.º membro – 10

Termos com incógnita é o 9x

Termos independentes são -4 e 10

6.2)

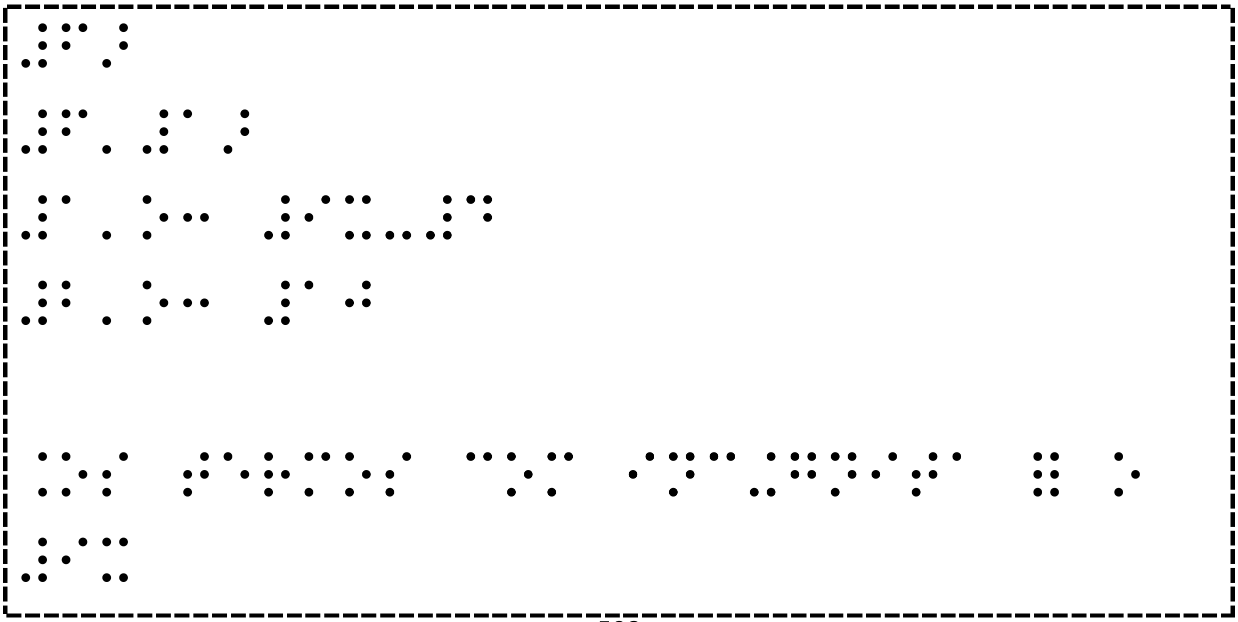
2x + 4 = 14

Termos com incógnita é o 2x

Termos independentes são 4 e 14

Figura 113A: Transcrição do extrato da resolução da questão 6 da ficha de trabalho – “*Equações I*” da aluna Margarida

Rafael



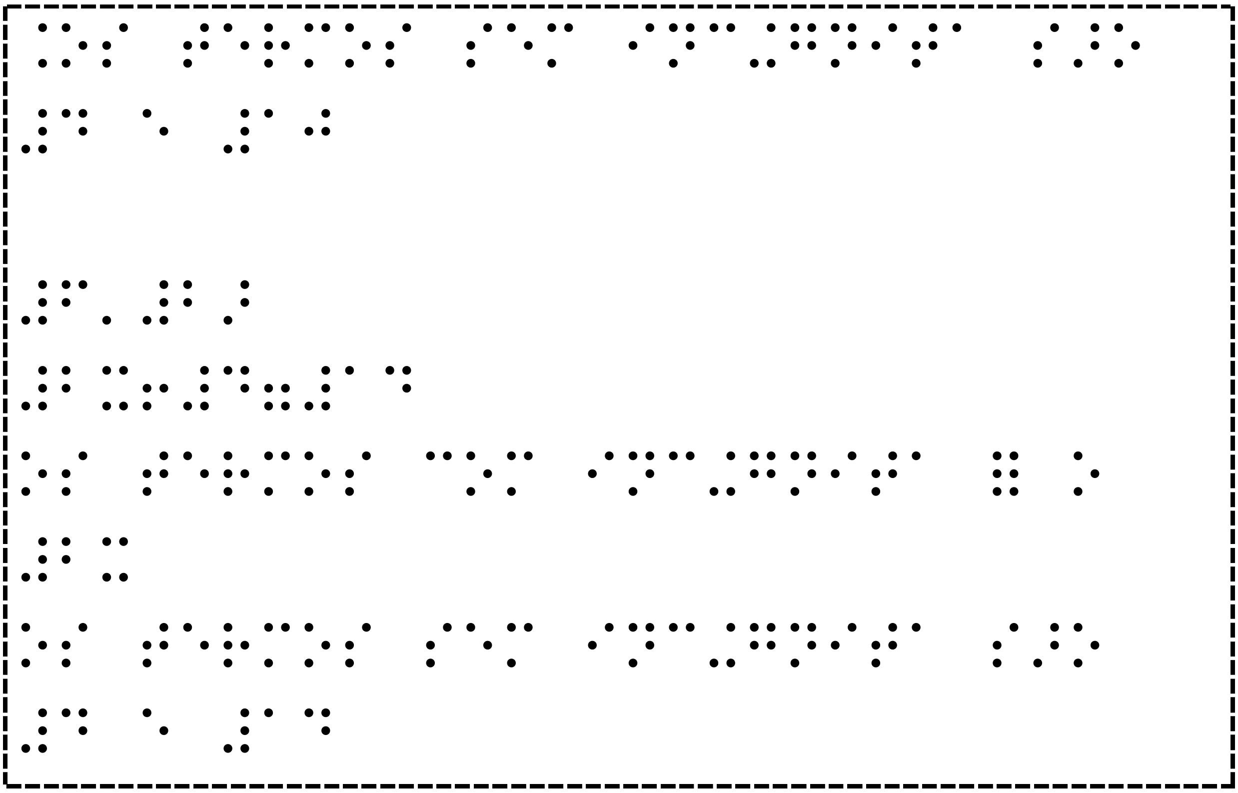


Figura 114: Extrato da resolução em Braille da questão 6 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

6)

6.1)

1.º: 9x – 4

2.º: 10

Os termos com incógnita é o 9x

Os termos sem incógnita são 4 e 10

6.2)

2x + 4 = 14

Os termos com incógnita é o 2x

Os termos sem incógnita são 4 e 14

Figura 114A: Transcrição do extrato da resolução da questão 6 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Rafael

Pedro

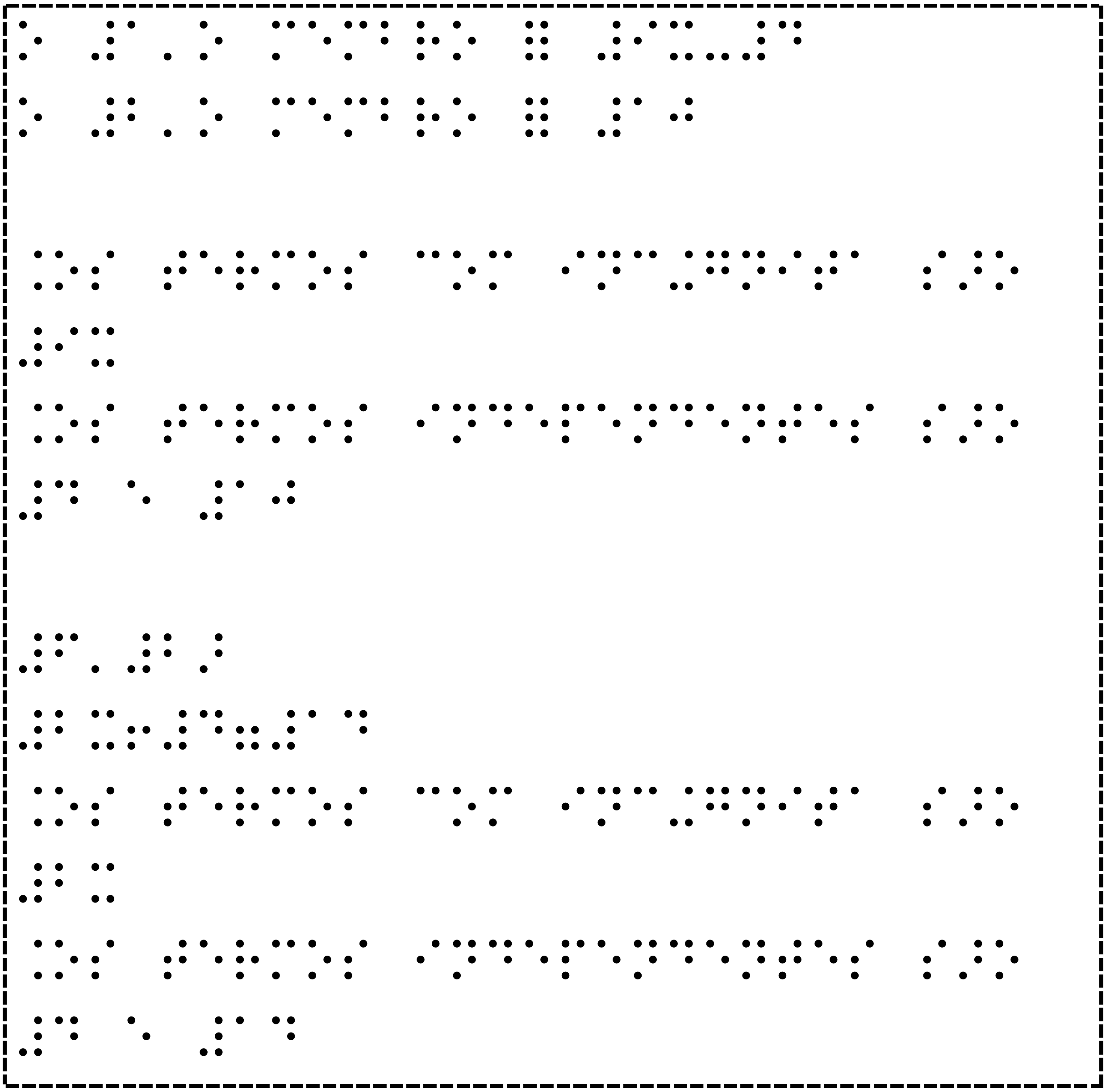


Figura 115: Extrato da resolução em Braille da questão 6 da ficha de trabalho – “*Equações I*” do aluno Pedro

6.1)

O 1.º membro é 9x - 4

O 2.º membro é10

Os termos com incógnita são 9x

Os termos independentes são 4 e 10

6.2)

2x + 4 = 14

Os termos com incógnita são 2x

Os termos independentes são 4 e 14

Figura 115A: Transcrição do extrato da resolução da questão 6 da ficha de trabalho – "*Equações I*" do aluno Pedro

É de salientar que os alunos não manifestaram dificuldades na resolução da questão 6, contudo, tanto o aluno Rafael como o aluno Pedro cometeram o mesmo erro ao definirem os termos independentes, não tendo ambos considerado que um dos termos independentes é -4 e não 4.

8.7.2 – Evidências - Resolução da ficha de trabalho "*Resolução de problemas envolvendo Equações*"

A ficha de trabalho é composta por três problemas, em que se espera que os alunos interpretem corretamente o enunciado, traduzam a situação por meio de uma equação, e que a resolvam, analisando a solução de acordo com o problema em questão.

Evidências do problema 1 da ficha de trabalho – "*Resolução de problemas*"

Neste problema é apresentada uma situação problemática, na qual existe um encadeamento de operações. Pretende-se com este problema, que os alunos traduzam a situação para linguagem algébrica, através de uma equação, e que a utilizem para responder à questão do problema.

Margarida

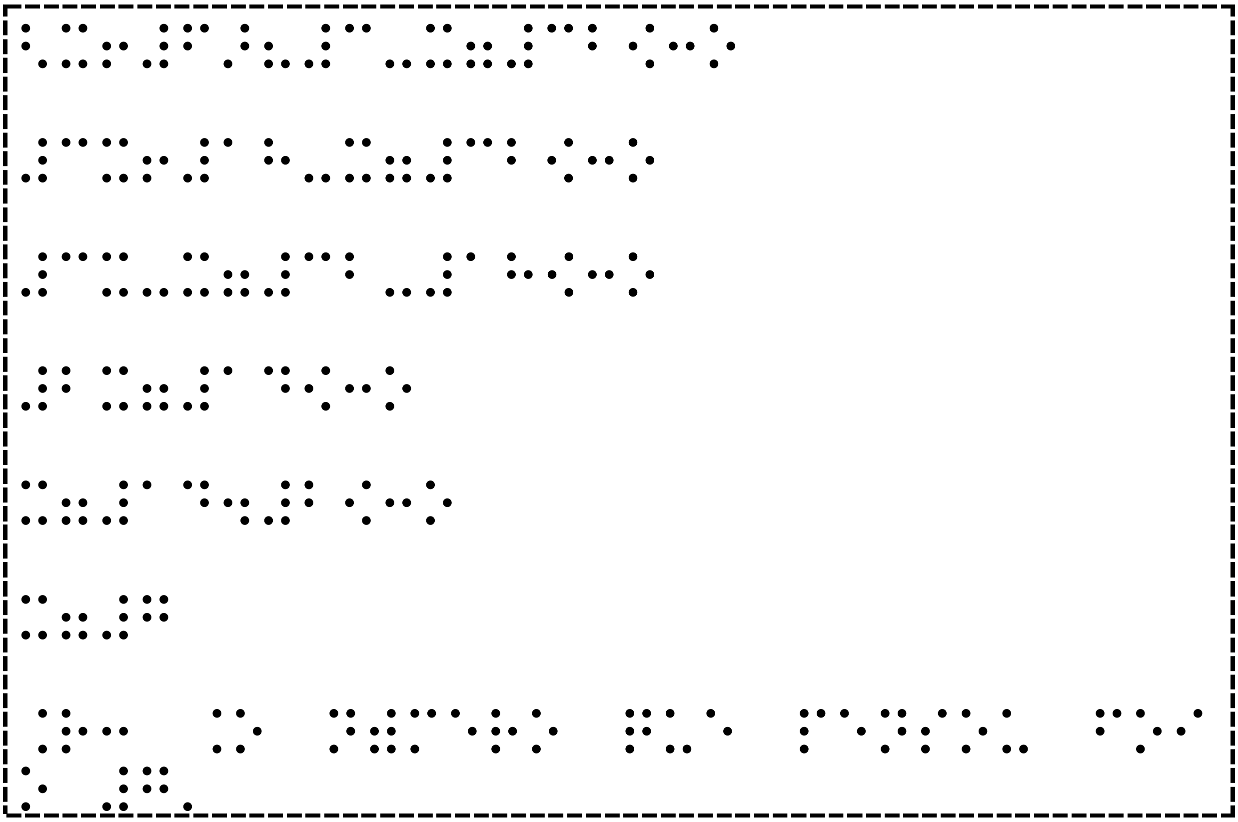


Figura 116: Extrato da resolução em Braille do problema 1 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" da aluna Margarida

$(x + 6) \times 3 - x = 32 \Leftrightarrow$

$3x + 18 - x = 32 \Leftrightarrow$

$3x - x = 32 - 18 \Leftrightarrow$

$2x = 14 \Leftrightarrow$

$x = 14 \div 2 \Leftrightarrow$

$x = 7$

R: O número que pensou foi o 7.

Figura 116A: Transcrição do extrato da resolução do problema 1 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” da aluna Margarida

Nesta questão, a aluna Margarida, tal como havia acontecido, aquando da resolução da questão 1 da ficha de trabalho – Equações I, não revelou quaisquer dificuldades na compreensão do enunciado do problema, na tradução do mesmo para linguagem algébrica, nem na análise da solução da situação problemática.

Rafael

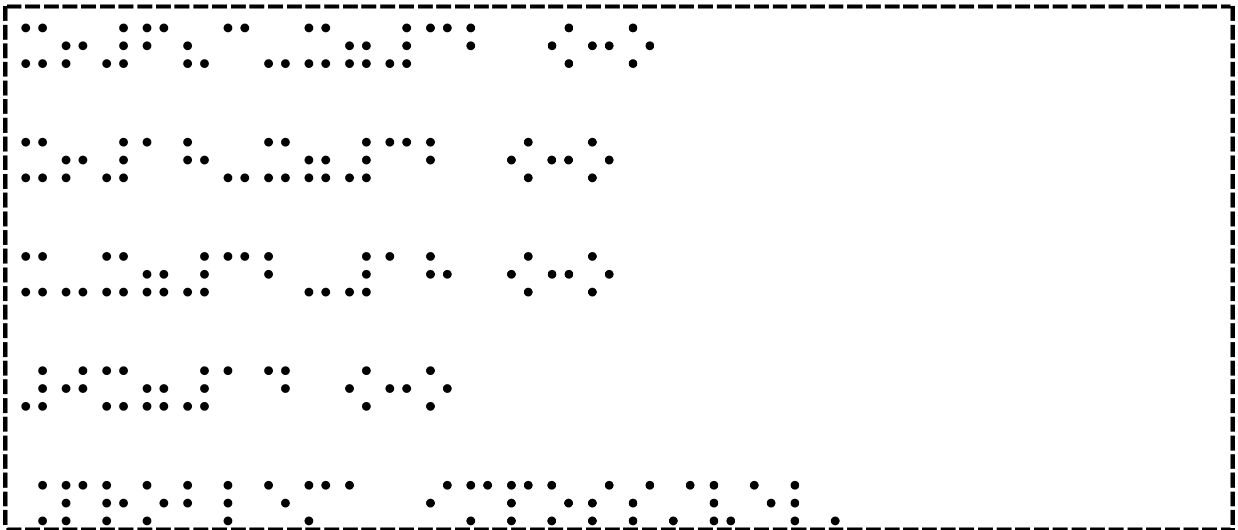


Figura 117: Extrato da resolução em Braille do problema 1 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Rafael

$x + 6 \times 3 - x = 32 \Leftrightarrow$

$x + 18 - x = 32 \Leftrightarrow$

$x - x = 32 - 18 \Leftrightarrow$

$0x = 14 \Leftrightarrow$

Problema impossível.

Figura 117A: Transcrição do extrato da resolução do problema 1 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Rafael

Na resolução do aluno Rafael pode verificar-se que compreendeu o enunciado do problema, no entanto, relativamente à tradução para linguagem algébrica o aluno, tal como havia acontecido na resolução da questão 1 da ficha de trabalho – Equações I comete um erro, quando, ao escrever a equação não faz uso de parênteses, o que a leva, inevitavelmente, a uma resolução incorreta e a uma resposta errada ao problema. Contudo, reconhece a prioridade das operações e mais uma vez se constata, que o aluno percebeu todo o processo de resolução de uma equação e embora não seja a solução correta, o aluno identifica que está perante uma equação impossível, manifestando deste modo a compreensão relativamente à classificação de equações. É de referir que o aluno tem o cuidado de aplicar a estratégia ensinada na aula, ou seja, à medida que vai retirando os dados do enunciado vai escrevendo a equação.

Pedro

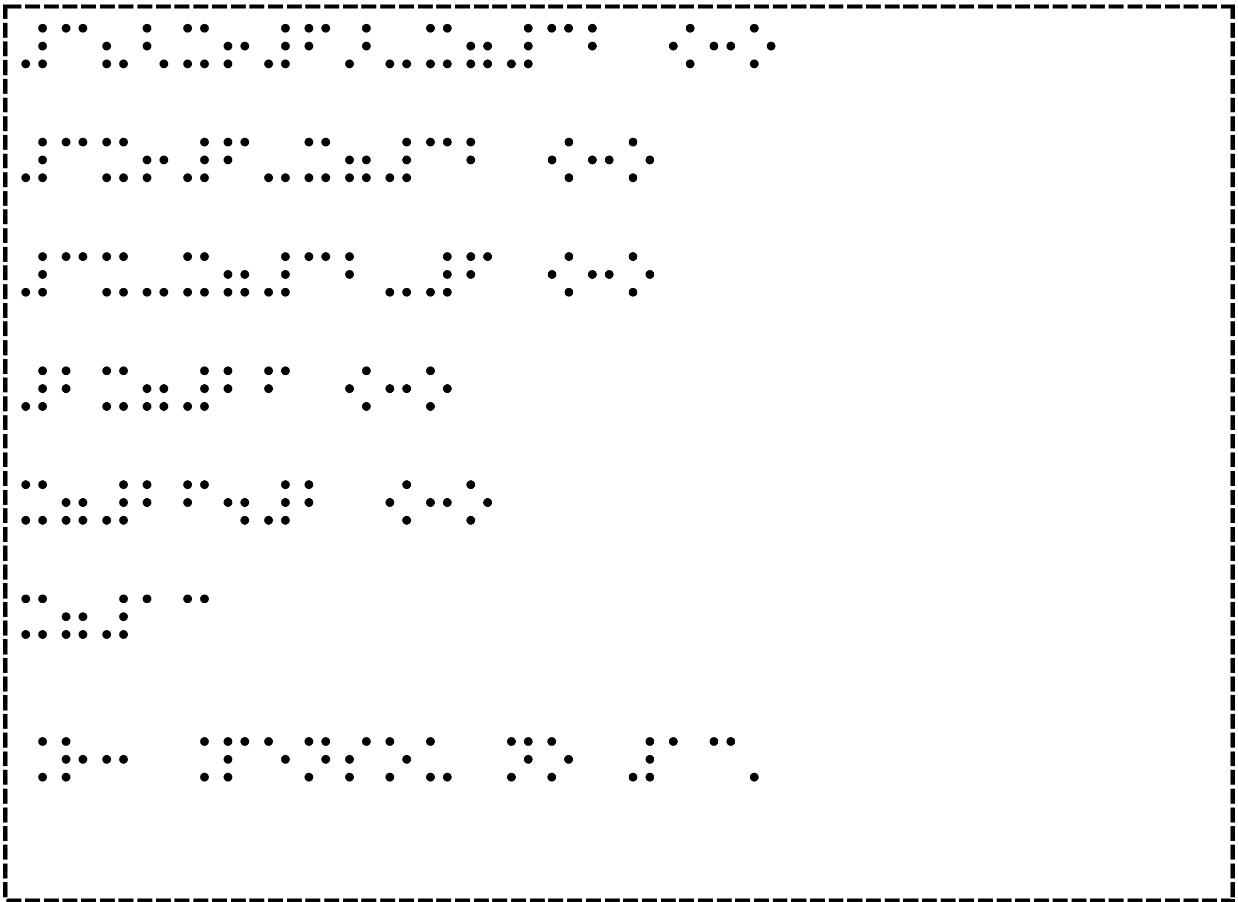


Figura 118: Extrato da resolução em Braille do problema 1 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" do aluno Pedro

$3 \times (x + 6) - x = 32 \Leftrightarrow$

$3x + 6 - x = 32 \Leftrightarrow$

$3x - x = 32 - 6 \Leftrightarrow$

$2x = 26 \Leftrightarrow$

$x = 26 \div 2 \Leftrightarrow$

$x = 13$

R: Pensou no 13.

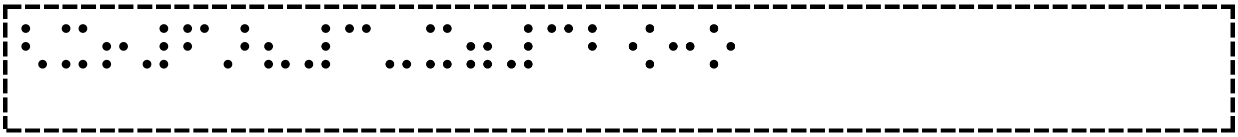
Figura 118A: Transcrição do extrato da resolução do problema 1 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" do aluno Pedro

Na resolução do aluno Pedro, constata-se que interpretou convenientemente o problema, contudo cometeu um erro muito habitual e que já anteriormente o tinha cometido aquando da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, e não tendo feito a respetiva verificação da solução obtida, assumiu-a como sendo verdadeira. Todavia, demonstrou saber resolver a equação, na medida em que todas as etapas seguintes foram concretizadas corretamente.

<u>Evidências do problema 2 da ficha de trabalho – "*Resolução de problemas*"</u>

Neste problema é apresentada uma situação geométrica, em que se pretende que o aluno indique a medida de cada um dos lados de um triângulo, sendo dado o valor do perímetro, e onde as medidas de dois lados podem ser encontradas tomando como referência um dos lados.

Margarida



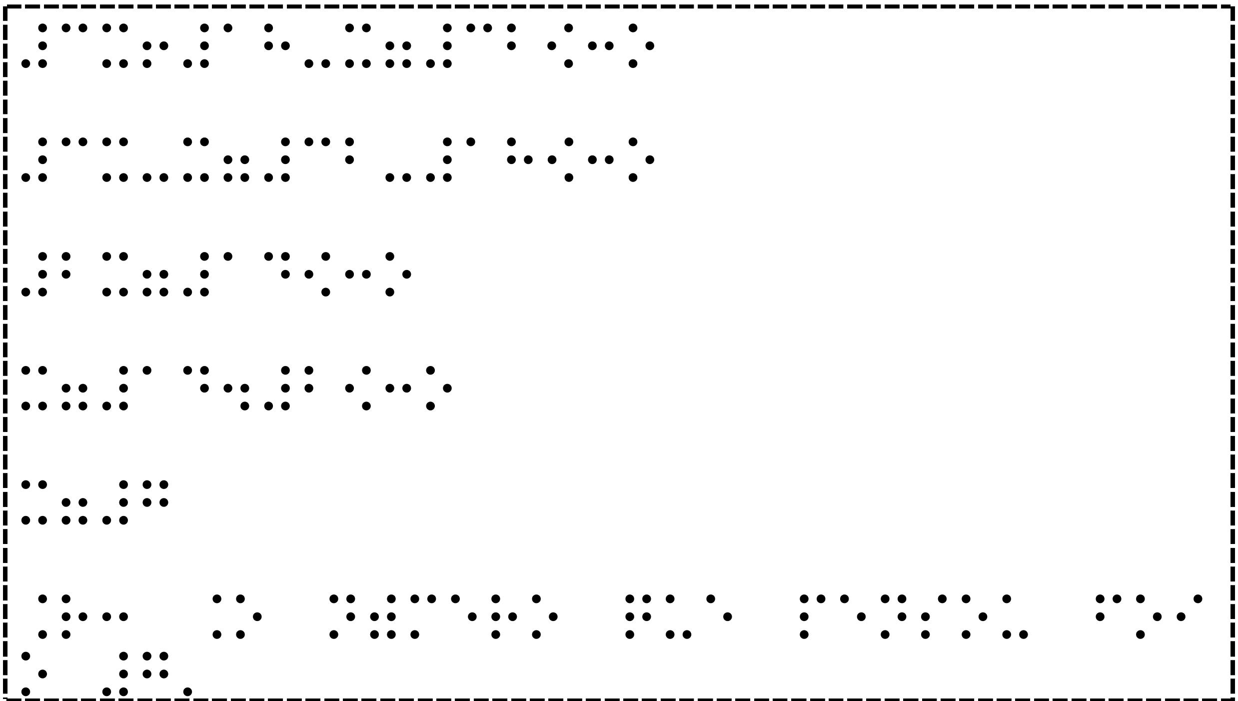


Figura 119: Extrato da resolução em Braille do problema 2 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" da aluna Margarida

1.º lado = x

2.º lado = $x + 3$

3.º lado = $2x$

P = l + l + l = 3l

$x + x + 3 + 2x = 31 \Leftrightarrow$

$4x = 34 \Leftrightarrow$

$x = 34 \div 4 \Leftrightarrow$

$x = 8{,}5$

1.º lado = 8,5

2.º lado = 8,5 + 3 = 11,5

3.º lado = 2 x 8,5 = 17

R: O primeiro lado mede 8,5 cm, o segundo mede 11,5 cm e o terceiro mede 17 cm.

Figura 119A: Transcrição do extrato da resolução do problema 2 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" da aluna Margarida

Na resolução do problema 2, a aluna interpreta corretamente o enunciado do problema e manifesta capacidade para traduzir a informação de linguagem corrente para linguagem algébrica.

A aluna Margarida começa por identificar o primeiro lado do triângulo como sendo a incógnita, representando-a pela letra x. De seguida, sem revelar grandes dificuldades, identifica o segundo e terceiro lados do triângulo.

Contudo, aquando da resolução da equação, utilizando um processo meramente mental, comete um erro, ao tentar resolver dois procedimentos num só, pelo que a mudança de membro do termo 3 não foi bem procedida. Por sua vez, é habitual a aluna Margarida proceder à verificação da solução, não acontecendo neste caso, o que levou a aluna a conclusões erróneas.

Rafael

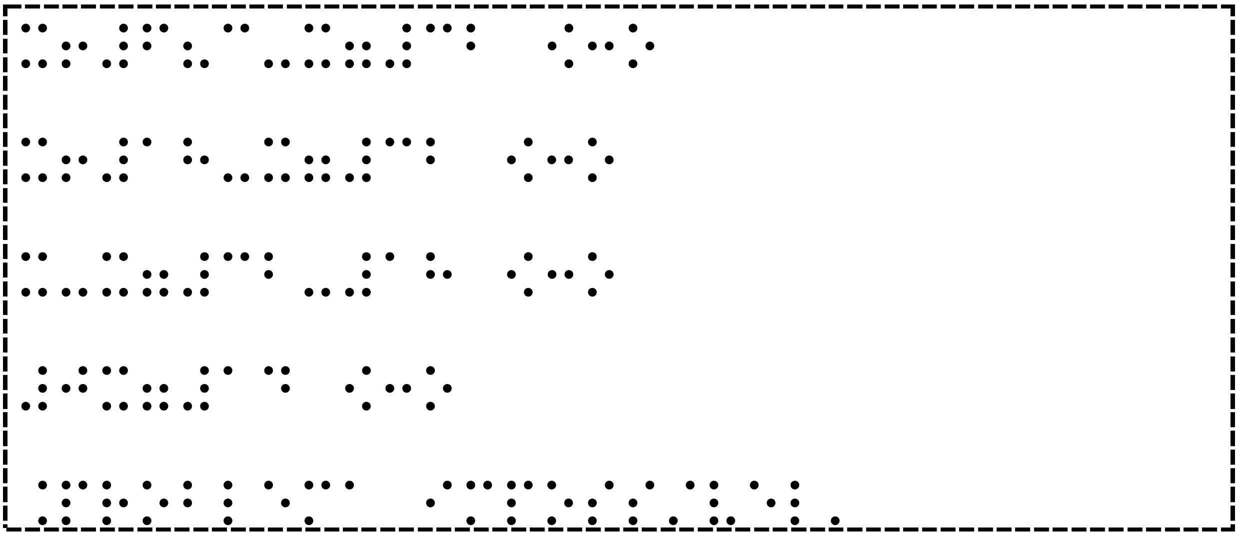


Figura 120: Extrato da resolução em Braille do problema 2 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Rafael

x

$x + 3$

$2x$

P = 3l

$x + x + 3 + 2x = 31 \Leftrightarrow$

$4x = 28 \Leftrightarrow$

$x = 28 \div 4 \Leftrightarrow$

$x = 7$

$x + 3 = 7 + 3 = 10$

$2 \times x = 2 \times 7 = 14$

P = 7 + 10 + 14 = 31

R: Os lados são 7, 10 e 14.

Figura 120A: Transcrição do extrato da resolução do problema 2 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Rafael

O aluno Rafael, na sua resolução, à medida que vai interpretando o enunciado, vai retirando os dados que lhe permitem escrever a expressão que representa cada uma das medidas dos outros dois lados, contudo não indica o que cada uma das expressões significa.

O aluno Rafael, faz corretamente a tradução da situação por uma equação que resolve sem dificuldades, chegando à solução. Substitui o valor encontrado nas expressões que utilizou para cada um dos lados e encontra as medidas dos restantes lados. Revela ainda, a preocupação de verificar, com as medidas obtidas, o valor do perímetro, confirmando deste modo que a resolução do problema se encontra correta.

Pedro

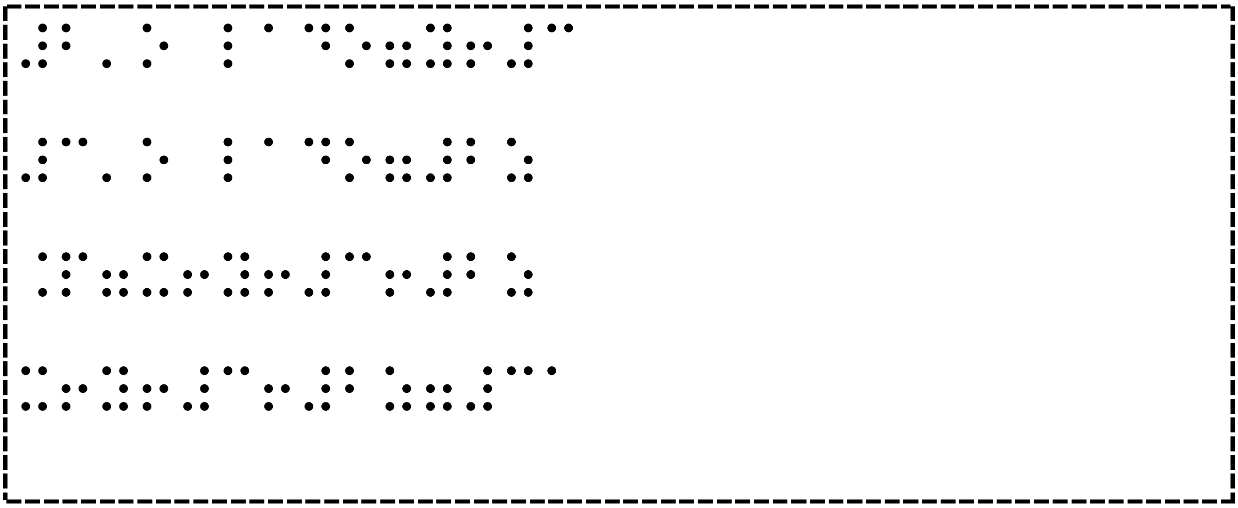


Figura 121: Extrato da resolução em Braille do problema 2 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Pedro

1.º lado = x

2.º lado = y + 3

3.º lado = 2z

P = x + y + 3 + 2z

x + y + 3 + 2z = 31

Figura 121A: Transcrição do extrato da resolução do problema 2 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Pedro

Na resolução do aluno Pedro, começa por dimensionar erradamente as medidas dos lados do triângulo, atribuindo a cada lado uma nova incógnita. De seguida, escreve a expressão do perímetro e afirma “É impossível resolver, tenho 3 incógnitas e agora?”. Fez uma pausa para pensar e perguntou:

Pedro: “O que é que está mal?”

Professor: “Lê novamente o enunciado.”

Passados alguns minutos.

Pedro: “não estou mesmo a ver.”

Professor: ”Então, afinal qual é o teu problema?”

Pedro: “Tenho três letras.”

Professor: “E precisas de quantas?”

Pedro: “Só consigo resolver com uma.”

Professor: “Lê o enunciado muito calmamente e vê na descrição das medidas dos lados se existe alguma característica comum.”

Passado alguns minutos.

Pedro: ”Ah, o segundo é em relação ao primeiro e o terceiro também, não estava a ler bem.”

Pedro: “Já sei, quer ver.”

O aluno começa a escrever na sua folha, tal como mostra o extrato seguinte

Pedro

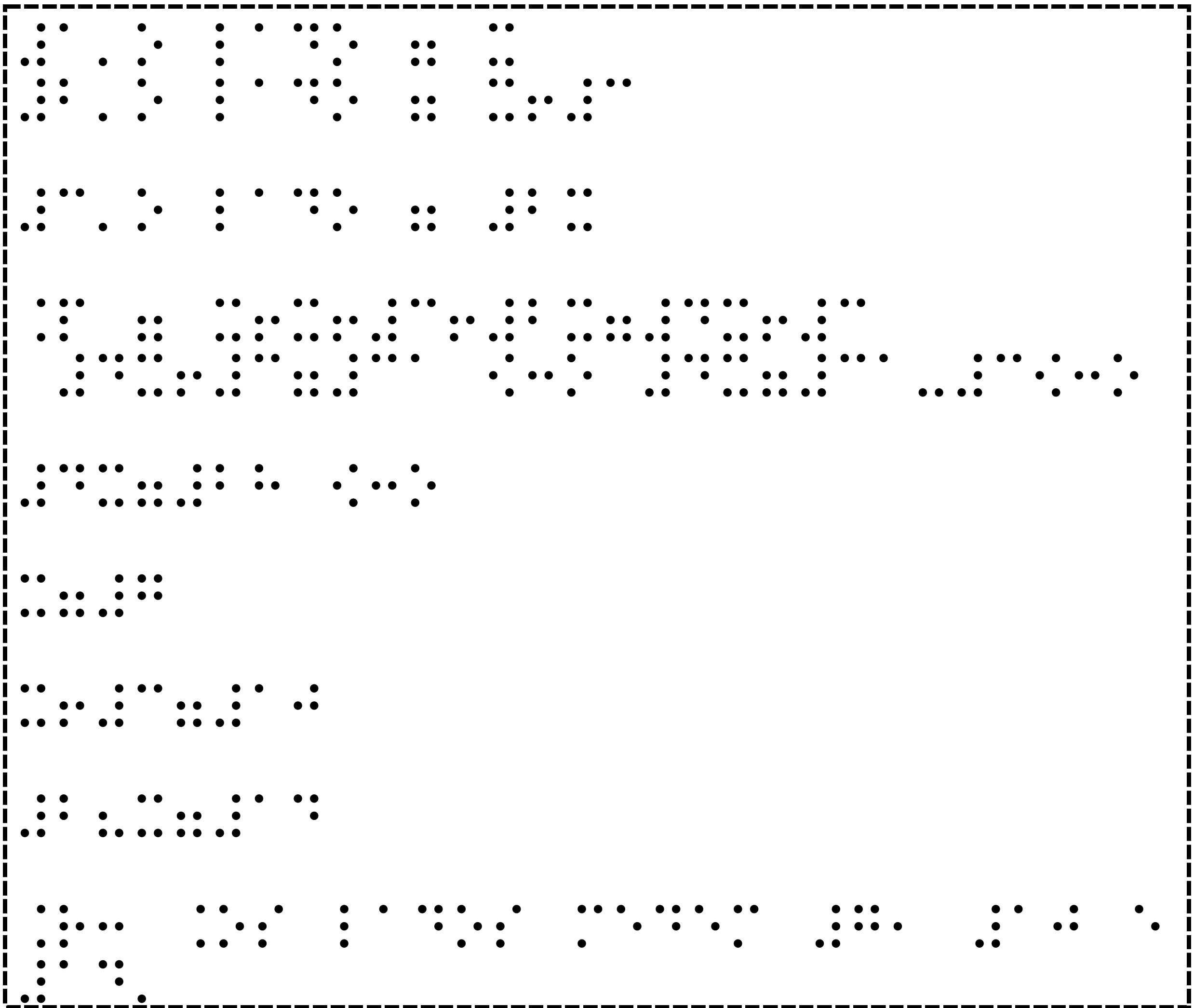


Figura 122: Extrato da nova resolução em Braille do problema 2 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Pedro

1.º lado = x

2.º lado = $x + 3$

3.º lado = $2x$

P = $x + x + 3 + 2x = 4x + 3$

$4x + 3 = 31 \Leftrightarrow 4x = 31 - 3 \Leftrightarrow$

$4x = 28 \Leftrightarrow$

$x = 7$

$x + 3 = 10$

$2 \times x = 14$

R: Os lados medem 7, 10 e 14.

Figura 122A: Transcrição do extrato da nova resolução do problema 2 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" do aluno Pedro

No segundo extrato, constata-se que o aluno após o equacionamento do problema resolve-o de uma forma correta e indica a resposta, mas não faz a respetiva verificação.

<u>Evidências do problema 3 da ficha de trabalho – "*Resolução de problemas*"</u>

Neste problema, os alunos dispõe de uma figura onde são representadas três casas, e onde está indicada, em km, a distância entre as casas mais afastadas. Pretende-se que os alunos escrevam uma equação que lhes permita encontrar a distância entre as casas A e B.

Devido à figura houve a necessidade de reformular o enunciado. De seguida apresenta-se essa reformulação:

3. Imaginemos uma estrada retilínea onde existem três casas A, B e C. A ordem pela qual estão dispostas as casas é a seguinte: A, B e C. Sabendo que a distância entre a casa A e a casa B é o triplo da distância entre a casa B e a casa C e que a distância entre a casa A e casa B é 72km, qual a distância entre A e B?

Margarida

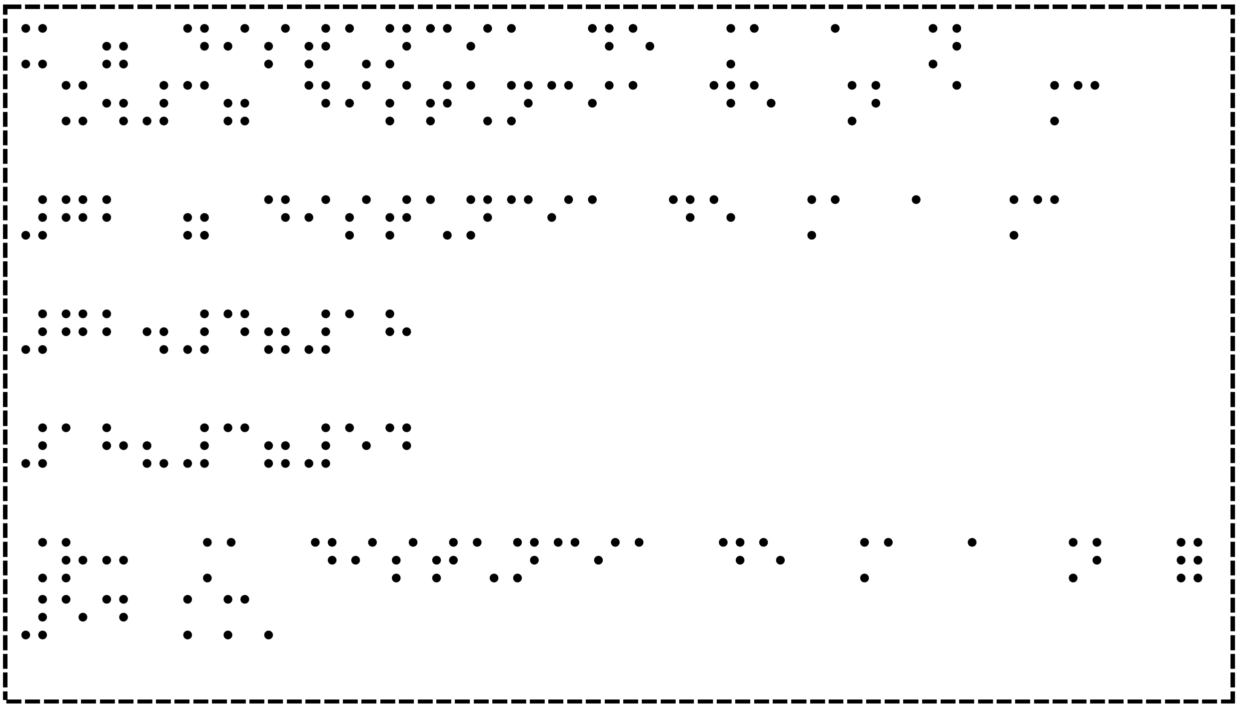


Figura 123: Extrato da resolução em Braille do problema 3 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" da aluna Margarida

x = distância de A a B

$x \div 3$= distância de B a C

72 = distância de A a C

$72 \div 4 = 18$

$18 \times 3 = 54$

R: A distância de A a B é 54 km.

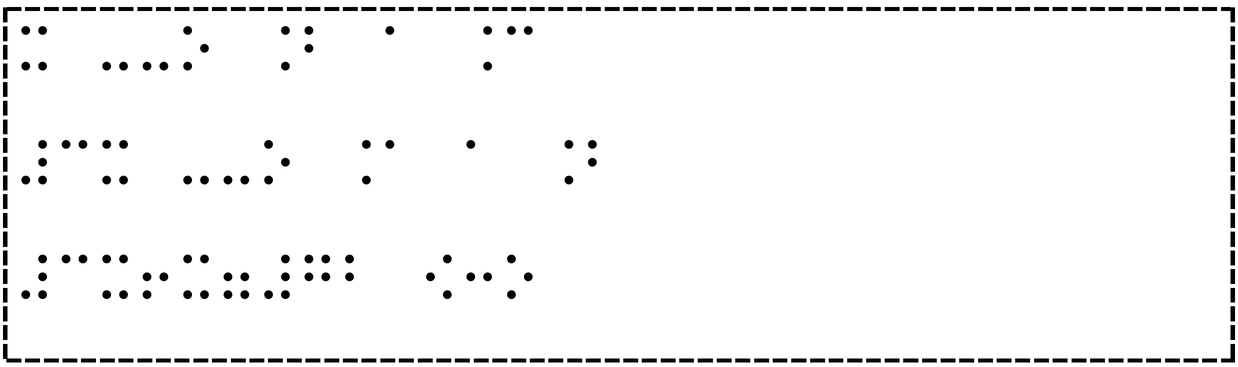
Figura 123A: Transcrição do extrato da resolução do problema 3 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” da aluna Margarida

Na resolução deste problema a aluna Margarida, começa por seguir uma estratégia algébrica. À medida que vai fazendo a interpretação do enunciado vai anotando os dados. Começa por identificar a incógnita como sendo a distância entre a casa A e a casa B, e representa-a pela letra *x*. A interpretação correta que faz do enunciado permite-lhe concluir que a distância entre a casa B e a casa C corresponde a um terço da distância entre as casas A e B, representando-a por $x \div 3$. Finalmente, toma nota da distância entre as casas A e C, escrevendo que esta é igual a 72 km.

De seguida, a aluna Margarida, opta por uma resolução aritmética, em vez de uma tradução da situação problemática por uma equação. Começa por dividir os 72 km por 4 para encontrar a distância entre as casas B e C, e depois como sabe que a distância entre a casa A e a casa B é o triplo dessa distância, multiplica o valor encontrado por 3 e chega à solução do problema.

Após a resolução, interroguou-se a aluna relativamente à razão de não ter equacionado a situação, ao que ela me respondeu: “*Pensei em equacionar, mas assim é mais rápido*”.

Rafael



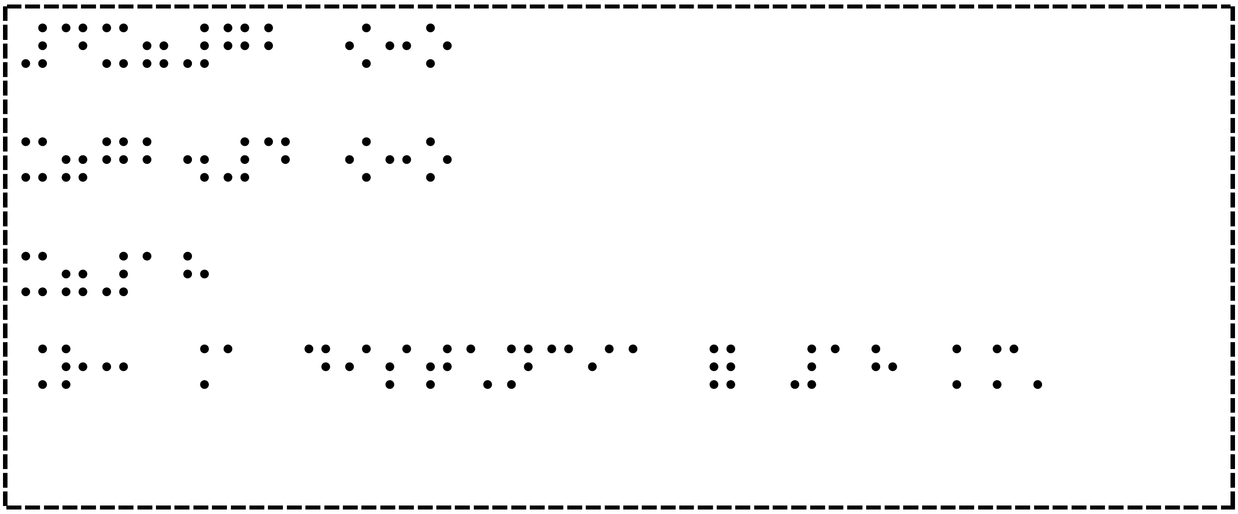


Figura 124: Extrato da resolução em Braille do problema 3 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Rafael

x → B a C

$3x$ → A a B

$3x + x = 72 \Leftrightarrow$

$4x = 72 \Leftrightarrow$

$x = 72 \div 4 \Leftrightarrow$

$x = 18$

R: A distância é 18 km.

Figura 124A: Transcrição do extrato da resolução do problema 3 da ficha de trabalho – “Resolução de problemas” do aluno Rafael

O aluno Rafael, começa por dimensionar corretamente as variáveis, distâncias A a B e de B a C, e de seguida equaciona corretamente a situação problemática. Contudo, não conclui a resolução e apresenta uma resposta do problema errada, simplesmente por falta de atenção.

Pedro

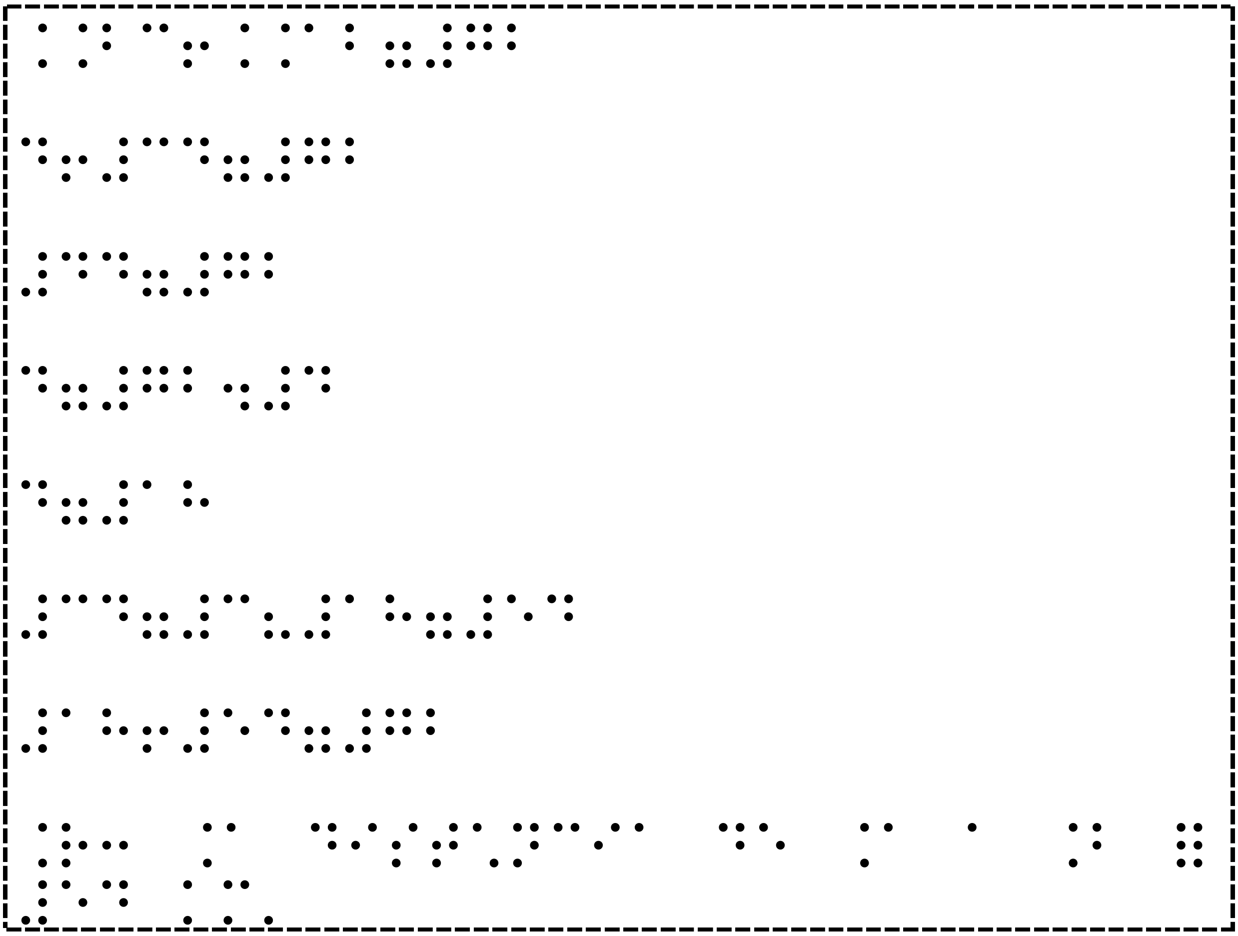


Figura 125: Extrato da resolução em Braille do problema 3 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" do aluno Pedro

BC + AB = 72

d + 3d = 72

4d = 72

d = 72 ÷ 4

d = 18

3d = 3 x 18 = 54

18 + 54 = 72

R: A distância de A a B é 54 km.

Figura 125A: Transcrição do extrato da resolução do problema 3 da ficha de trabalho – "Resolução de problemas" do aluno Pedro

O aluno Pedro começa por equacionar o problema, embora tenha demorado bastante tempo após a escrita da expressão BC + AB = 72. O número de letras contidas na expressão tornou-se muito confuso para o aluno, mas passado algum tempo optou por considerar a distância de B a C igual a d e a partir daí resolveu corretamente a equação, apresentou uma resposta correta e verificou a solução encontrada.

8.8 - Estratégia de ensino de resolução de Inequações do 1.º grau a uma incógnita

8.8.1 - Terminologia das Inequações do 1.º grau a uma incógnita

A terminologia utilizada nas inequações é semelhante à utilizada aquando das equações, nomeadamente as noções de primeiro e segundo membros, termos e incógnita (variável).

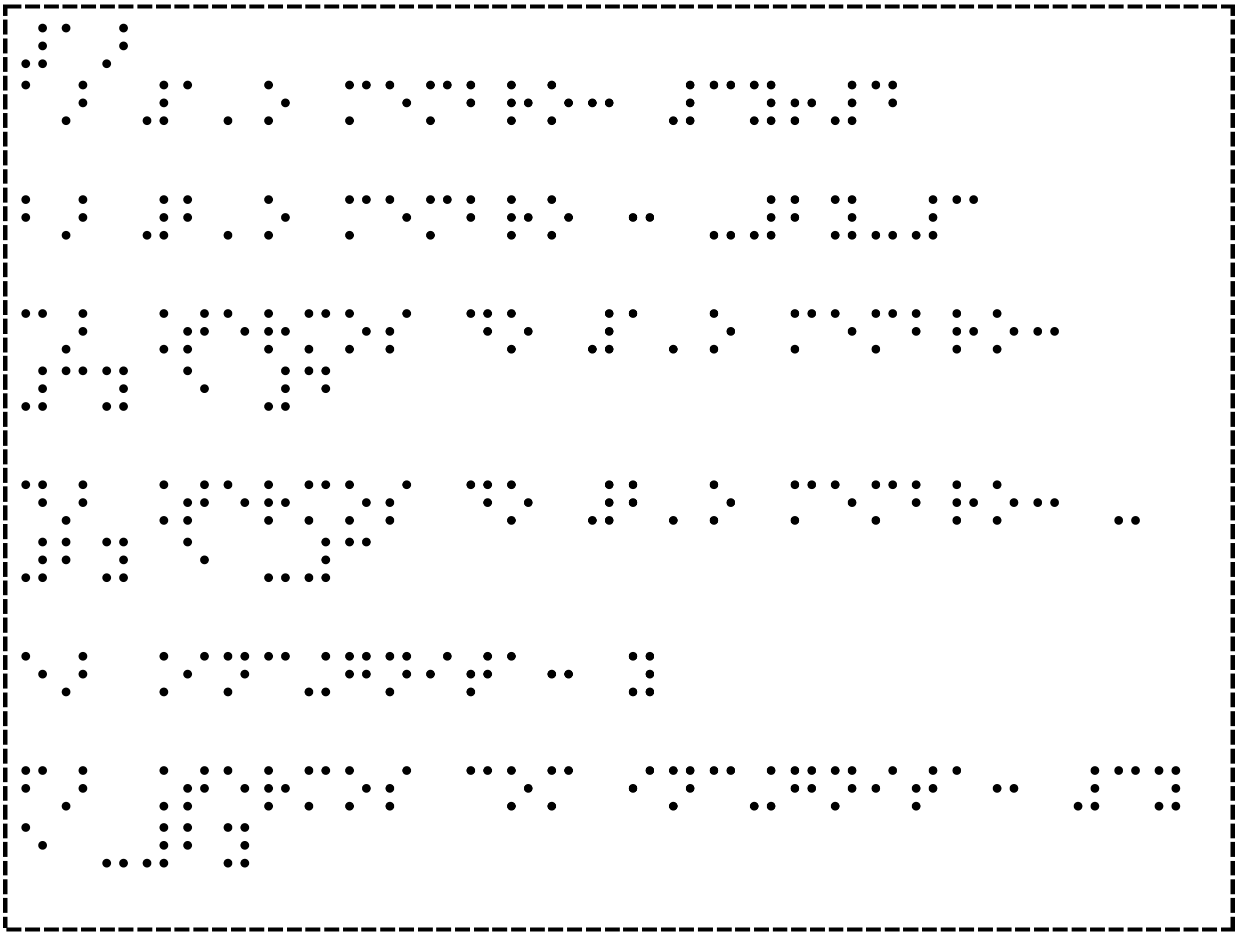
Assim sendo, uma inequação é separada em duas partes por um sinal de desigualdade, ou seja, < (⠪), > (⠕), ≤, (⠪⠶) e ≥, (⠕⠶). Cada uma dessas partes designa-se por membro da inequação, sendo que a que fica à esquerda do sinal de desigualdade chama-se primeiro membro e a que fica à direita do sinal de desigualdade chama-se segundo membro, que por sua vez, cada membro é constituído por termos, sejam eles termos com incógnita ou termos independentes (termos sem incógnita).

O aluno deverá obrigatoriamente ser conhecedor de toda a terminologia empregue no estudo de inequações, só assim será possível uma boa comunicação matemática ao longo de todo o trabalho desenvolvido no âmbito das inequações.

Deve-se então, apresentar uma questão de aula que aborde toda esta terminologia, como forma de a consolidar.

8.8.1.1 – Evidências – Análise da resolução da questão-aula "Terminologia usada em Inequações"

Margarida



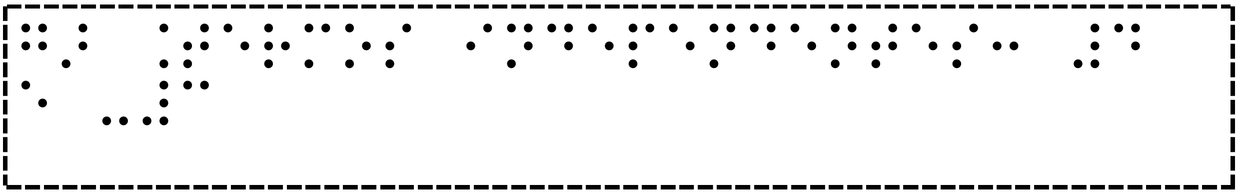


Figura 126: Extrato da resolução em Braille da questão-aula “terminologia usada em Inequações” da aluna Margarida

1)
a) 1.º membro : 3y + 4

b) 2.º membro : -2y – 3

c) Termos do 1.º membro: 3y e 4

d) Termos do 2.º membro: -2y e -3

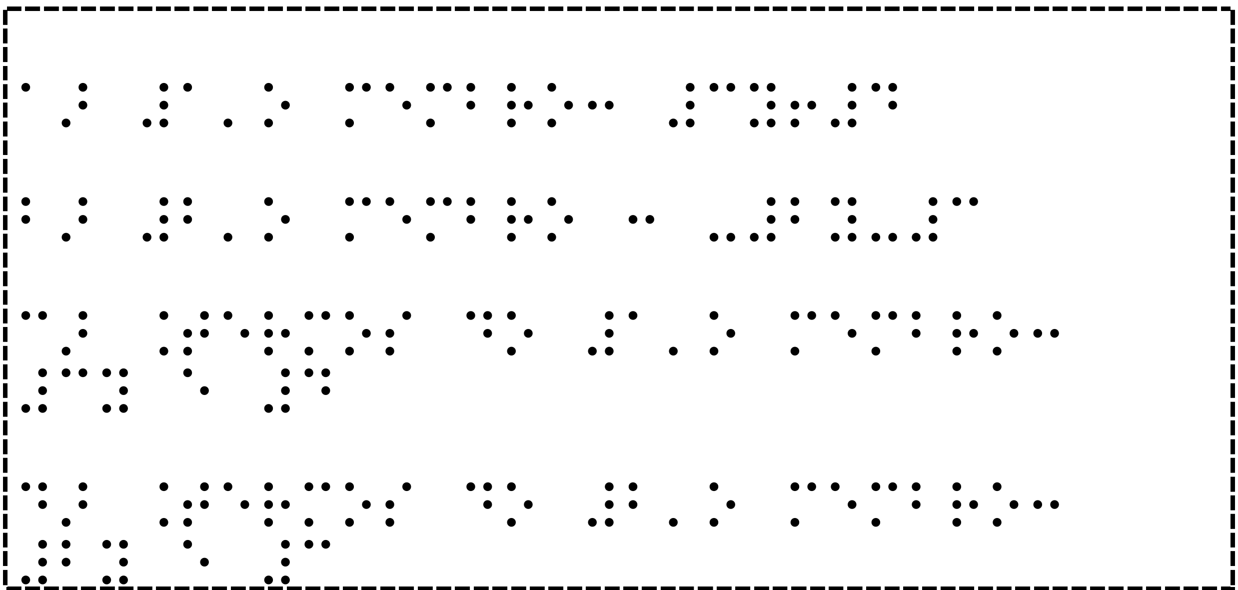
e) Incógnita: y

f) Termos com incógnita: 3y e -2y

g) Termos independentes: 4 e -3

Figura 126A: Transcrição do extrato da resolução da questão-aula “terminologia usada em Inequações” da aluna Margarida

Rafael



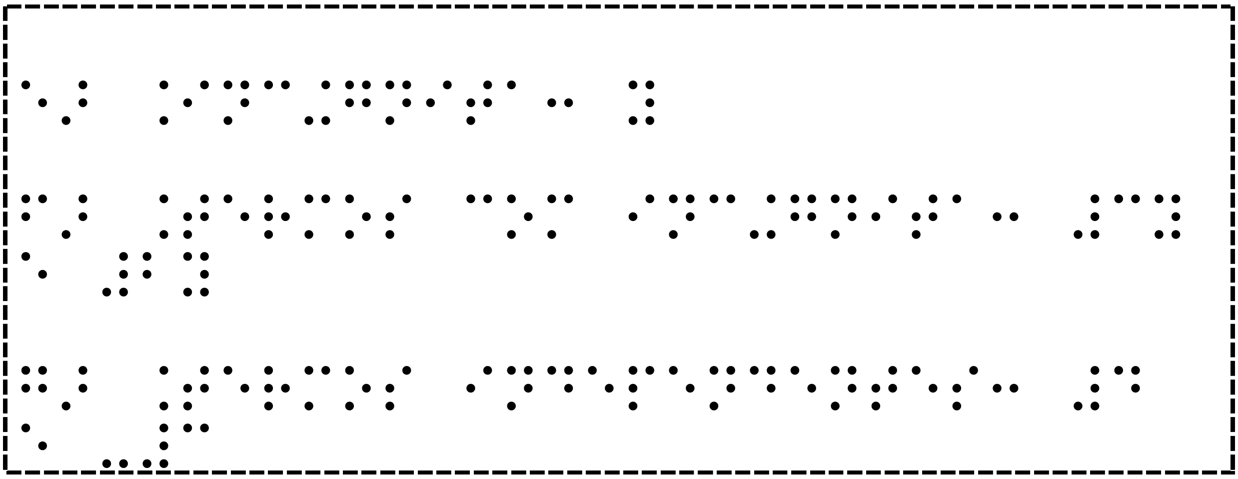


Figura 127: Extrato da resolução em Braille da questão-aula “terminologia usada em Inequações” do aluno Rafael

a) 1.º membro : 3y + 4

b) 2.º membro : -2y – 3

c) Termos do 1.º membro: 3y e 4

d) Termos do 2.º membro: 2y e 3

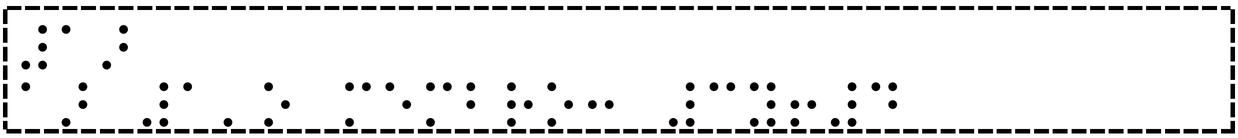
e) Incógnita: y

f) Termos com incógnita: 3y e 2y

g) Termos independentes: 4 e -3

Figura 127A: Transcrição do extrato da resolução da questão-aula “terminologia usada em Inequações” do aluno Rafael

Pedro



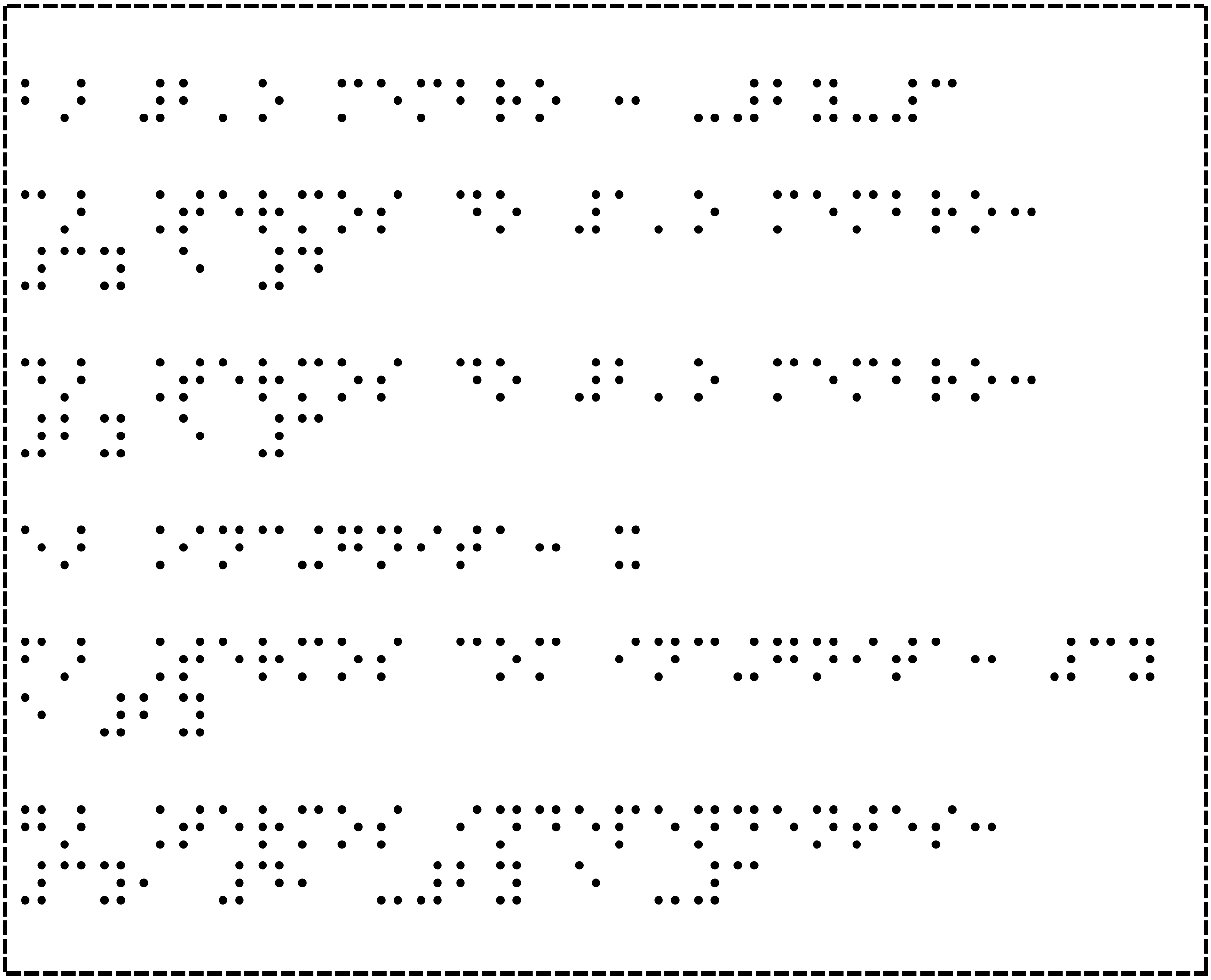


Figura 128: Extrato da resolução em Braille da questão-aula “terminologia usada em Inequações” do aluno Pedro

1)

a) 1.º membro : 3y + 4

b) 2.º membro : -2y – 3

c) Termos do 1.º membro: 3y e 4

d) Termos do 2.º membro: 2y e 3

e) Incógnita: x

f) Termos com incógnita: 3y e 2y

g) Termos independentes: 3y, 4, -2y e -3

Figura 128A: Transcrição do extrato da resolução da questão-aula “terminologia usada em Inequações” do aluno Pedro

Da observação constata-se que a aluna Margarida adquiriu a terminologia, o mesmo não aconteceu com os restantes colegas Rafael e Pedro. O Rafael revela ter percebido a noção de membro, contudo falha na determinação de alguns termos, nomeadamente os que apresentam coeficientes negativos, uma vez que não considera o seu sinal. O mesmo acontece com o Pedro que apresenta os mesmos erros e ainda representa mal a incógnita, considerando-a x em vez de y. É de referir que este erro já tinha sido cometido aquando da determinação dos termos de uma equação

8.8.2 – Conjunto-solução de uma inequação – *Estratégia da Cadeira*

O início do estudo da resolução de inequações pressupõe o domínio prévio de intervalos de números reais. Embora este conteúdo não se enquadre diretamente no âmbito do trabalho investigativo aqui apresentado, é indissociável do mesmo, sobretudo quando foi necessário delinear uma estratégia específica para a aprendizagem do mesmo.

Na verdade, aquando do estudo da resolução de inequações, os alunos cegos manifestaram uma total incapacidade para apresentarem o conjunto-solução das mesmas, tendo esta situação criado grandes dificuldades ao docente. Após várias tentativas de ensino, que passaram pela aplicação de diversas estratégias, o docente aplicou uma estratégia por ele criada, a qual se revelou absolutamente eficaz com os alunos em questão. Apesar de aparentemente desenquadrada, apresenta-se a então designada *Estratégia da Cadeira*, tendo em conta que, sem esta, tudo o que se segue teria sido impossível.

Como já referido, contrariamente aos restantes elementos da turma, os alunos cegos, no âmbito da resolução de inequações nunca apresentavam o conjunto-solução das mesmas de uma forma correta, evidenciando que a estratégia tradicionalmente utilizada com toda a turma não tinha atingido os objetivos esperados com todos os alunos.

Desconhecendo qualquer estratégia que pudesse solucionar o problema em questão, o docente encontrava-se perante uma enorme dificuldade: fazer com que os alunos cegos atingissem o mesmo grau de proficiência que os restantes.

Detetou-se pelas primeiras explorações escritas realizadas pelos alunos neste âmbito que os mesmos recorriam unicamente à aplicação da memorização feita da simbologia matemática, não vislumbrando qualquer outra estratégia de raciocínio para a apresentação dos intervalos de números reais.

Assim, os alunos interpretavam sempre o sinal ( ]), em Braille ⠾ , como sendo intervalo aberto, independentemente da posição em que se encontrava, pelo que em]2,3] em ambos os lados, o símbolo representava para eles o intervalo aberto.

O mesmo acontecia com o sinal ([ ), em Braille ⠷ , que era sempre interpretado como sendo intervalo fechado, independentemente da posição em que se encontrava.

Note-se, para uma melhor compreensão deste facto, que os alunos cegos não têm acesso imediato à expressão no seu todo, apreendendo-a através do tato por passos, contrariamente aos alunos normovisuais que a apreendem pela visão, facto que é impossível contornar.

Partindo da aparência dos símbolos Braille (⠾), (⠷), o professor questionou os alunos sobre o que estes lhes faziam lembrar, tendo-os alertado para a semelhança entre estes e uma cadeira, em que o ponto 4, no primeiro caso (⠾) e o ponto 1, no segundo caso (⠷) se assemelham às costas da cadeira, elementos do real facilmente apreensível por todos, pelo que esta semelhança foi imediatamente aceite pelos alunos.

Partindo deste reconhecimento, o professor apresentou quatro situações envolvendo intervalos de números reais, sendo elas]3,5];]3,5[; [3,5] e [3,5[.

<u>1.ª Situaçã</u><u>o</u>: Considere-se o intervalo]3,5].

Em Braille, a sua representação é: ⠾⠼⠉⠂⠼⠑⠾, intervalo que pode ser percecionado pelo aluno, recorrendo a esta estratégia, do seguinte modo:

O intervalo apresentado encontra-se aberto à esquerda e fechado à direita, pelo que se se imaginar uma pessoa sentada no sinal Braille à esquerda ⠾, esta encontra-se de costas voltada para o número três, pelo que não está a ver o referido número. Este intervalo encontra-se aberto à esquerda, pois o número três não está “vigiado” pelo indivíduo sentado, podendo “fugir”, tal como poderia se uma porta estivesse aberta. Por oposição, se se imaginar uma pessoa sentada no sinal Braille à direita ⠾, esta encontra-se voltada para o número cinco, estando por isso, a vê-lo. O número cinco encontra-se, portanto impossibilitado de “fugir”, tal como o estaria se estivesse perante uma porta fechada. Considerar-se-á assim, que o intervalo se encontra fechado à direita.

Esta estratégia é aplicável a todos os casos possíveis, já referidos anteriormente.

8.8.3 – Resolução de inequações do 1.º grau a uma incógnita

A estratégia utilizada na resolução de inequações vai ao encontro da estratégia aplicada aquando da resolução das equações do 1.º grau a uma incógnita.

Assim sendo, começa-se por resolver uma inequação pelas regras ….

Resolver uma inequação consiste em encontrar o seu conjunto-solução.

Como resolver a inequação $x + 4 < 6$?

Tal como nas equações, pretende-se em primeiro lugar isolar a incógnita, isto é, o *x*.

Para tal, podemos mencionar a regra da adição em desigualdades numéricas, regra esta estudada no subtópico de Operações e Relações de Ordem em IR e que diz, se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma desigualdade, então o sentido da desigualdade mantém-se. Ou seja, $4 < 8 \Leftrightarrow 4 + 5 < 8 + 5$.

Em termos gerais:

$a < b < a + c < b + c$, *com a, b, c* IR.

É de referir que esta propriedade é válida para todos os tipos de desigualdades (<, ≤, > e ≥).

De seguida dever-se-á mencionar o 1º Princípio de equivalência que refere que quando somamos ou subtraímos o mesmo número a ambos os membros de uma inequação obtemos uma inequação equivalente à primeira.

Deste princípio de equivalência surge então, a seguinte regra prática:

Numa inequação podemos mudar um termo de um membro para o outro, trocando-lhe o sinal, sendo a inequação obtida equivalente à primeira.

Então, para resolver a inequação inicial $x + 4 < 6$, subtrai-se 4 em cada um dos membros da inequação, e obtém-se:
$x + 4 - 4 < 6 - 4 \Leftrightarrow x < 2$

Sendo que o conjunto-solução é: C.S. = $]-\infty; 2[$

Agora pretende-se resolver a inequação $5x < 20$?
Tal como na inequação anterior, também se quer isolar o x.

Neste caso dever-se-á mencionar as regras da multiplicação em desigualdades numéricas que referem:

- Se se multiplicar ou dividir os dois membros de uma desigualdade por um número positivo, o sentido da desigualdade mantém-se.

Ou seja:

$5 < 15 \Leftrightarrow 5 \times 3 < 15 \times 3 \Leftrightarrow 15 < 45$

Em termos gerais:

$a < b \Leftrightarrow a \times c < b \times c$, com $a, b \in IR$ e $c > 0$

- Se se multiplicar ou dividir os dois membros de uma desigualdade por um número negativo, o sentido da desigualdade inverte-se.

Ou seja:

$5 < 15 \Leftrightarrow 5 \times (-3) > 15 \times (-3) \Leftrightarrow -15 > -45$.

$a < b \Leftrightarrow a \times c > b \times c$, com a, b IR e $c < 0$

De seguida dever-se-á mencionar o 2º Princípio de equivalência que refere que se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma inequação pelo mesmo número diferente de zero, obtemos uma inequação equivalente, mantendo-se o sentido da desigualdade se o número for positivo e invertendo o sentido da desigualdade se o número for negativo.

Deste princípio de equivalência surge então, a seguinte regra prática:

Numa inequação,
- se se multiplicar ou dividir ambos os membros de uma inequação por um número negativo inverte-se o sentido da desigualdade,

- se se multiplicar ou dividir ambos os membros da inequação por um número positivo mantém-se o sentido da desigualdade.

Como se pretende isolar a incógnita, x, na inequação $5x < 20$, então divide-se ambos os membros da inequação pelo coeficiente de x, que neste caso é 5, sendo o coeficiente positivo e obtém-se:

$$\mathbf{5}x < \mathbf{20} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{5}x}{\mathbf{5}} < \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{5}} \Leftrightarrow x < \mathbf{4}$$

Tem-se como conjunto-solução, C.S. =]-∞, 4[

Agora se se pretender resolver a seguinte inequação -5*x* < 20?

Se se reparar, o **coeficiente** de *x* é **negativo, ou seja, -5, então** divide-se ambos os membros da inequação por -5, invertendo, deste modo o sentido da desigualdade.

Contudo, na resolução desta inequação, pode-se utilizar outra estratégia de resolução alternativa que consiste em multiplicar ambos os membros da inequação por -1, invertendo o sentido da desigualdade, e posteriormente dividir ambos os membros por 5.

Apresentam-se então duas alternativas de resolução:

<u>1.ª Alternativa</u>:

$$-5x < 20 \Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} > \frac{20}{-5} \Leftrightarrow x > -4$$

Tem-se como conjunto-solução, C.S. =]-4,+∞[

<u>2.ª Alternativa</u>:

$$-5x < 20 \Leftrightarrow -5x \times (-1) > 20 \times (-1) \Leftrightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-20}{5} \Leftrightarrow x > -4$$

Tem-se o mesmo conjunto-solução, C.S. =]-4,+∞[

Relativamente à resolução de inequações com parênteses e denominadores procede-se como para as equações com parênteses e denominadores.

Assim sendo, as etapas a seguir serão:

Considere-se a seguinte inequação:

$$\frac{3}{5}(x+4) \leq 3 - \frac{2}{3}x$$

1.ª Etapa: Desembaraçar de parênteses.

$$\frac{3}{5}(x+4) \leq 3 + \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{3}{5}x + \frac{12}{5} \leq 3 + \frac{2}{3}x$$

2.ª Etapa: Reduzir ao mesmo denominador.

$$\frac{3}{5}x + \frac{12}{5} \leq 3 + \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{9}{15}x + \frac{36}{15} \leq \frac{45}{15} + \frac{10}{15}x$$

3.ª Etapa: Desembaraçar de denominadores multiplicando ambos os membros da inequação por 15.

$$9x + 36 \leq 45 + 10x$$

4.ª Etapa: Agrupar os termos semelhantes.

$$9x - 10x \leq 45 - 36$$

5.ª Etapa: Reduzir os termos semelhantes.

$$-x \leq 9$$

6.ª Etapa: Usar as regras de multiplicação.

$$x \geq -9$$

(Multiplicou-se por -1 e inverteu-se o sinal da desigualdade.)

7.ª Etapa: Apresentar o conjunto-solução.

$$C.S. = [-9, +\infty[$$

É de referir que na resolução de inequações não implica executar estas etapas na ordem apresentada. Em todos os casos, deve-se escolher o caminho mais adequado, conforme a situação específica.

A estratégia aplicada em contexto de sala de aula, segue as etapas apresentadas anteriormente, apenas utiliza-se uma linguagem diferente em algumas das etapas, já utilizada aquando da resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita, com o intuito de chamar a atenção dos alunos aquando da aprendizagem da resolução de inequações.

No que diz respeito à resolução de situações problemáticas envolvendo inequações, o professor deverá trabalhar com os alunos as seguintes etapas:

1.ª Etapa: Identificar a incógnita, isto é, dever-se-á identificar o que se pretende determinar.

2.ª Etapa: Traduzir cada uma das informações da situação problemática por meio de uma inequação. O professor deverá chamar a atenção dos alunos para o facto de, enquanto procedem à leitura, deverem em simultâneo, proceder à escrita em linguagem matemática.

3.ª Etapa: Resolver a inequação.

4.ª Etapa: Representar o conjunto-solução da inequação.

5.ª Etapa: Verificar se todas as soluções encontradas são soluções da situação problemática.

8.8.3.1 - Evidências - Análise da resolução da ficha de trabalho "Inequações I"

O objetivo desta ficha de trabalho assenta essencialmente em perceber quais as dificuldades sentidas pelos alunos na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica envolvendo inequações, sendo que este registo de identificação é de todo importante, a fim de evitar problemas futuros no que diz respeito às situações problemáticas.

<u>Evidências da questão única da ficha de trabalho – "*Inequações I*"</u>

Margarida

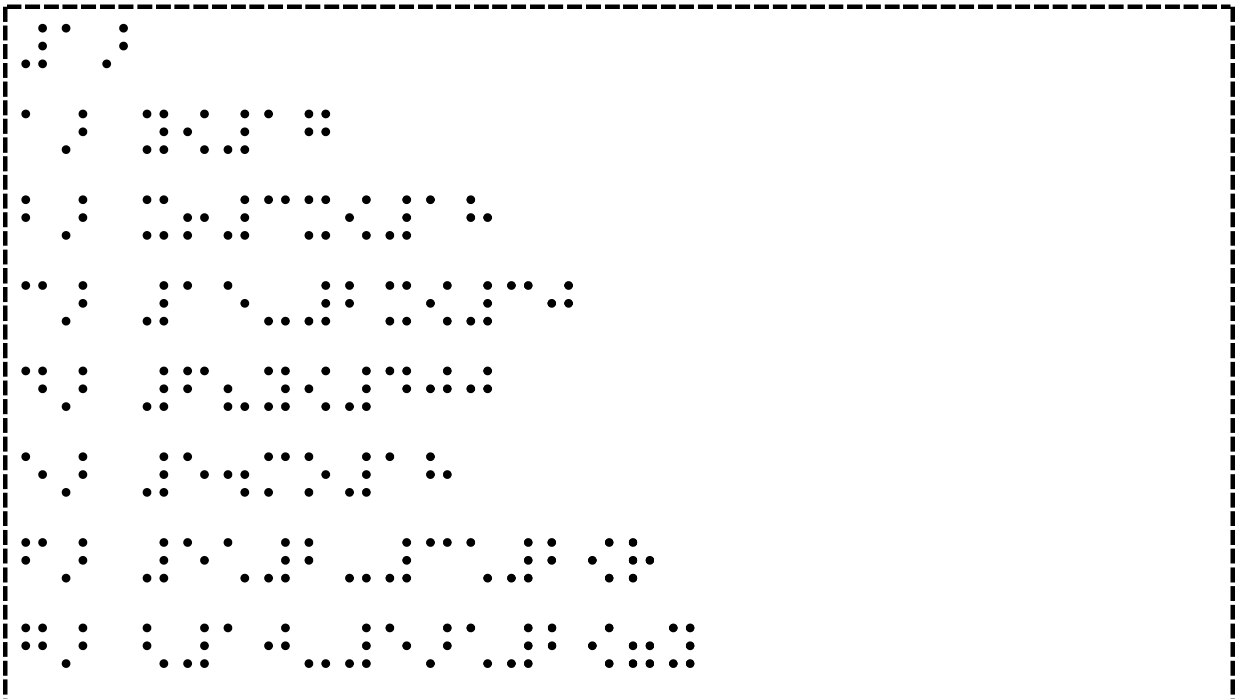


Figura 129: Extrato da resolução em Braille da questão única da ficha de trabalho – "*Inequações I*" da aluna Margarida

1)

a) $y < 17$

b) $x + 3x < 18$

c) $15 - 2x <30$

d) $6 \times y < 400$

e) $5 \div m > 18$

f) $5^2 - 3^2 < r$

g) $(10 - 5)^2 \leq y$

Figura 129A: Transcrição do extrato da resolução da questão única da ficha de trabalho – "*Inequações I*" da aluna Margarida

Rafael

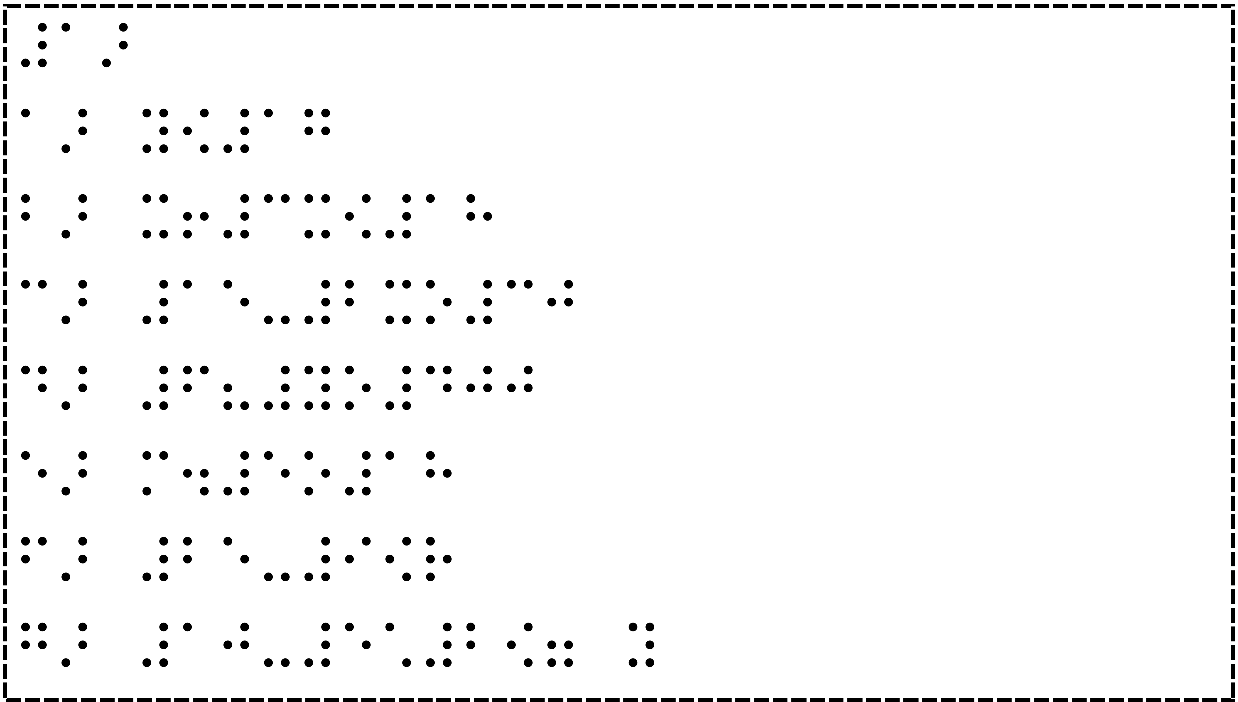


Figura 130: Extrato da resolução em Braille da questão única da ficha de trabalho – "*Inequações I*" do aluno Rafael

1)

a) $y < 17$

b) $x + 3x < 18$

c) $15 - 2x > 30$

d) $6 \times y > 400$

e) $m \div 5 > 18$

f) $25 - 9 < r$

g) $10 - 5^2 \leq y$

Figura 130A: Transcrição do extrato da resolução da questão única da ficha de trabalho – "*Inequações I*" do aluno Rafael

Pedro

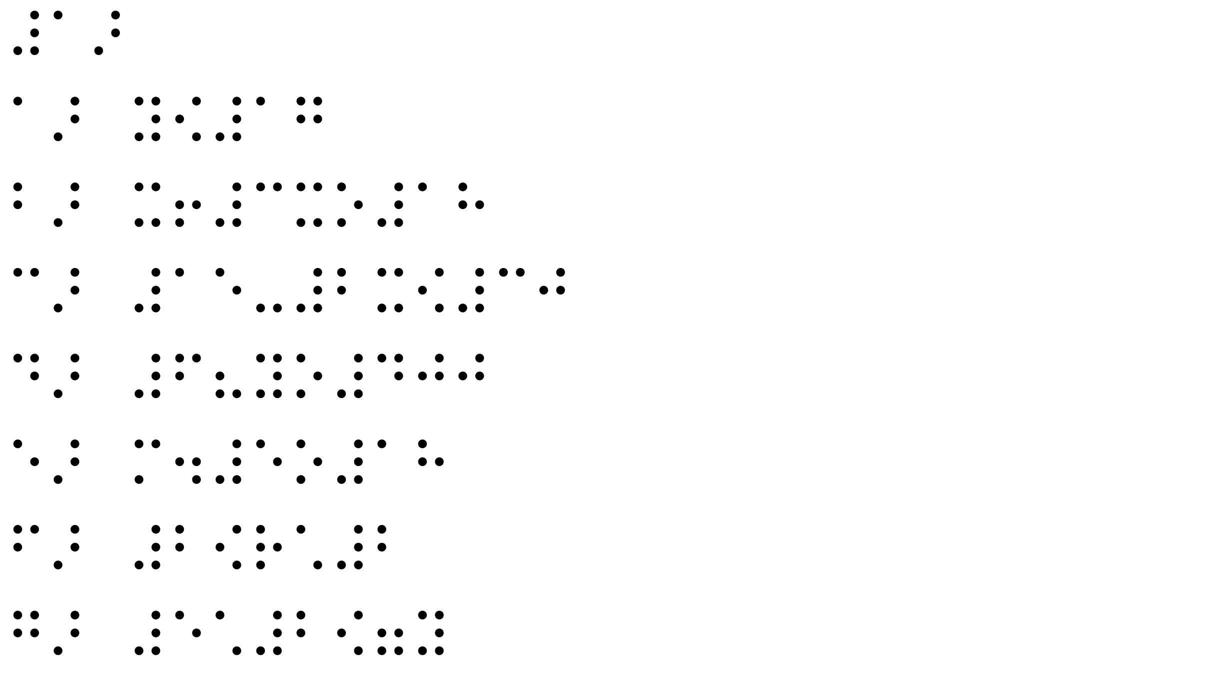


Figura 131: Extrato da resolução em Braille da questão única da ficha de trabalho – "*Inequações I*" do aluno Pedro

1)

a) $y < 17$

b) $x + 3x > 18$

c) $15 - 2x < 30$

d) $6 \times y > 400$

e) $m \div 5 > 18$

f) $2 < r^2$

g) $5^2 \leq y$

Figura 131A: Transcrição do extrato da resolução da questão única da ficha de trabalho – "*Inequações I*" do aluno Pedro

Da observação das explorações dos alunos identificam-se alguns erros nomeadamente no que se refere ao sinal de desigualdade na dedução da inequação, revelando, deste modo dificuldades em interpretar o significado das expressões: "não é maior do que", " no máximo 400" e "é pelo menos". Verificou-se ainda, erros no

significado de quociente entre dois números.

Assim sendo, evidenciou-se lacunas ao nível do vocabulário específico, uma vez mais relacionadas com as dificuldades de compreensão do enunciado proposto, contribuindo deste modo como uma variável de bloqueio na transição da linguagem natural para a linguagem algébrica, o que vai ao encontro do defendido por Kieran[326] que menciona que equacionar um problema, transição da linguagem natural para a linguagem algébrica, é uma área comum de dificuldades.

8.8.3.2 - Evidências - Análise da resolução da ficha de trabalho "*Resolução de inequações do 1.º grau*"

[326] Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*. NCTM, pp.707-762.

<u>Evidências da questão 1 a) da ficha de trabalho "*Resolução de inequações do 1.º grau*"</u>

Margarida

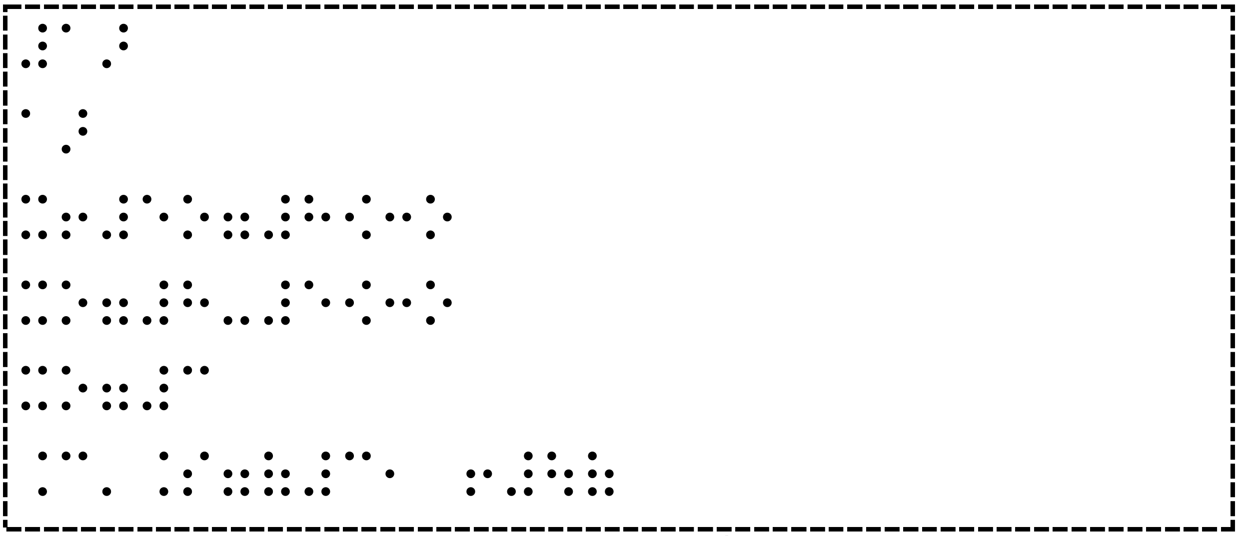


Figura 132: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea a) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

1)

a)

x + 5 ≥ 8⇔

x ≥ 8 - 5⇔

x≥3

C.S=[3, +∞[

Figura 132A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea a) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

Figura 133: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea a) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

1)

a)

x + 5 ≥ 8⇔

x≥3

S=]3, +∞[

Figura 133A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea a) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

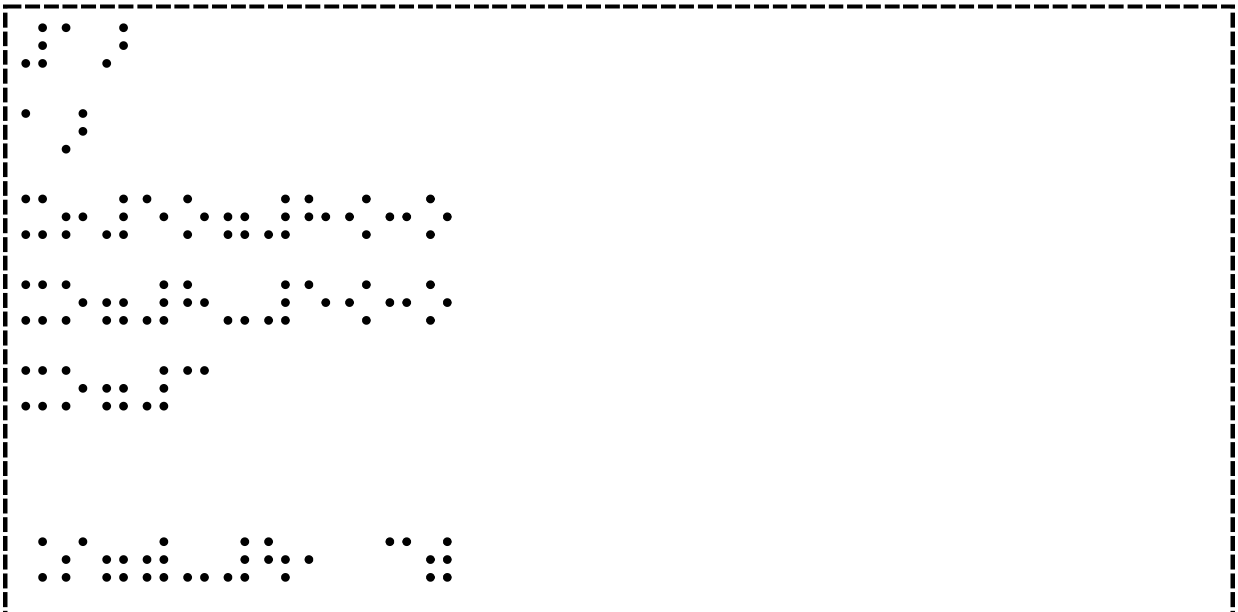


Figura 134: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea a) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

1)

a)

x + 5 ≥ 8⇔

x ≥ 8 – 5⇔

x≥3

S=]-∞, 3]

Figura 134A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea a) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Evidencia-se que os alunos conhecem e sabem aplicar as regras de resolução de inequações. Os erros cometidos pelos alunos assentam na representação do conjunto-solução da inequação.

<u>Evidências da questão 1 b) da ficha de trabalho "*Resolução de inequações do 1.º grau*"</u>

Margarida

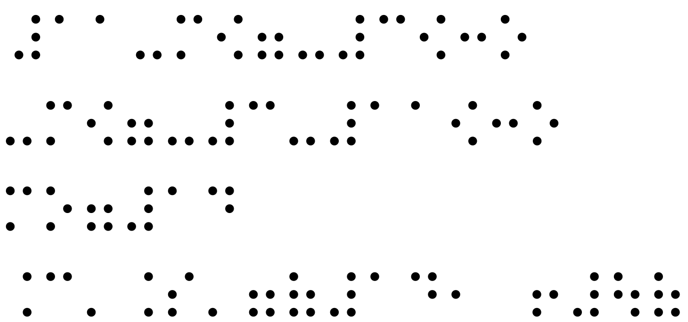


Figura 135: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea b) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

11 – m ≤ -3⇔

-m ≤ -3 -11⇔

m ≥ 14

C.S.=[14, +∞[

Figura 135A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea b) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

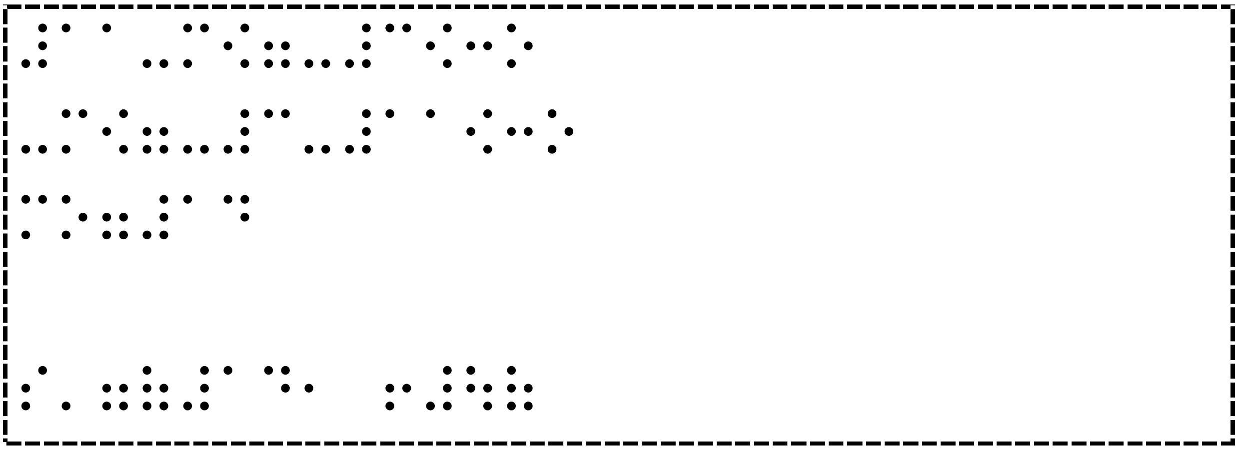


Figura 136: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea b) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

11 – m ≤ -3⇔

-m ≤ -3 -11⇔

m ≥ 14

S.=[14, +∞[

Figura 136A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea b) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

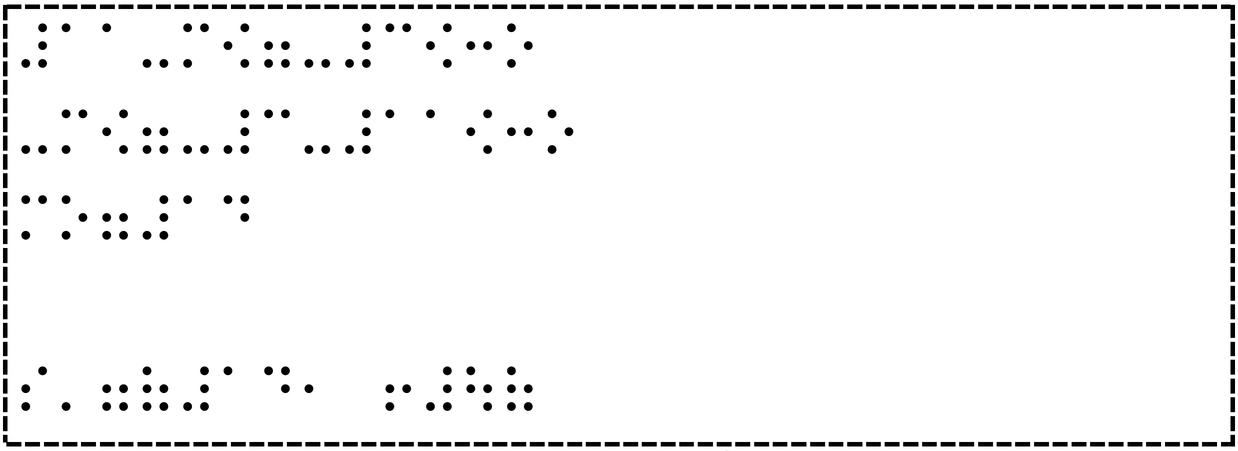


Figura 137: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea b) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

$11 - m \leq -3 \Leftrightarrow$

$-m \leq -3 - 11 \Leftrightarrow$

$m \geq 14$

S.=$[14, +\infty[$

Figura 137A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea b) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Evidências da questão 1 c) da ficha de trabalho "*Resolução de inequações do 1.º grau*"

Margarida

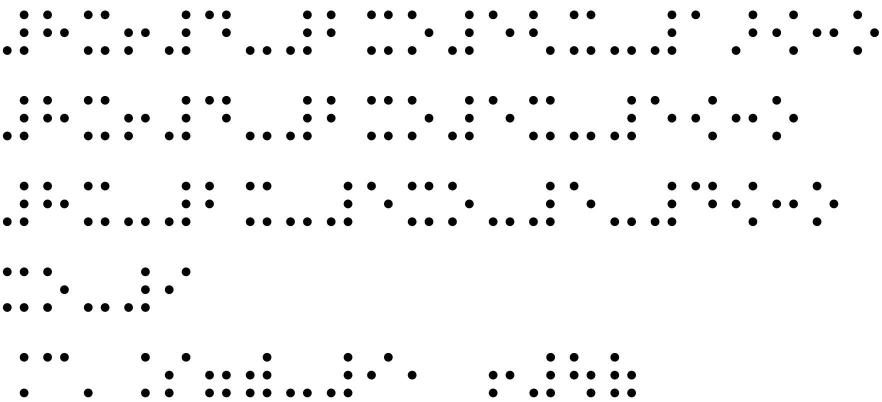


Figura 138: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea c) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

$8x + 4 - 2x > 5(x - 1) \Leftrightarrow$

$8x + 4 - 2x > 5x - 5 \Leftrightarrow$

$8x - 2x - 5x > -5 - 4 \Leftrightarrow$

$x > -9$

C.S=$]-9, +\infty[$

Figura 138A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea c) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

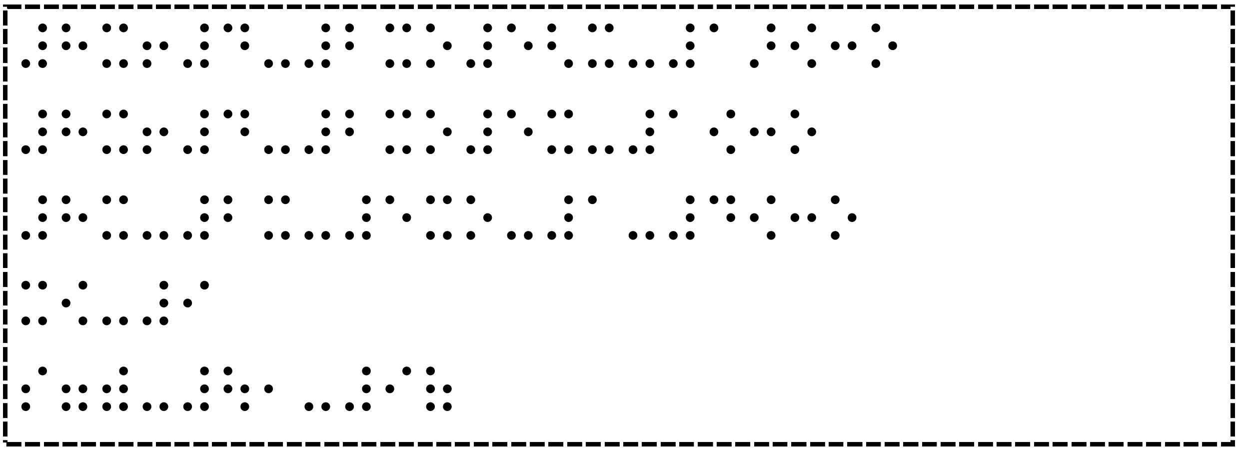


Figura 139: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea c) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

8x + 4 -2x > 5(x - 1)⇔

8x + 4 – 2x > 5x - 1⇔

8x – 2x – 5x > -1 - 4⇔

x < -9

S=]-∞, -9[

Figura 139A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea c) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

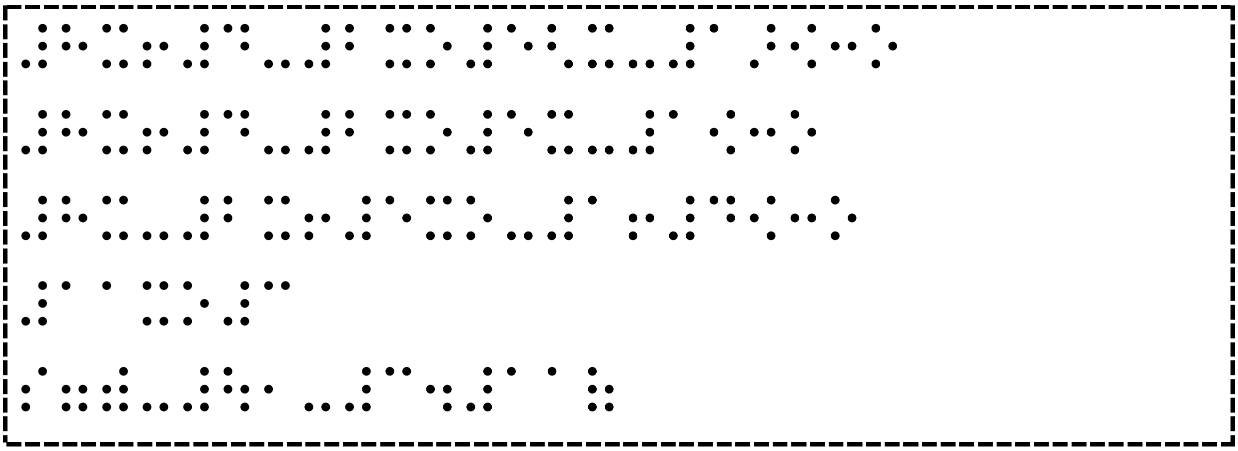


Figura 140: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea c) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

$8x + 4 - 2x > 5(x - 1) \Leftrightarrow$

$8x + 4 – 2x > 5x - 1 \Leftrightarrow$

$8x – 2x + 5x > -1 + 4 \Leftrightarrow$

$11x > 3$

$S =]-\infty, 3 \div 11[$

Figura 140A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea c) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Evidências da questão 1 d) da ficha de trabalho "*Resolução de inequações do 1.º grau*"

Margarida

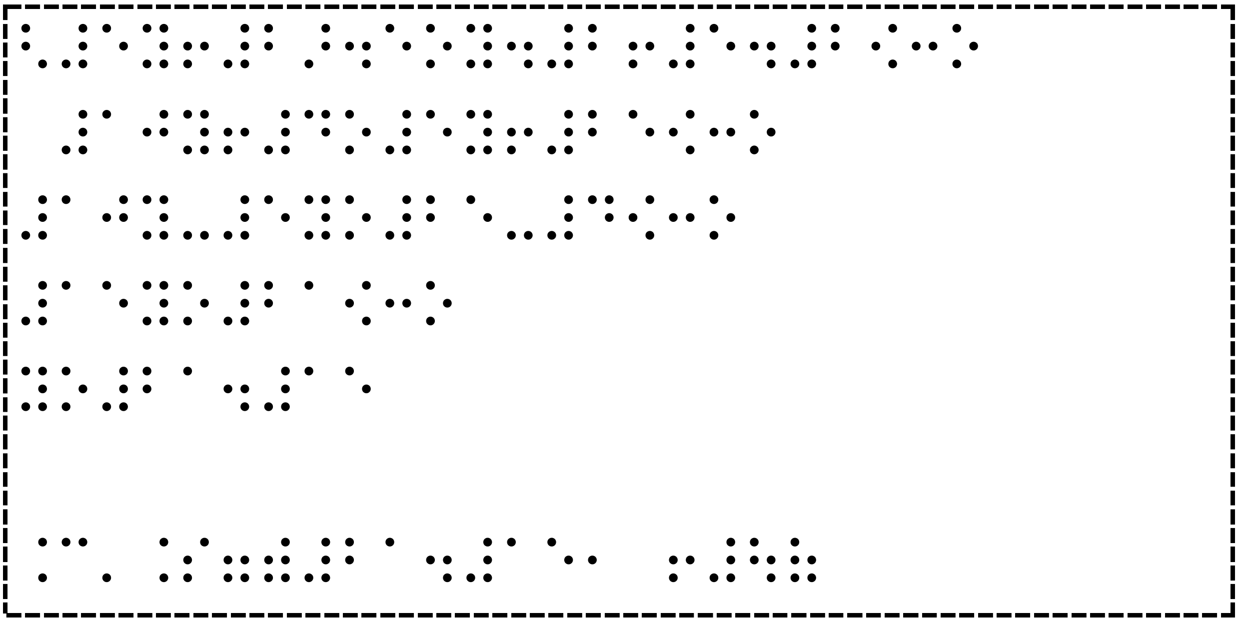


Figura 141: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea d) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

$(5y+2) \div 5 > y \div 2 + 5 \div 2 \Leftrightarrow$

$10y + 4 > 5y + 25 \Leftrightarrow$

$10y – 5y > 25 - 4 \Leftrightarrow$

$15y > 21 \Leftrightarrow$

$y > 21 \div 15$

$C.S=]21\div15, +\infty[$

Figura 141A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea d) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

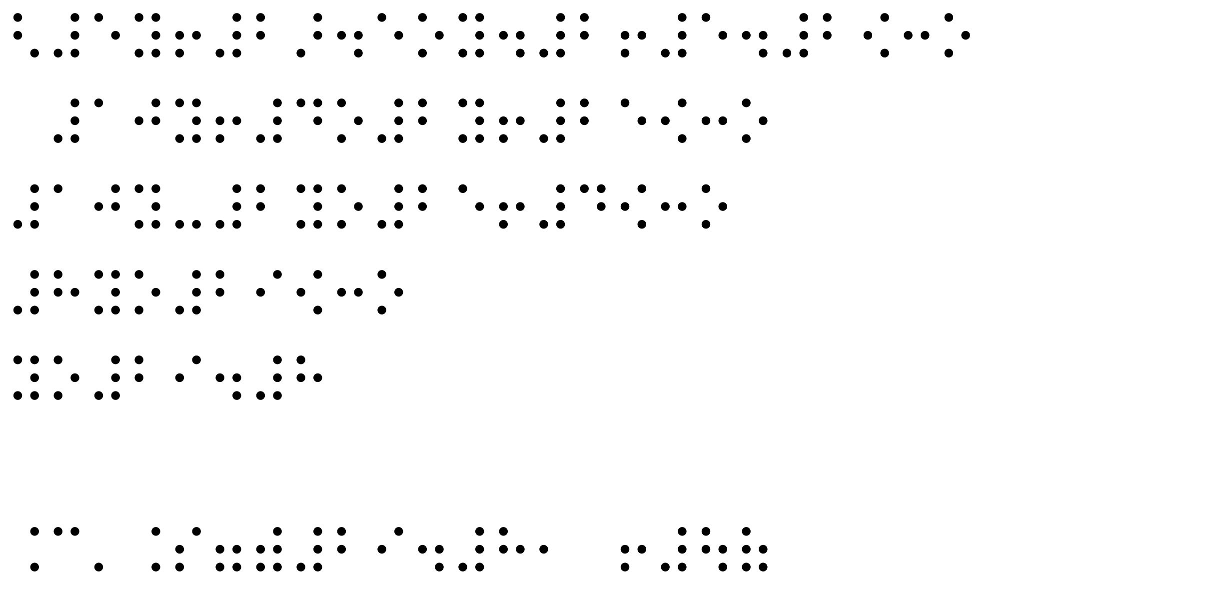


Figura 142: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea d) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

$(5y+2)\div5 > y\div2 + 5\div2\Leftrightarrow$

$10y + 4 > 2y + 25\Leftrightarrow$

$10y - 2y >25 + 4\Leftrightarrow$

$8y > 29\Leftrightarrow$

$y > 29\div8$

$C.S=]29\div8, +\infty[$

Figura 142A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea d) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

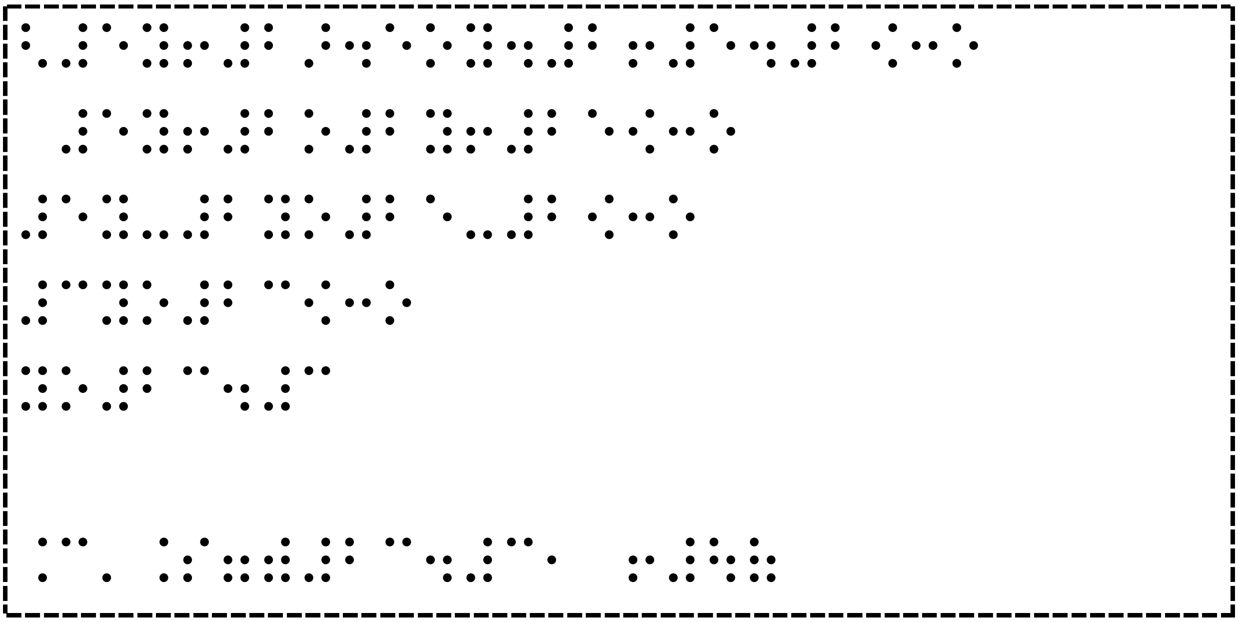


Figura 143: Extrato da resolução em Braille da questão 1) alínea d) da ficha de trabalho -*Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

(5y+2)÷5 > y÷2 + 5÷2⇔

5y + 2 > 2y + 25⇔

5y – 2y >25 - 2⇔

3y > 23⇔

y > 23÷3

C.S=]23÷3, +∞[

Figura 143A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1) alínea d) da ficha de trabalho - *Resolução de inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Constata-se pela análise das explorações, que de um modo geral, os alunos adquiriram as regras de resolução de inequações, contudo são evidentes erros de transposição, de adição de termos semelhantes e não semelhantes, de igualar ao mesmo denominador e na representação do respetivo conjunto-solução das inequações.

Verificou-se ao longo da resolução das diferentes inequações que quanto maior for as expressões maiores as dificuldades por parte dos alunos cegos em resolvê-las.

Constata-se que não é fácil a leitura das mesmas e acresce a dificuldade quando confrontados com denominadores, pelo que algumas vezes se verifica que os alunos estão a raciocinar corretamente mas escrevem outra coisa totalmente diferente daquilo que vai no pensamento.

8.8.3.3 - Evidências - Análise da resolução da ficha de trabalho "*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau*"

Esta ficha de trabalho consiste na resolução de situações problemáticas usando inequações. Assim, com a realização desta ficha de trabalho, pretendia-se verificar se os alunos seguiram os passos que são usados para resolver situações problemáticas, abordados em contexto sala de aula.

Evidências do problema 1 da ficha de trabalho "*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau*"

Margarida

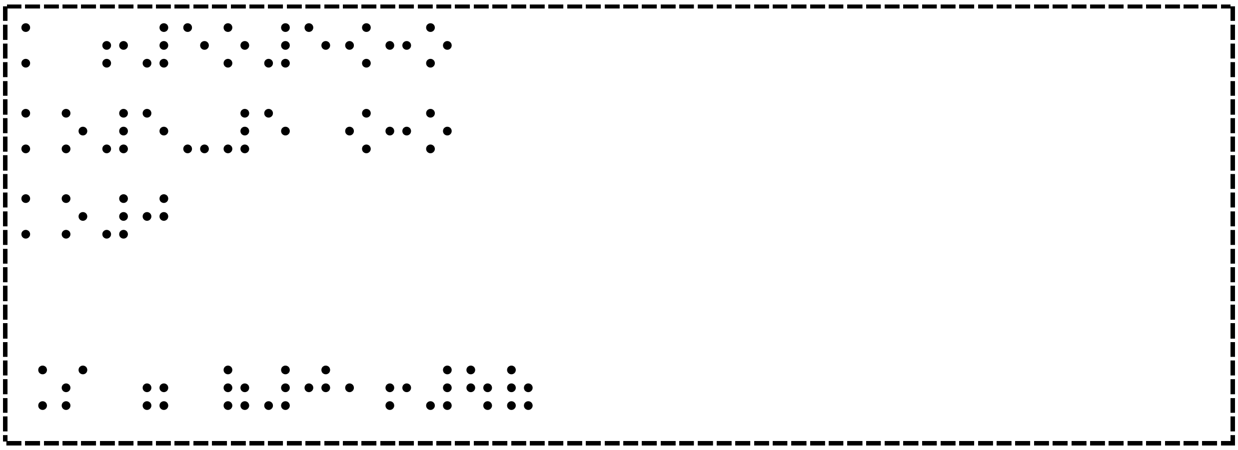


Figura 144: Extrato da resolução em Braille do problema 1 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

1)

$k + 5 > 5 \Leftrightarrow$

$k > 5 - 5 \Leftrightarrow$

$k > 0$

$S = [0, +\infty[$

Figura 144A: Transcrição do extrato da resolução do problema 1 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

Figura 145: Extrato da resolução em Braille do problema 1 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

1)

$k + 5 > 5 \Leftrightarrow$

$k > 0$

Figura 145A: Transcrição do extrato da resolução do problema 1 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

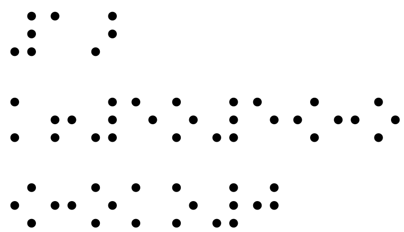


Figura 146: Extrato da resolução em Braille do problema 1 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

1)

$k + 5 > 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k > 0$

Figura 146A: Transcrição do extrato da resolução do problema 1 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Verifica-se que os alunos recorreram a uma representação algébrica para resolver a situação problemática. Contudo, nenhum deles respondeu corretamente ao problema, na medida em que a aluna Margarida apresenta uma resposta recorrendo a um intervalo de números reais, mas faz de forma errada, enquanto que os alunos Rafael e Pedro não apresentam qualquer resposta ao problema, limitando-se apenas a resolver algebricamente a inequação por eles traduzida.

Evidências do problema 2 da ficha de trabalho "*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau*"

Margarida

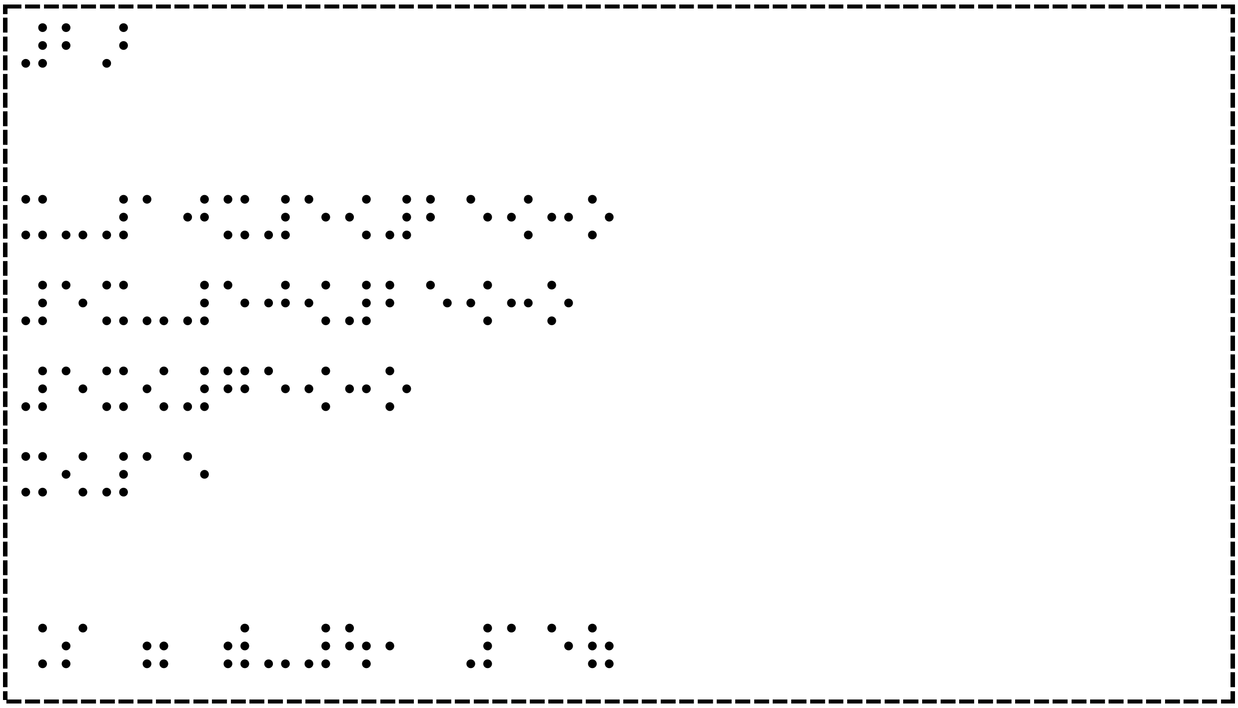


Figura 147: Extrato da resolução em Braille do problema 2 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

2)

x - 10 x 5 < 25⇔

5x – 50 < 25⇔

5x < 75⇔

x <15

S =]-∞, 15[

Figura 147A: Transcrição do extrato da resolução do problema 2 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

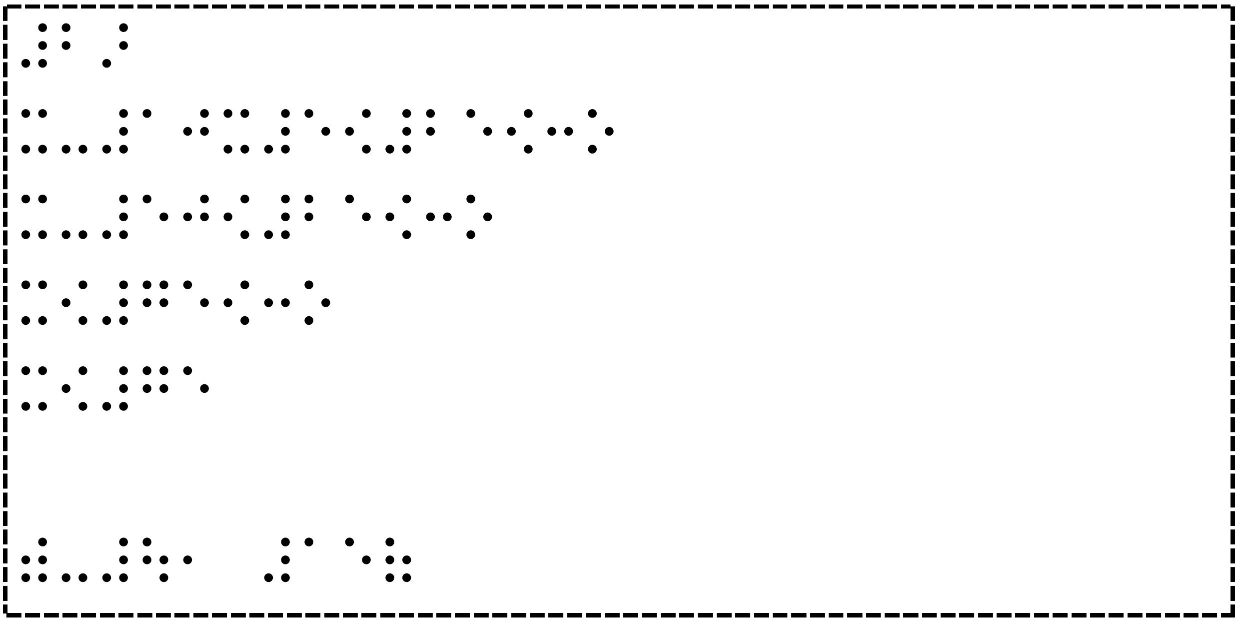


Figura 148: Extrato da resolução em Braille do problema 2 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

2)

x - 10 x 5 < 25⇔

x – 50 < 25⇔

x < 75⇔

x <75

]-∞, 15[

Figura 148A: Transcrição do extrato da resolução do problema 2 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

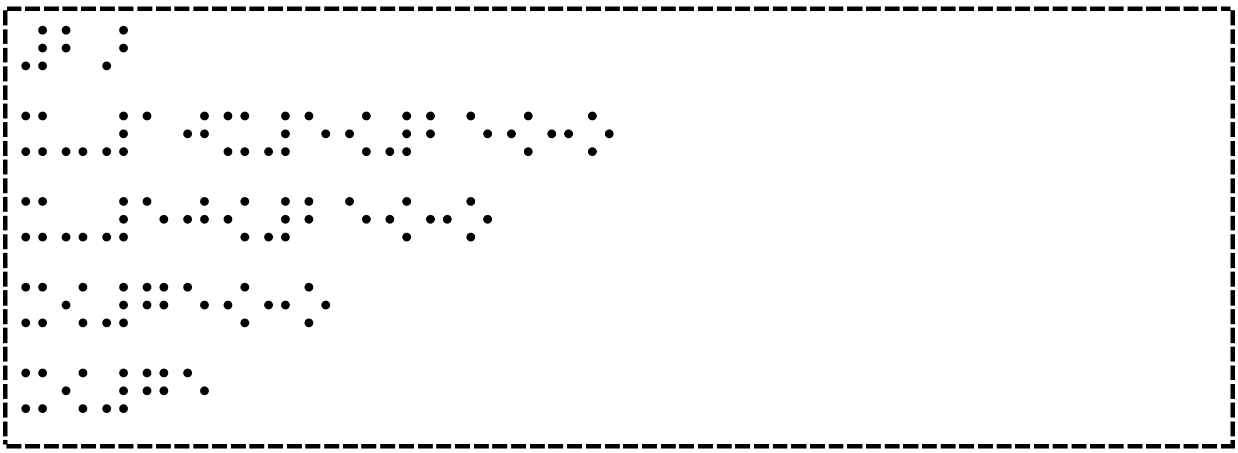


Figura 149: Extrato da resolução em Braille do problema 2 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

2)

x - 10 x 5 < 25⇔

x – 50 < 25⇔

x < 75⇔

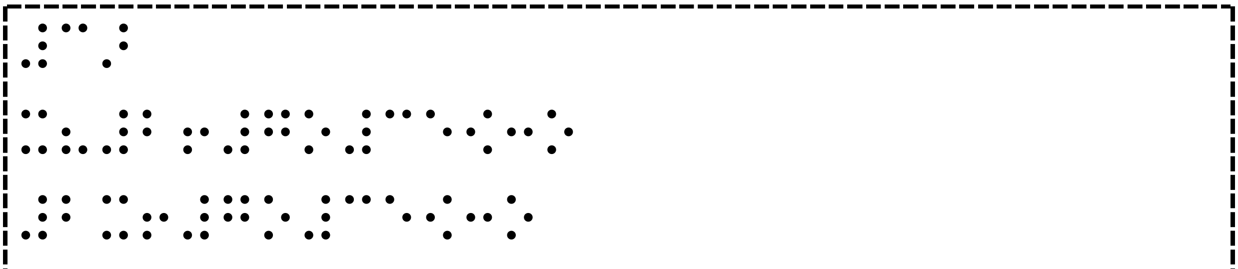
x <75

Figura 149A: Transcrição do extrato da resolução do problema 2 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Constata-se a preferência dos alunos na representação algébrica como forma de resolução da situação problemática. Contudo, todos os alunos escreveram a mesma expressão, tendo a aluna Margarida chegado à resposta correta, visto ter aplicado a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição embora não tenha colocado os devidos parênteses na inequação. Os alunos Rafael e Pedro traduzem por uma expressão também incorreta, mas resolvem corretamente a inequação, aplicando convenientemente as regras de prioridade das operações.

<u>Evidências do problema 3 da ficha de trabalho "*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau*"</u>

Margarida



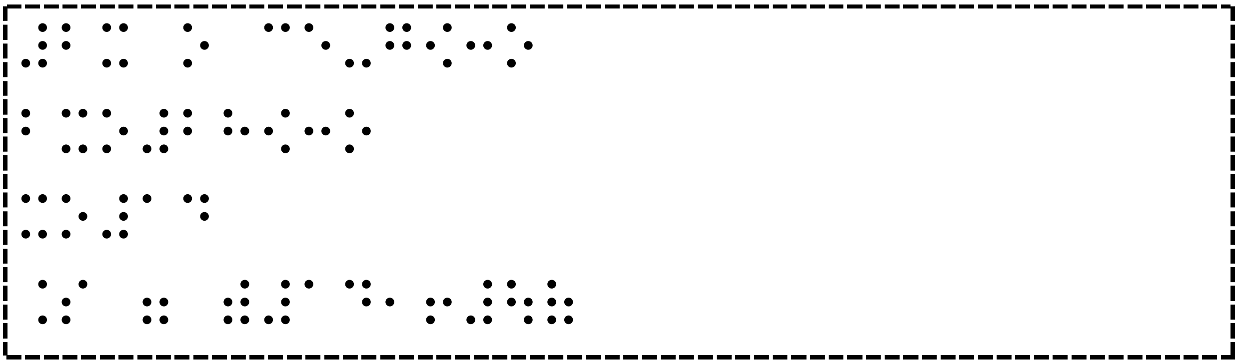


Figura 150: Extrato da resolução em Braille do problema 3 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

3)

x x 2 + 7 > 35⇔

2x + 7 > 35⇔

2x > 35 - 7⇔

2x > 28⇔

x > 14

S =]14, +∞[

Figura 150A: Transcrição do extrato da resolução do problema 3 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

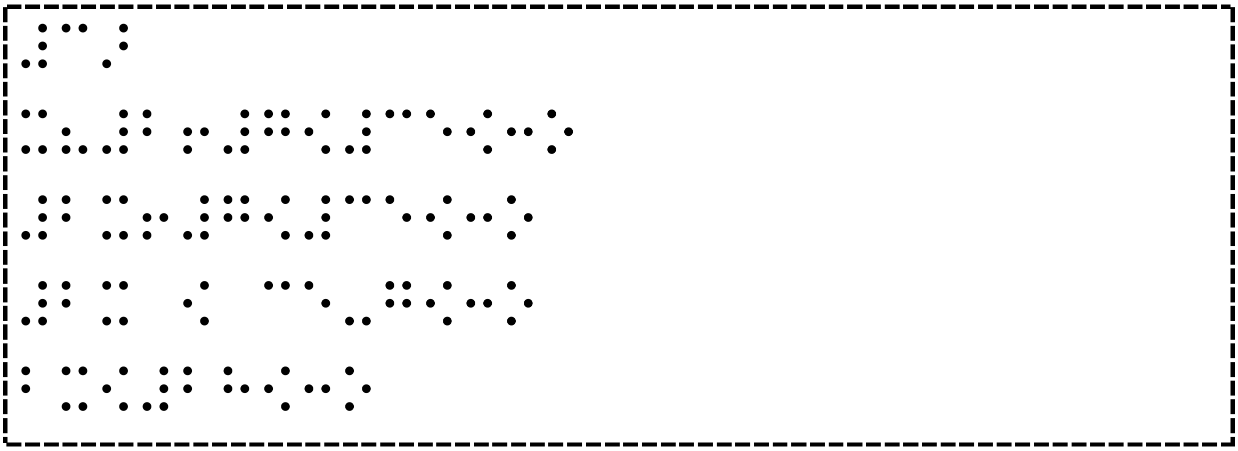


Figura 151: Extrato da resolução em Braille do problema 3 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

3)

$x \times 2 + 7 < 35 \Leftrightarrow$

$2x + 7 < 35 \Leftrightarrow$

$2x < 35 - 7 \Leftrightarrow$

$2x < 28 \Leftrightarrow$

$x > 14$

$]14, +\infty[$

Figura 151A: Transcrição do extrato da resolução do problema 3 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

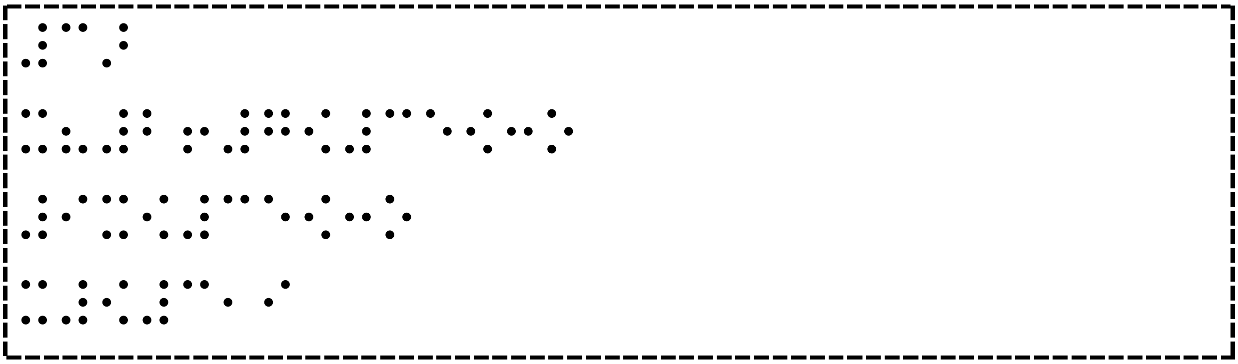


Figura 152: Extrato da resolução em Braille do problema 3 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

3)

x x 2 + 7 < 35⇔

9x< 35⇔

x < 3,9

Figura 152A: Transcrição do extrato da resolução do problema 3 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Através das explorações evidencia-se que os alunos Margarida e Rafael traduziram e resolveram corretamente a inequação e representaram corretamente o respetivo conjunto-solução. O aluno Pedro traduziu corretamente a situação problemática, contudo cometeu, na resolução da mesma, um erro de adição de termos não semelhantes e não representa o respetivo conjunto-solução.

<u>Evidências do problema 4 da ficha de trabalho "*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau*"</u>

Margarida

⠼⠙⠜

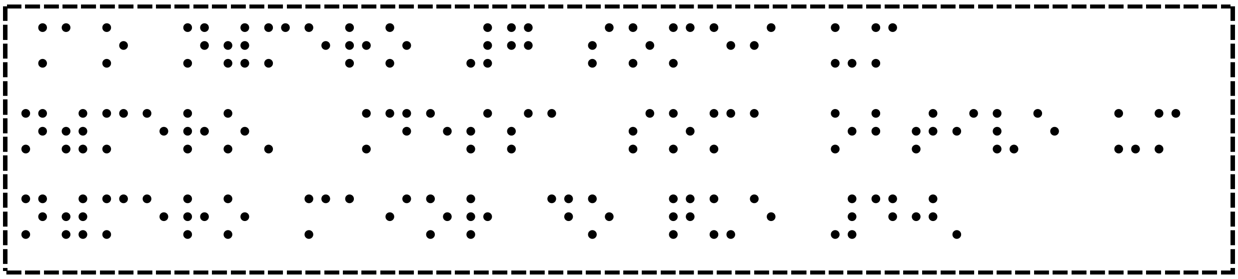


Figura 153: Extrato da resolução em Braille do problema 4 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

4)

Ao número 7 somei um número. Dessa soma obtive um número maior do que 40.

Figura 153A: Transcrição do extrato da resolução do problema 4 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael

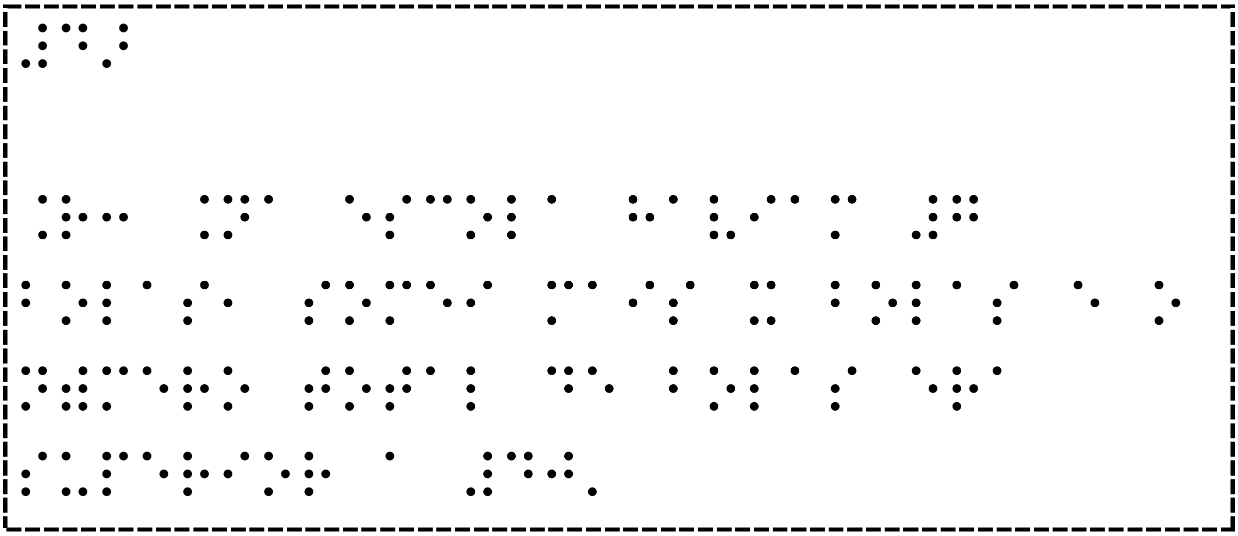


Figura 154: Extrato da resolução em Braille do problema 4 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

4)

R: Na escola haviam 7 bolas, somei mais x bolas e o número total de bolas era superior a 40.

Figura 154A: Transcrição do extrato da resolução do problema 4 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Pedro

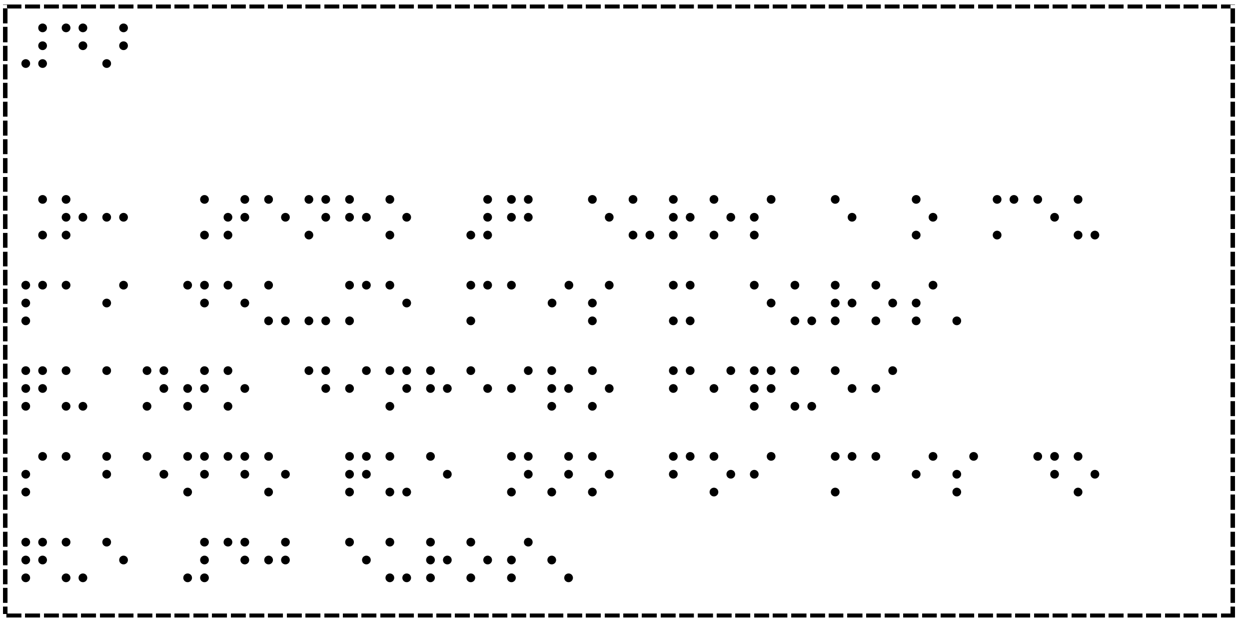


Figura 155: Extrato da resolução em Braille do problema 4 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

4)

R: Tenho 7 euros e o meu pai deu-me mais x euros. Quanto dinheiro fiquei sabendo que não foi mais do que 40 euros?

Figura 155A: Transcrição do extrato da resolução do problema 4 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Pedro

Da observação das explorações constata-se que tanto a aluna Margarida como o aluno Rafael não colocam a questão na sua situação problemática. Todos os alunos formularam em linguagem natural uma situação problemática traduzida por meio de uma inequação.

Evidências do problema 5 da ficha de trabalho "*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau*"

Margarida

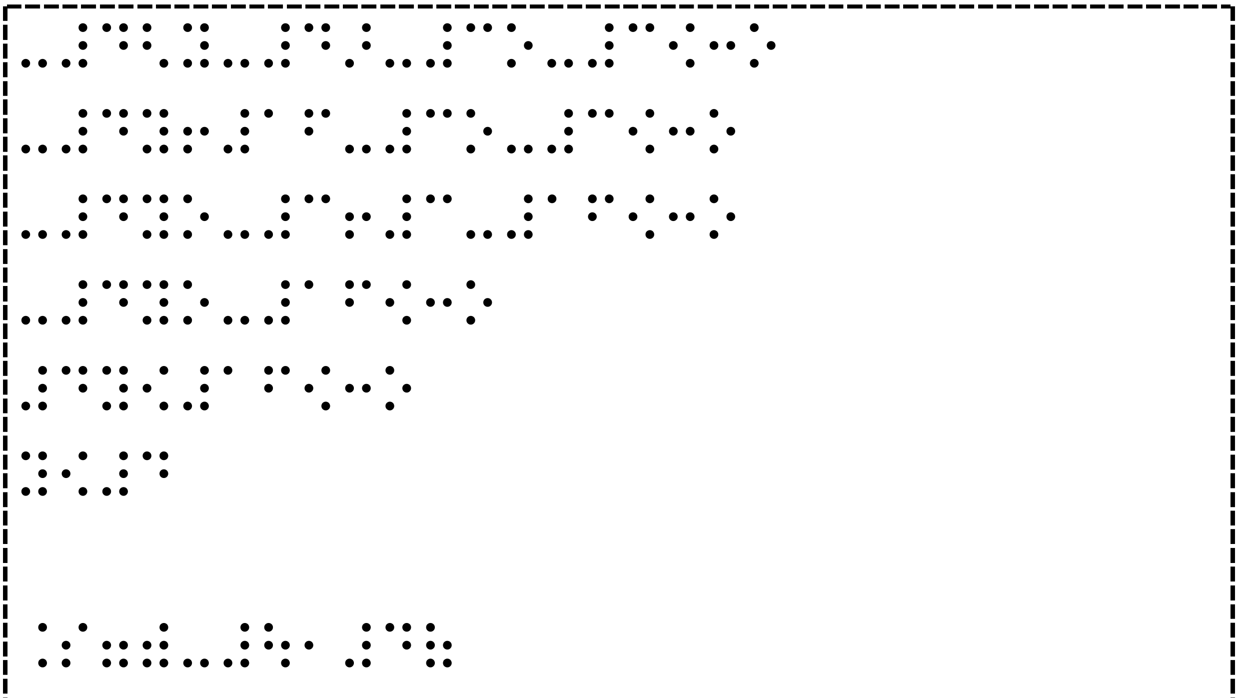


Figura 156: Extrato da resolução em Braille do problema 5 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

5)

$-4(y - 4) – 3 > -3 \Leftrightarrow$

$-4y + 16 – 3 > -3 \Leftrightarrow$

$-4y > -3 + 3 -16 \Leftrightarrow$

$-4y > -16 \Leftrightarrow$

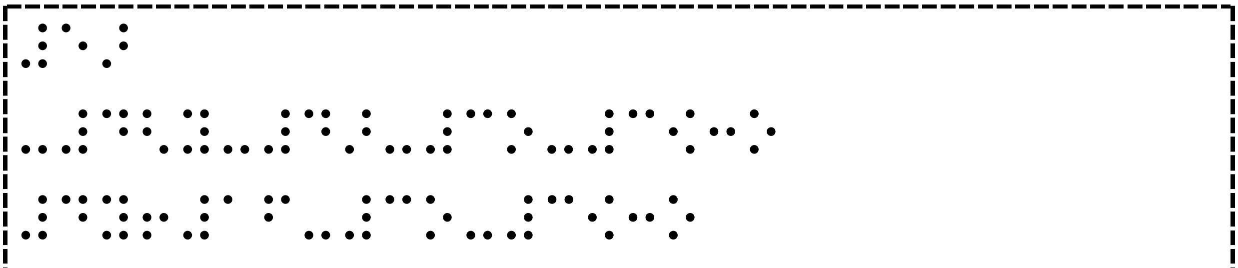
$4y < 16 \Leftrightarrow$

$y < 4$

$S =]-\infty, 4[$

Figura 156A: Transcrição do extrato da resolução do problema 5 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* da aluna Margarida

Rafael



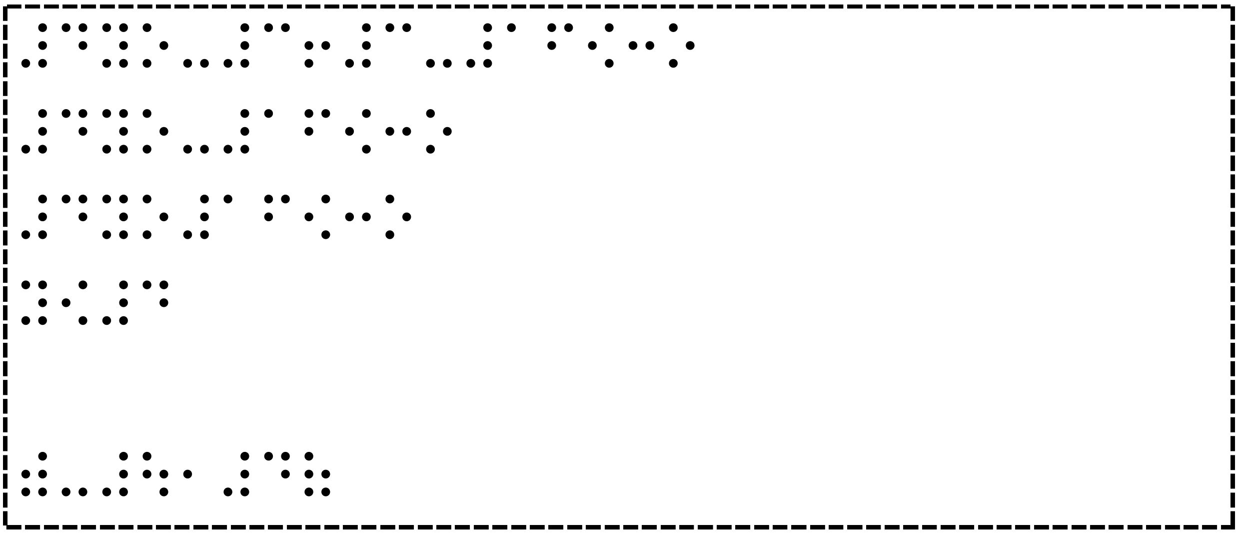


Figura 157: Extrato da resolução em Braille do problema 5 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

5)

-4(y - 4) – 3 > -3⇔

4y + 16 – 3 > -3⇔

4y > -3 + 3 -16⇔

4y > -16⇔

4y > 16⇔

y < 4

]-∞, 4[

Figura 157A: Transcrição do extrato da resolução do problema 5 da ficha de trabalho -*Resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau* do aluno Rafael

Relativamente ao problema 5, a aluna Margarida resolve-o corretamente e apresenta o respetivo conjunto-solução. No que se refere ao aluno Rafael, comete um erro de sinal ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, resolvendo corretamente todos os passos seguintes da resolução da inequação. No que respeita ao aluno Pedro, este não conseguiu resolver o problema, tendo-se manifestado confuso, devido ao facto de não existir um sinal de desigualdade e onde é que poderia procurá-lo. Todavia, o professor interveio, no sentido de alertar o aluno para o facto de, no enunciado aparecer um intervalo de números reais, e o que isso quereria dizer, talvez estivesse aí a solução para o problema do aluno, mas mesmo assim o aluno não conseguiu resolver a questão.

Convém referir que esta questão e outras da mesma natureza foram exploradas na aula de apoio pedagógico acrescido seguinte.

8.9 – Evidências – Análise da resolução do Miniteste de Avaliação de Conhecimentos – *Equações e Inequações do 1.º grau a uma incógnita*

A fim de aferir os conhecimentos e as capacidades atingidas pelos alunos no âmbito Equações e Inequações do 1.º grau a uma incógnita num contexto mais formal realizou-se um Miniteste de avaliação, o qual constituiu também uma ferramenta de regulação das práticas utilizadas.

Evidências da questão 1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos

Esta questão tem como objetivo investigar qual a estratégia seguida pelos alunos de modo a descobrir o valor desconhecido, isto é, se recorrem à escrita e resolução da equação, se aplicam os princípios de equivalência na balança ou se adotam o método tentativa e erro.

Margarida

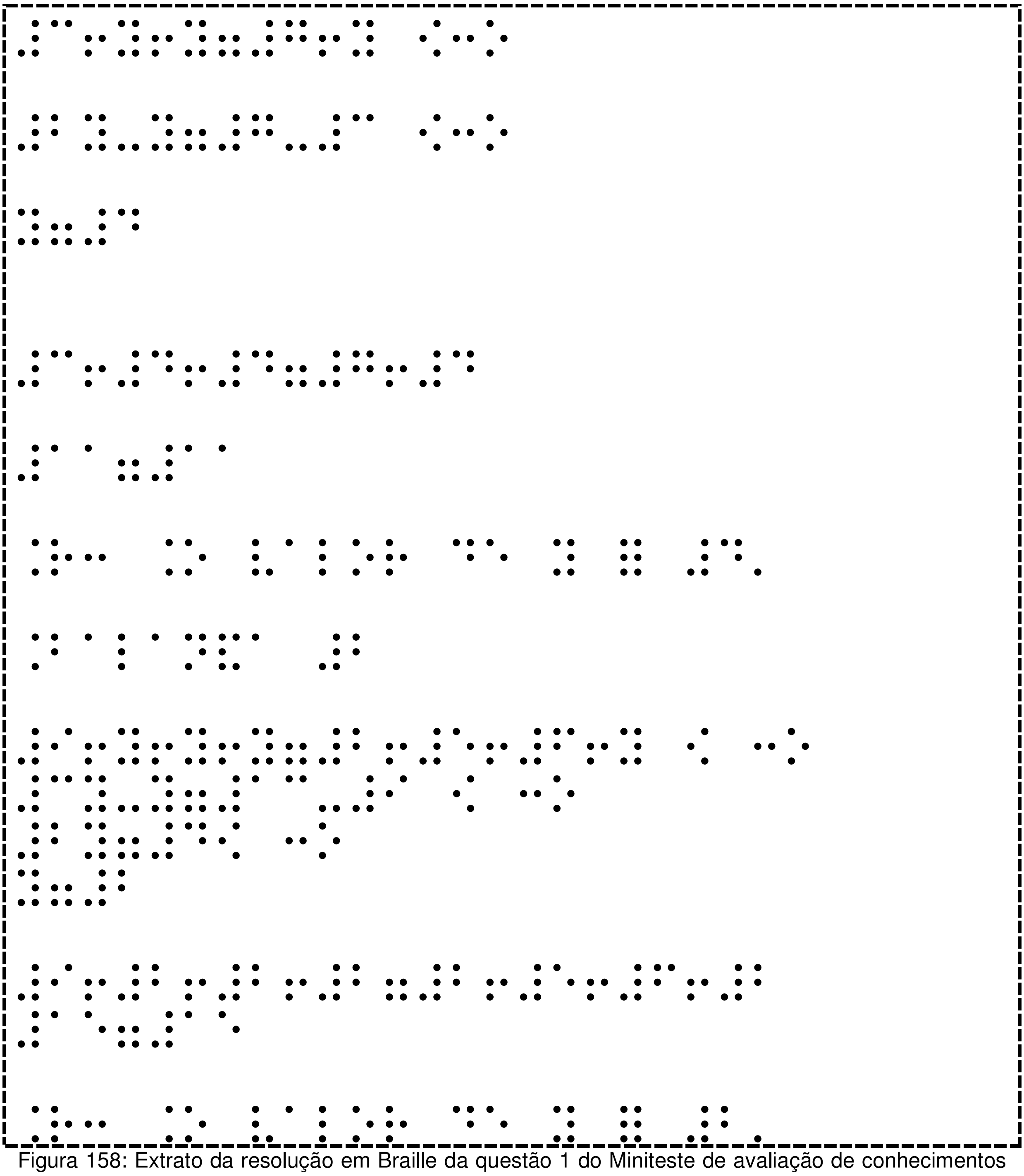


Figura 158: Extrato da resolução em Braille da questão 1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

$3 + y + y = 7 + y \Leftrightarrow$

$2y - y = 7 - 3 \Leftrightarrow$

$y = 4$

$3 + 4 + 4 = 7 + 4$

$11 = 11$

R: O valor de y é 4.

Balança 2

$9 + y + y + y = 2 + 5 + 6 + y \Leftrightarrow$
$3y - y = 13 - 9 \Leftrightarrow$
$2y = 4 \Leftrightarrow$
$y = 2$

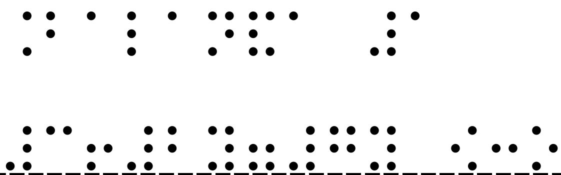
$9 + 2 + 2 + 2 = 2 + 5 + 6 + 2$
$15 = 15$

R : O valor de y é 2.

Figura 158A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Na resolução da questão 1, a aluna Margarida, equaciona e resolve corretamente a equação, faz a respetiva verificação e apresenta a resposta ao problema. Não evidenciou qualquer dificuldade de resolução.

Rafael



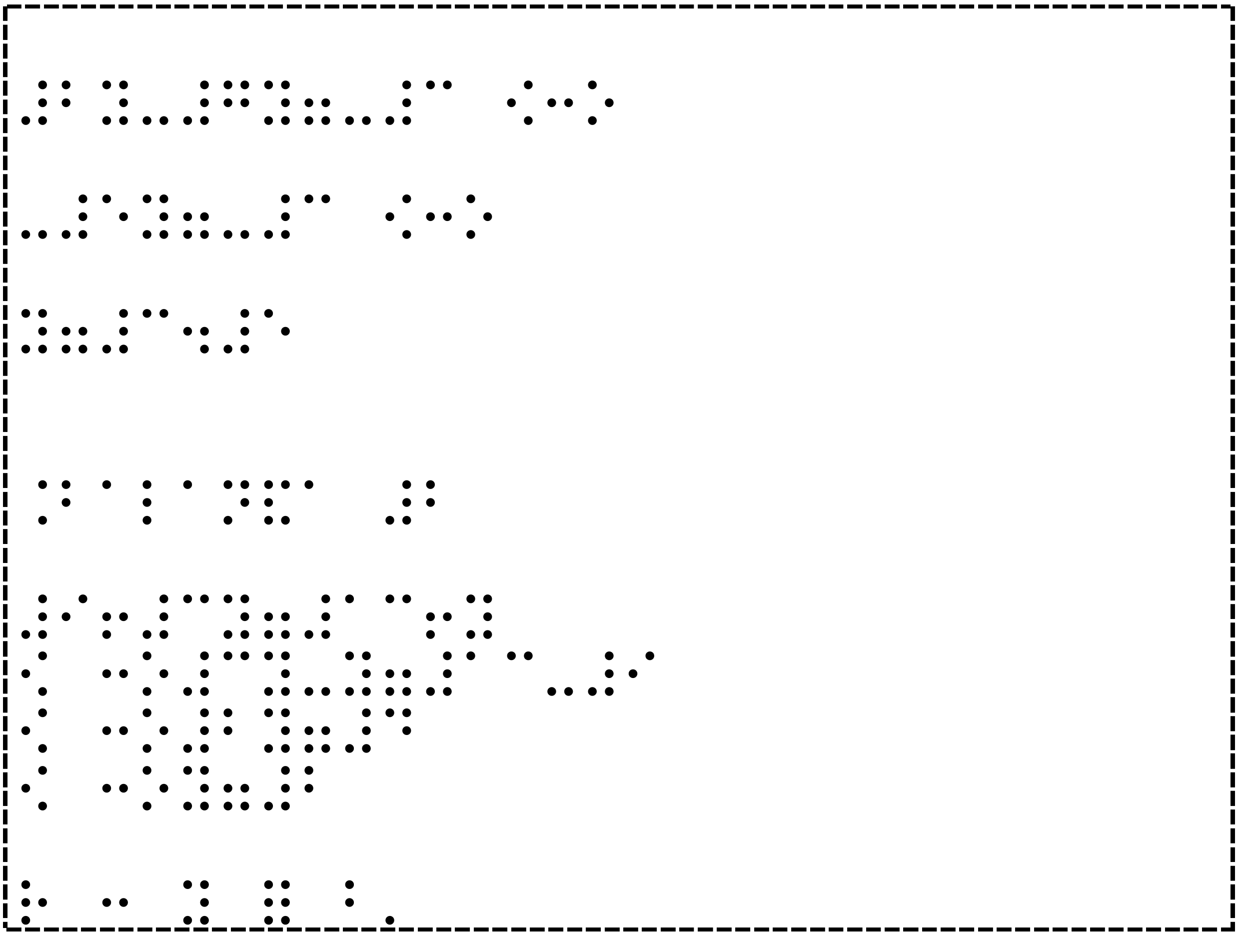


Figura 159: Extrato da resolução em Braille da questão 1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Balança 1

$3 + 2y = 7y \Leftrightarrow$

$2y – 7y = -3 \Leftrightarrow$

$-5y = -3 \Leftrightarrow$

$y = 3 \div 5$

Balança 2

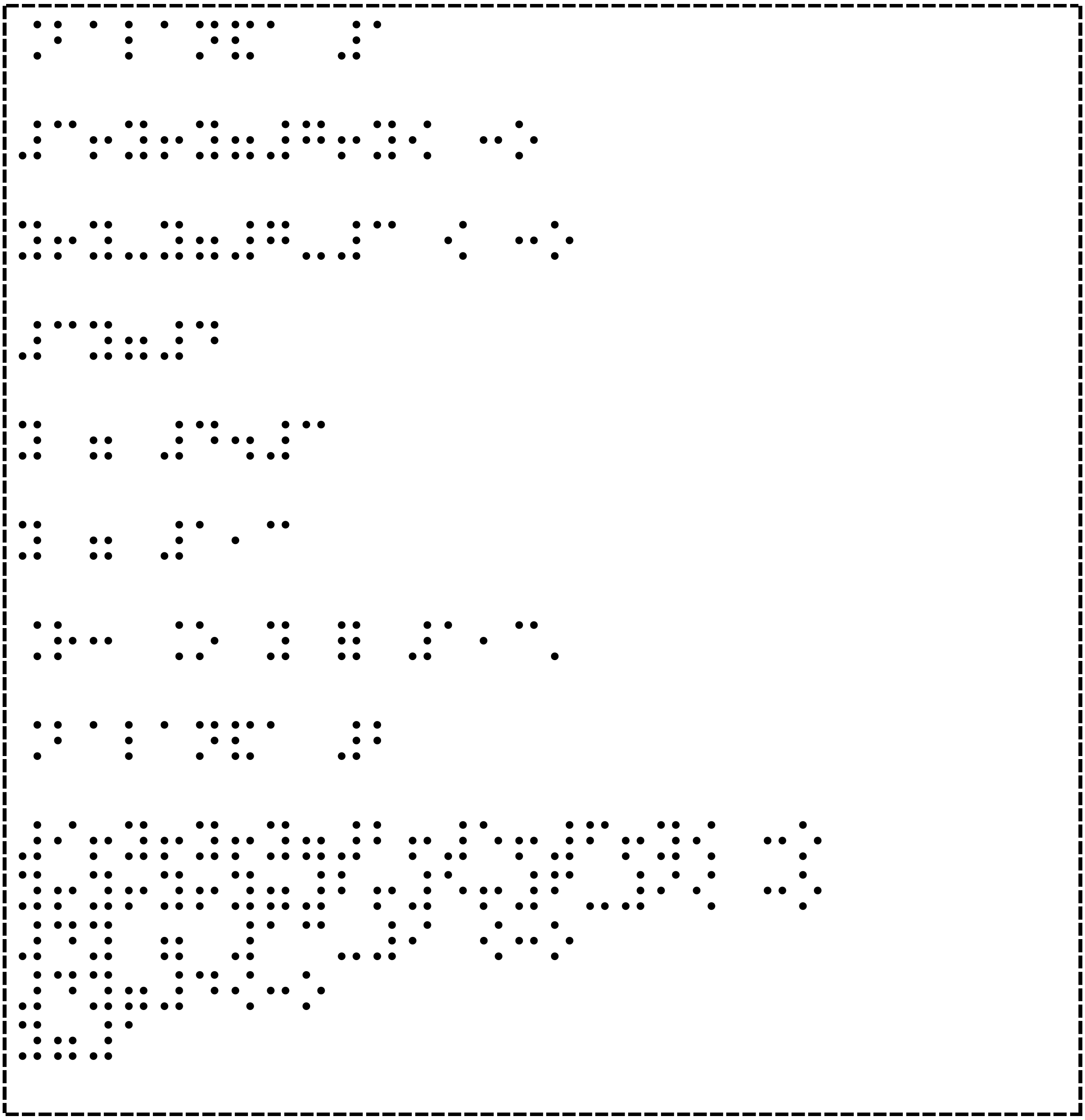
$9 + 3y = 13 + y$
$\Leftrightarrow 3y – y = 13 - 9$
$\Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 2$

R : y é 2.

Figura 159A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

O aluno Rafael, começa por escrever corretamente a expressão algébrica correspondente ao prato esquerdo da balança, mas comete um erro aquando da escrita da expressão relativa ao prato direito da mesma.

Pedro



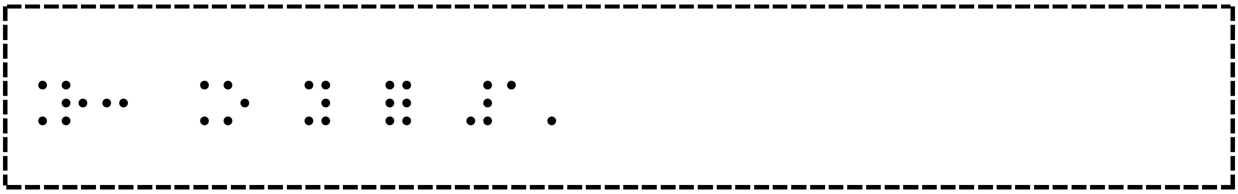


Figura 160: Extrato da resolução em Braille da questão 1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Balança 1

3 + y + y = 7 + y ⇔

y + y - y = 7 – 3 ⇔

3y = 4

y = 4 ÷ 3

y = 1,3

R: O y é 1,3.

Balança 2

9 + y + y + y = 2 + 5 + 6 + y ⇔
y + y + y + y = 2 + 5 + 6 – 9 ⇔
4y = 13 - 9 ⇔
4y = 4 ⇔
y = 1

R : O y é 1.

Figura 160A: Transcrição do extrato da resolução da questão 1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

O aluno Pedro equaciona corretamente nas duas balanças. Contudo, em ambas as balanças o aluno comete erros, na balança 1, adiciona incorretamente termos não semelhantes, enquanto que na balança 2, faz uma transposição incorreta de termos.

<u>Evidências da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos</u>

Margarida

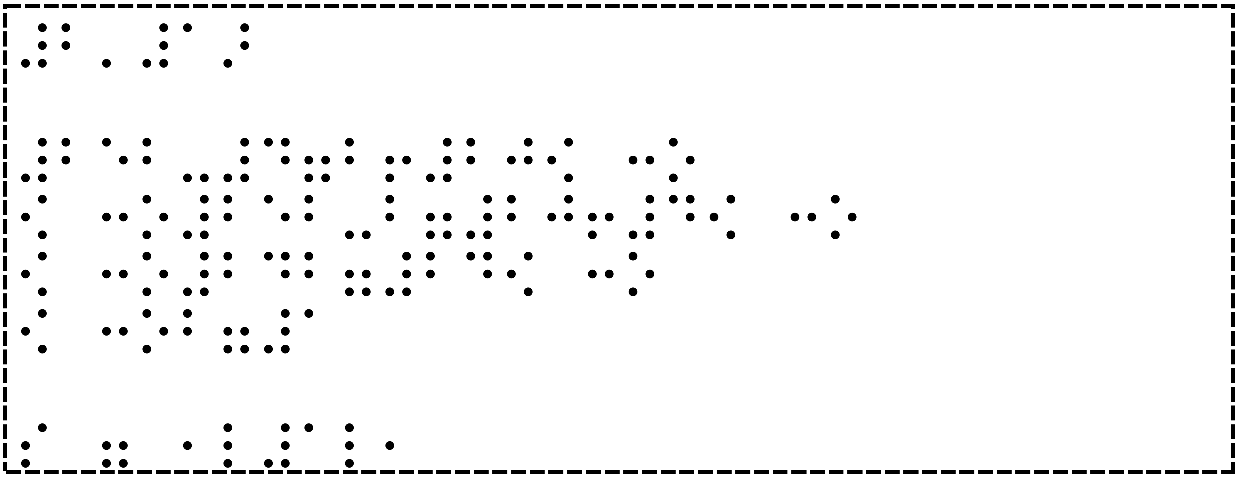


Figura 161: Extrato da resolução em Braille da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

2.1)

25b – 4 = b + 20⇔
⇔25b – b = 20+4⇔
⇔24b = 24⇔
⇔b=1

S = {1}

Figura 161A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

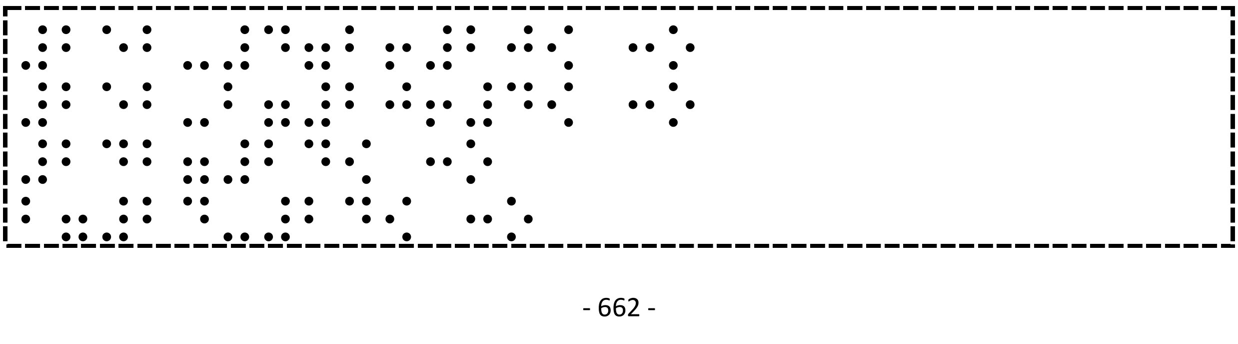


Figura 162: Extrato da resolução em Braille da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

$25b - 4 = b + 20 \Leftrightarrow$
$25b - b = 20+4 \Leftrightarrow$
$24b = 24 \Leftrightarrow$
$b = 24-24 \Leftrightarrow$
$b = 0$

$S = \{0\}$

Figura 162A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Pedro

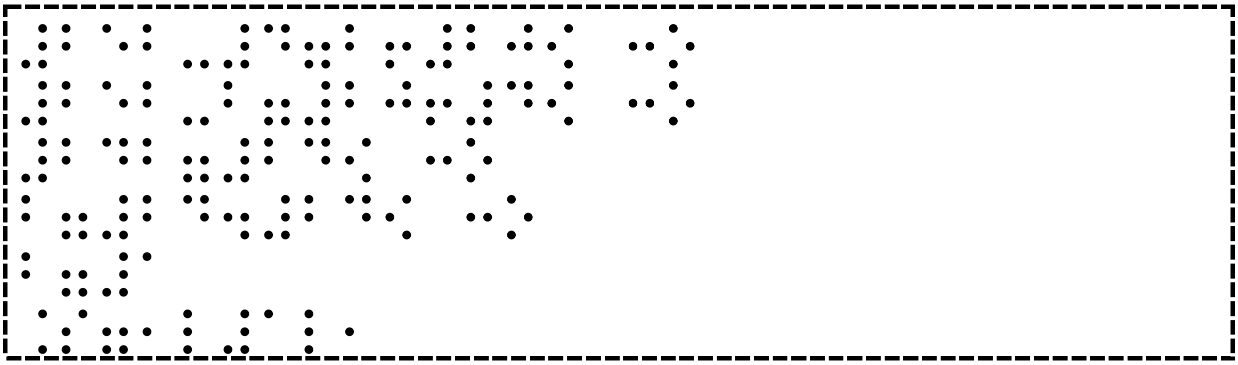


Figura 163: Extrato da resolução em Braille da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

$25b - 4 = b + 20 \Leftrightarrow$
$25b - b = 20+4 \Leftrightarrow$
$24b = 24 \Leftrightarrow$
$b = 24 \div 24 \Leftrightarrow$
$b = 1$

$S = \{1\}$

Figura 163A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Da análise das explorações constata-se que a aluna Margarida e Pedro não sentiram quaisquer dificuldades na resolução da equação. Todavia, o aluno Rafael apresenta uma conclusão incorreta da resolução da equação.

Evidências da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos

Margarida

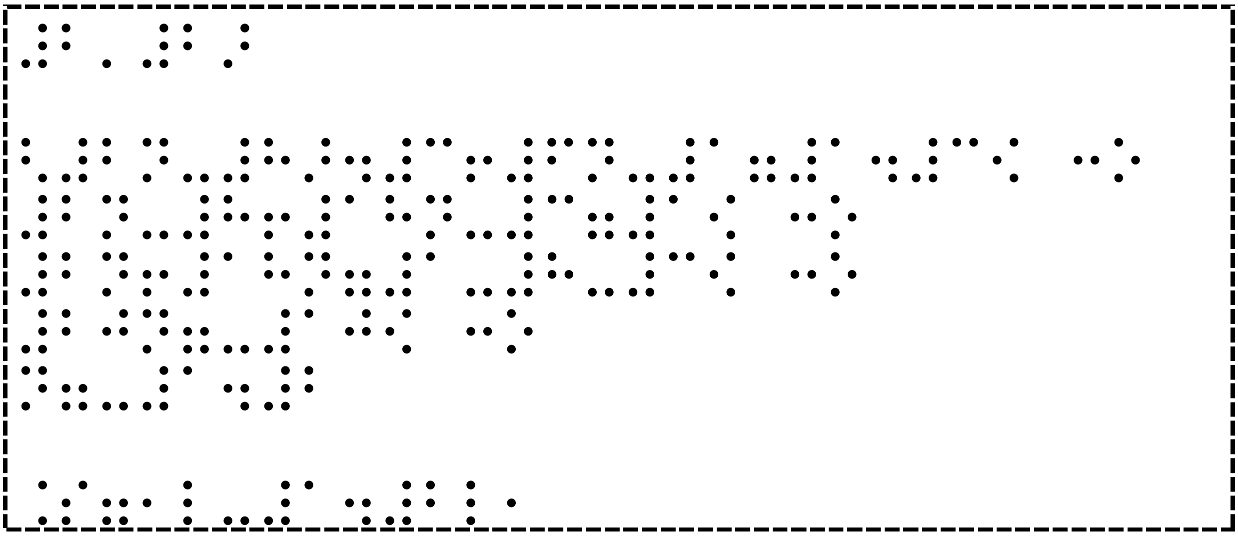


Figura 164: Extrato da resolução em Braille da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

2.2)

(2n – 8)÷3+6n-1=1÷3⇔
2n – 8 +18n -3 = 1⇔
2n+18n = 1 – 8 - 3⇔
20n = -10⇔

n = -1÷2

S = {-1÷2}

Figura 164A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

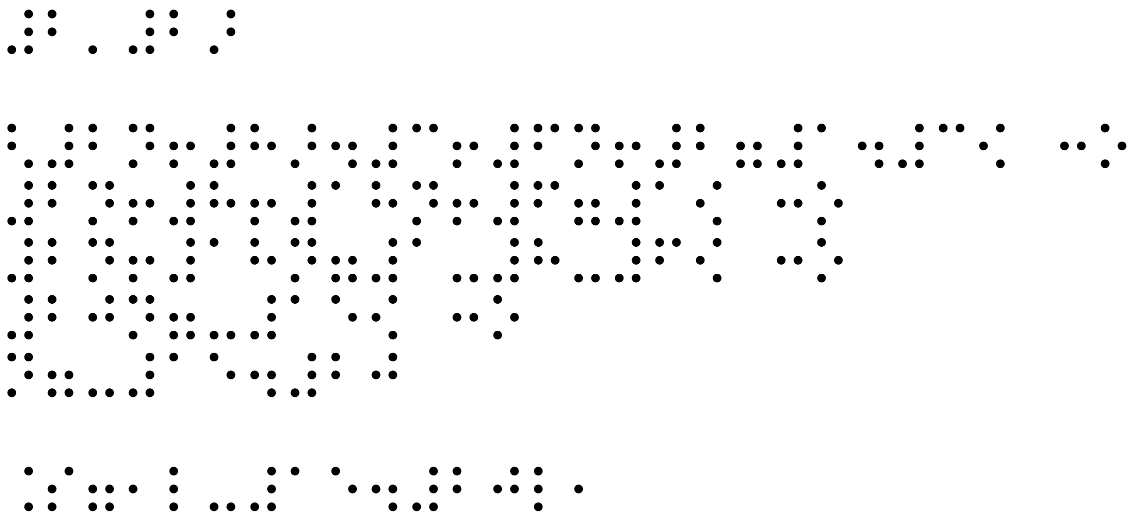


Figura 165: Extrato da resolução em Braille da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

2.2)

(2n + 8)÷3+6n+2=1÷3⇔
2n + 8 +18n +6 = 1⇔
2n+18n = 1 - 8 - 6⇔
20n = -15⇔
n = -15÷20

S = {-15÷20}

Figura 165A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Pedro

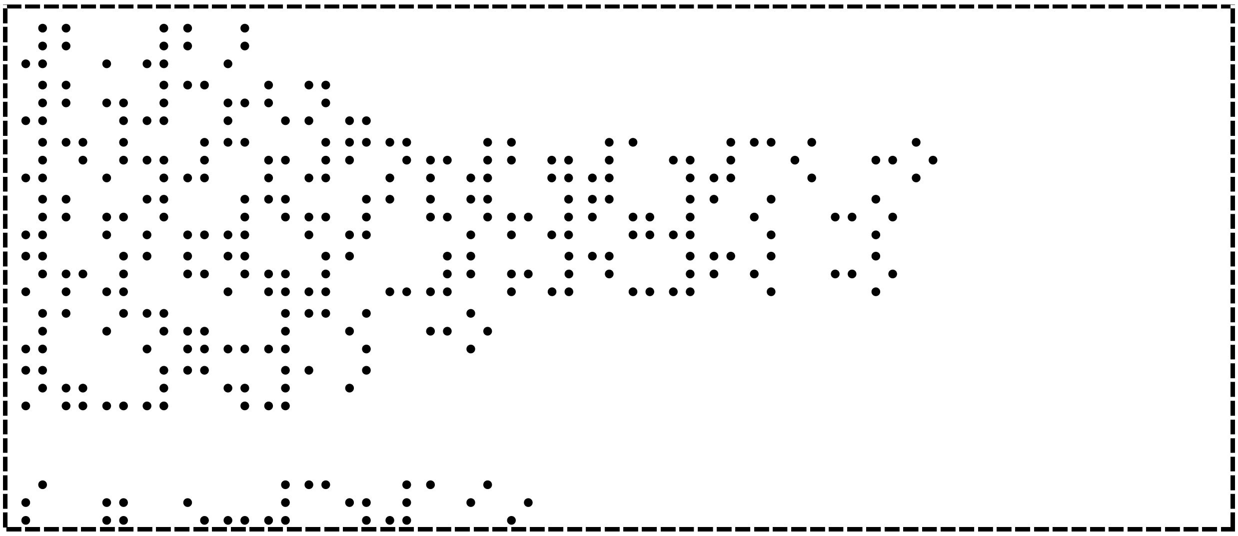


Figura 166: Extrato da resolução em Braille da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

2.2)

2÷3 + (n - 4)÷3+6n+2=1÷3⇔
2 + n – 4 +18n +6 = 1⇔
n+18n = 1 - 2 + 4 - 6⇔
19n = -3⇔
n = -3÷19

S = {-3÷19}

Figura 166A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Observa-se uma enorme dificuldade de resolução desta equação, os alunos cometem diversos erros, erros ao nível da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, contudo o mesmo aluno, na mesma questão evidencia saber aplicar a referida propriedade, erros na transposição de termos e erros na adição de termos semelhantes.

É de referir que todos os alunos sentiram dificuldades relativamente à utilização de parênteses, bem como nos denominadores. A complexidade desta equação, em termos de escrita, contribuiu para que os alunos se perdessem na resolução da mesma, na medida em que a aplicação de certas propriedades na mesma equação umas vezes são feitas de forma incorreta e outras de forma correta.

Evidências da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos

Margarida

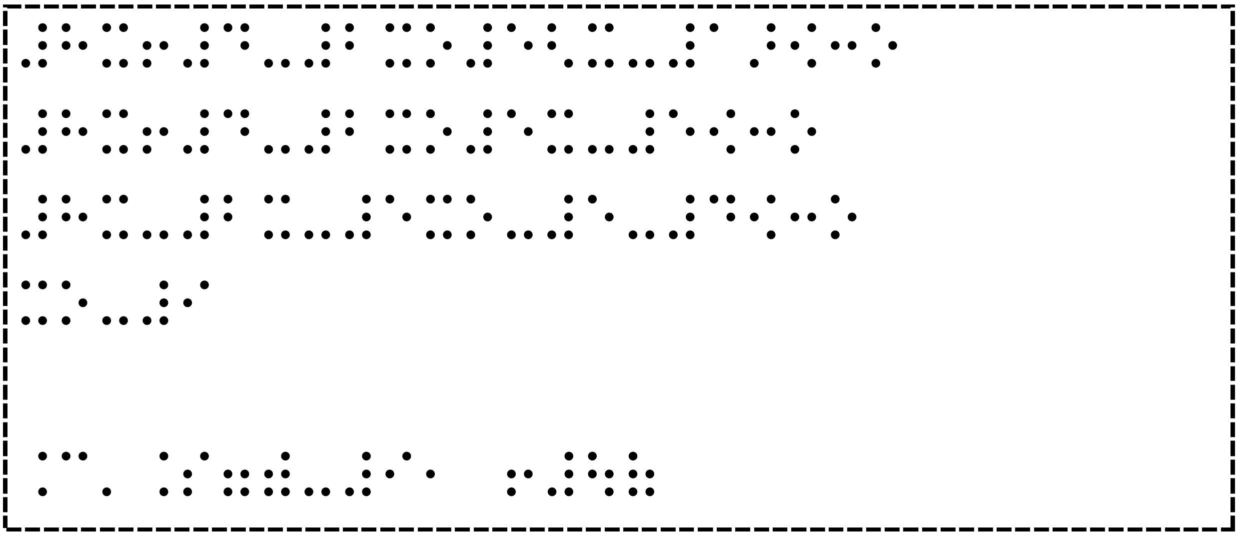


Figura 167: Extrato da resolução em Braille da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

$8x + 4 -2x > 5(x - 1)\Leftrightarrow$

$8x + 4 - 2x > 5x - 5\Leftrightarrow$

$8x - 2x - 5x > -5 - 4\Leftrightarrow$

$x > -9$

$C.S=]-9, +\infty[$

Figura 167A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

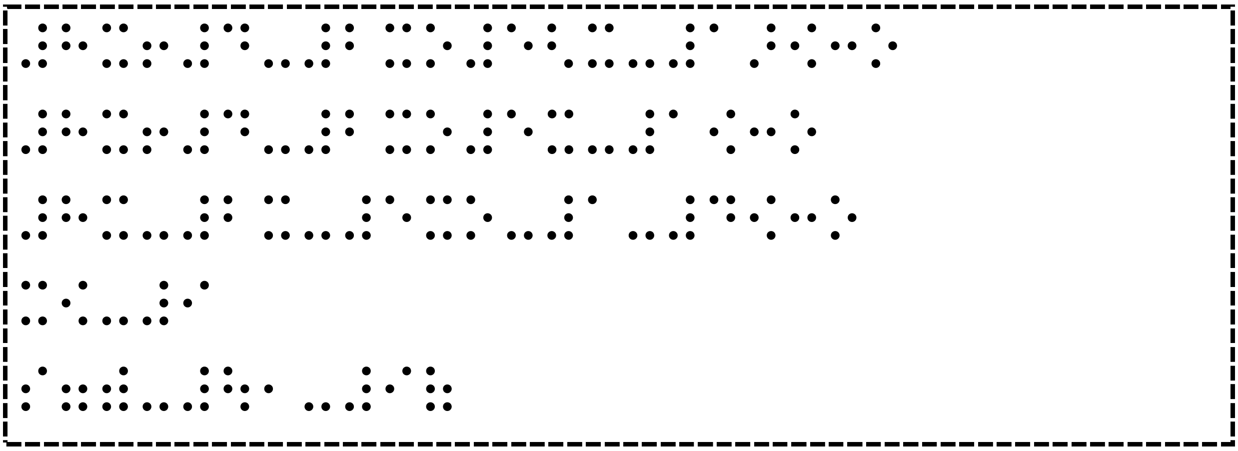


Figura 168: Extrato da resolução em Braille da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

$8x + 4 -2x > 5(x - 1)\Leftrightarrow$

$8x + 4 - 2x > 5x - 1\Leftrightarrow$

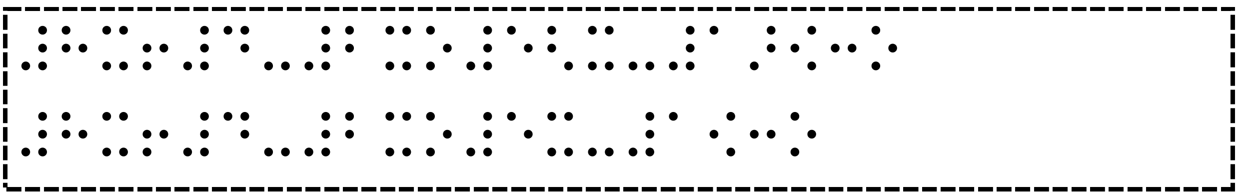
$8x - 2x - 5x > -1 - 4\Leftrightarrow$

$x < -9$

$S=]-\infty, -9[$

Figura 168A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Pedro



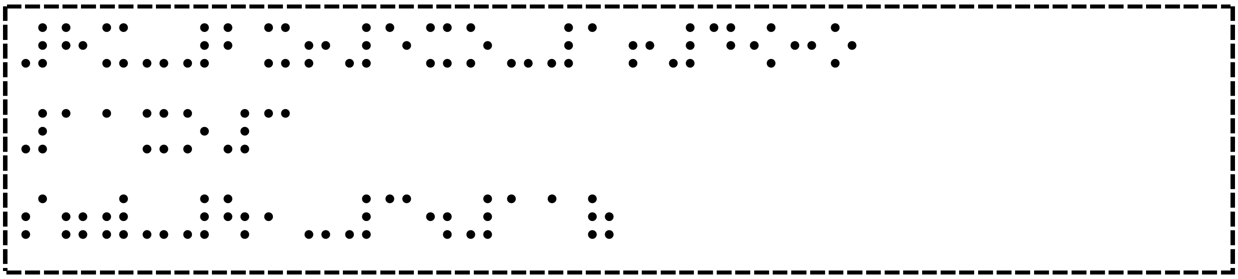


Figura 169: Extrato da resolução em Braille da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

8x + 4 -2x > 5(x - 1)⇔

8x + 4 – 2x > 5x - 1⇔

8x – 2x + 5x > -1 + 4⇔

11x >3

S=]-∞, 3÷11[

Figura 169A: Transcrição do extrato da resolução da questão 2.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Os alunos revelam conhecer as regras de resolução de inequações, contudo cometem erros ao nível: da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, adição de termos semelhantes e não semelhantes e por vezes na transposição de termos.

<u>Evidências da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos</u>

Margarida

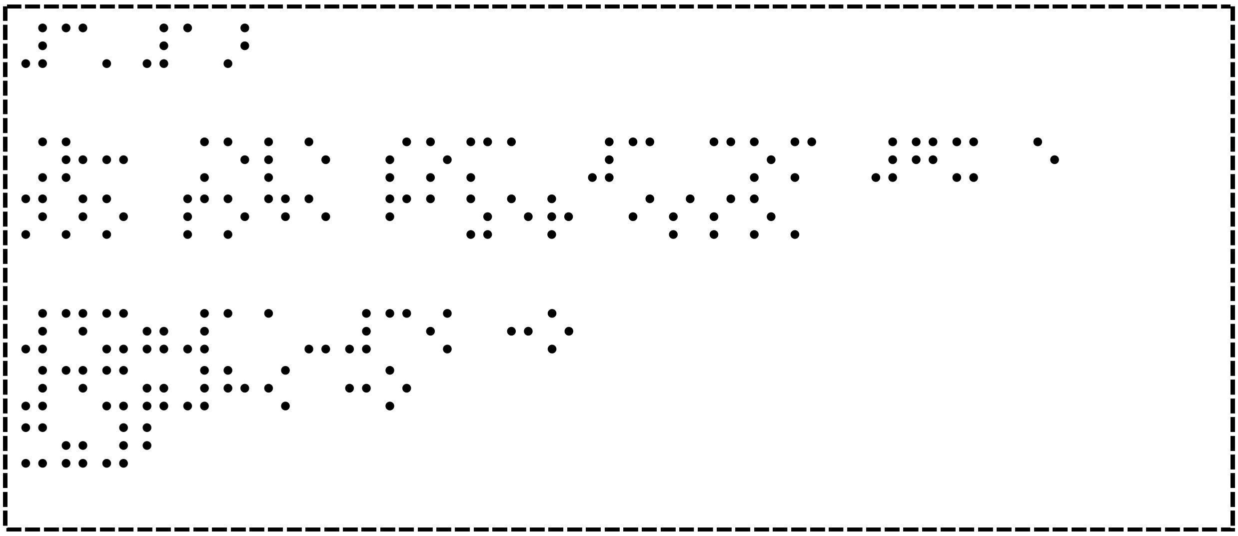


Figura 170: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

3.1)

R : Ele soma 3 com 7x e não pode fazer isso.

4x = 11 - 3⇔
4x = 8⇔
x = 2

Figura 170A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

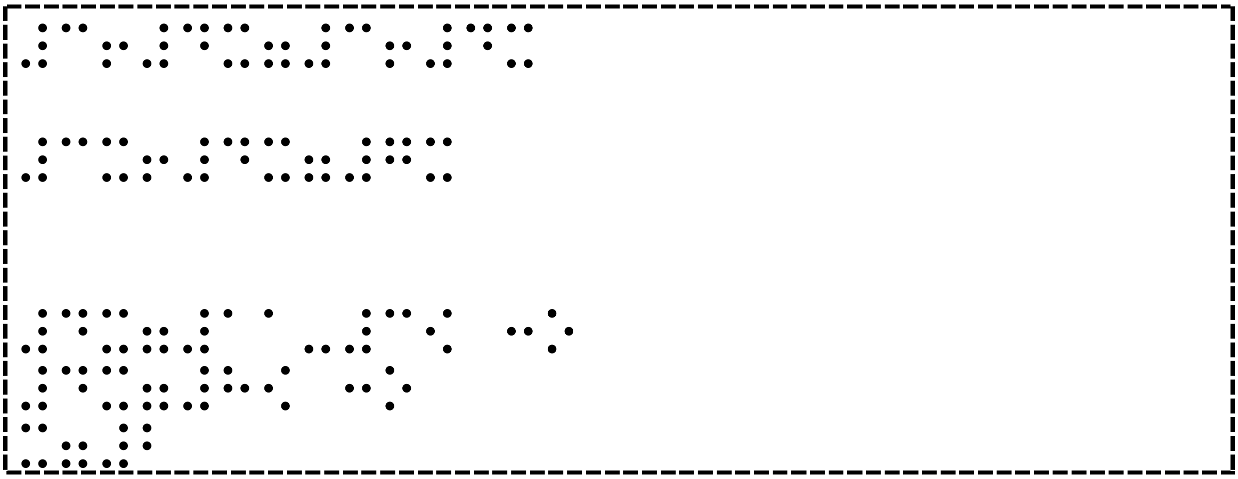


Figura 171: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

3.1)

3 + 4x = 3 + 4x

3x + 4x = 7x

4x = 11 - 3⇔
4x = 8⇔
x = 2

Figura 171A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Pedro

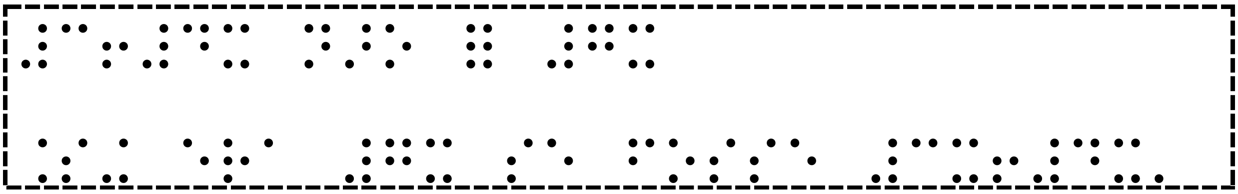


Figura 172: Extrato da resolução em Braille da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

3 + 4x não é 7x

Só era 7x se fosse 3x + 4x.

Figura 172A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.1 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

<u>Evidências da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos</u>

Margarida

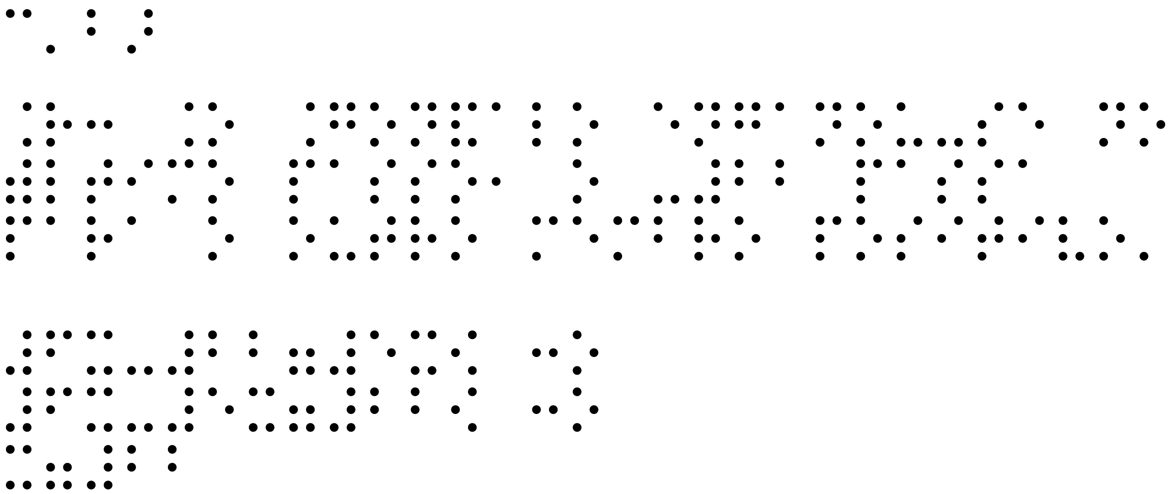


Figura 173: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

3.2)

R : O Gonçalo enganou-se no último passo, o -22 passa para o outro membro positivo.

6x – 22 = 5x⇔

6x – 5x = 22⇔
x = 22

Figura 173A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

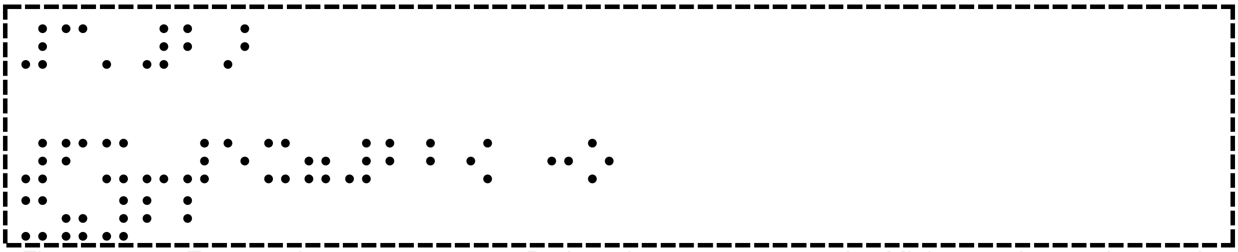


Figura 174: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

3.2)

6x – 5x = 22⇔
x = 22

Figura 174A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Pedro

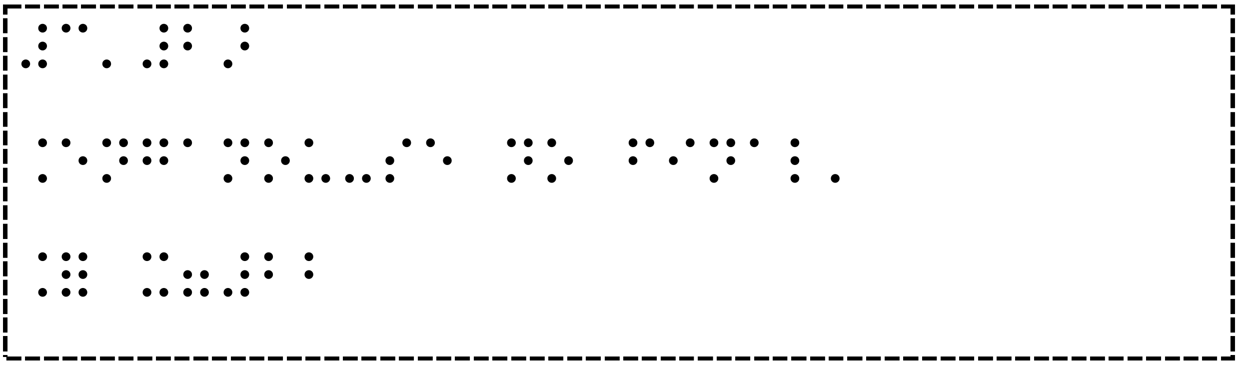


Figura 175: Extrato da resolução em Braille da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

3.2)

Enganou-se no final.

É x = 22

Figura 175A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.2 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Evidências da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos

Margarida

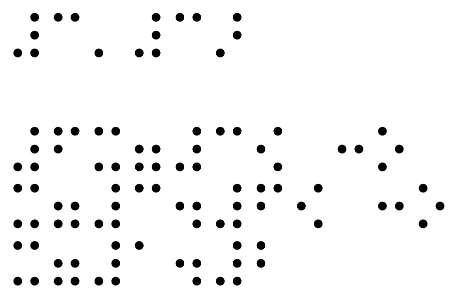


Figura 176: Extrato da resolução em Braille da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

3.3)

$6x = 3 \Leftrightarrow$
$x = 3 \div 6 \Leftrightarrow$
$x = 1 \div 2$

Figura 176A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

Figura 177: Extrato da resolução em Braille da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

3.3)

x = 3÷6⇔
x = 0,5

Figura 177A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Pedro

Figura 178: Extrato da resolução em Braille da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

3.3)

6x = 3⇔
x = 3÷6⇔
x = 1÷2

Figura 178A: Transcrição do extrato da resolução da questão 3.3 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Verifica-se que todos os alunos identificaram os erros e corrigiram-nos convenientemente. Constatou-se ao nível global da turma, uma maior facilidade dos alunos cegos neste tipo de questões, ou seja, na identificação de erros existentes em resoluções e o seu tempo de concretização muito inferior aos restantes elementos da turma. Considero, no entanto, que esta capacidade se deve essencialmente a uma maior concentração na leitura do enunciado feita pelo aluno cego, não existindo, contudo, "vícios" visuais que possam levar a um possível bloqueio, não deixando de ser interessante este tipo de situação.

Evidências da questão 4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos

Margarida

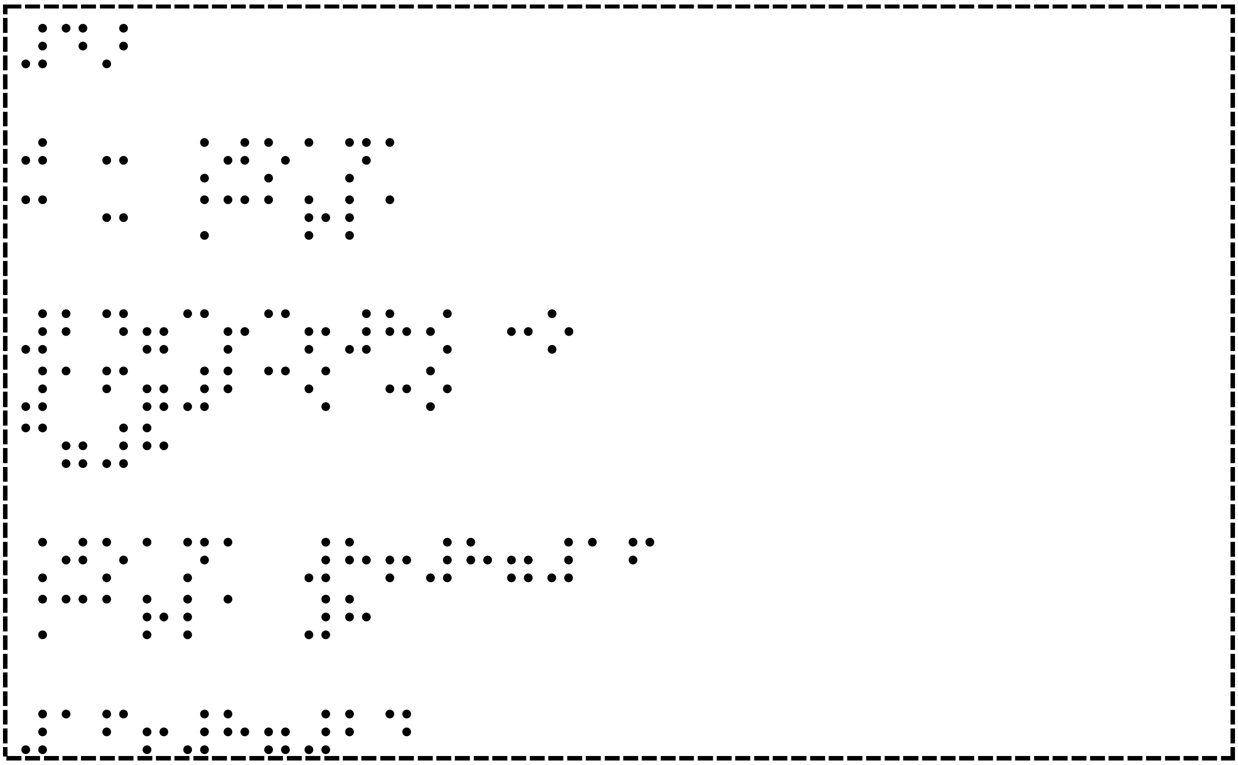


Figura 179: Extrato da resolução em Braille da questão 4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

4)

j – Joana
c – Carla

24 = c + c + 8 ⇔
16 = 2c⇔
c = 8

Joana 8 + 8 = 16
Carla 8

16 + 8 = 24

Figura 179A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

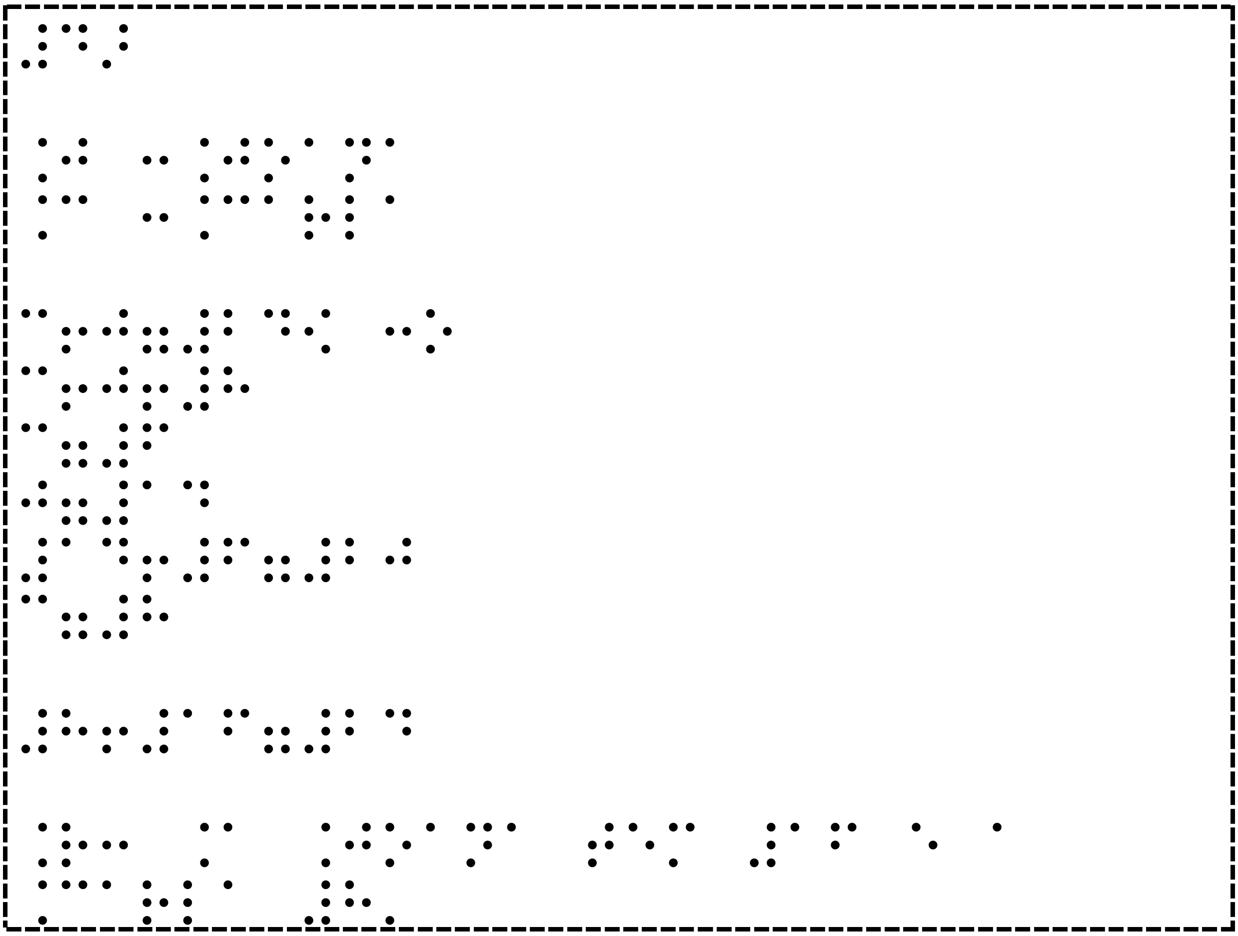


Figura 180: Extrato da resolução em Braille da questão 4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

4)

j – Joana

c – Carla

$c + j = 24 \Leftrightarrow$
$c + j + 8$
$c = 6$
$j = 14$
$14 + 6 = 20$

$c = 8$

$8 + 16 = 24$

R : A Joana tem 16 e a Carla 8.

Figura 180A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Pedro

Figura 181: Extrato da resolução em Braille da questão 4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

4)

$x + y = 24$

$x + 6 + y = 24$

Figura 181A: Transcrição do extrato da resolução da questão 4 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Margarida

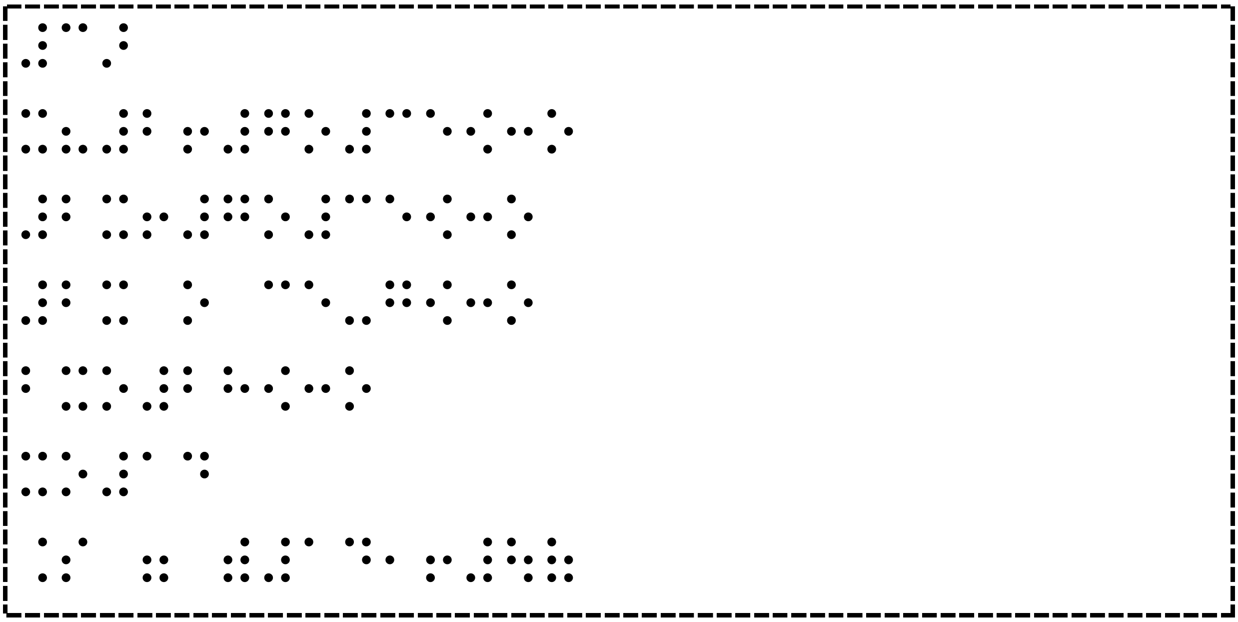


Figura 182: Extrato da resolução em Braille da questão 5 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

3)

x x 2 + 7 > 35⇔

2x + 7 > 35⇔

2x > 35 - 7⇔

2x > 28⇔

x > 14

S =]14, +∞[

Figura 182A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 do Miniteste de avaliação de conhecimentos da aluna Margarida

Rafael

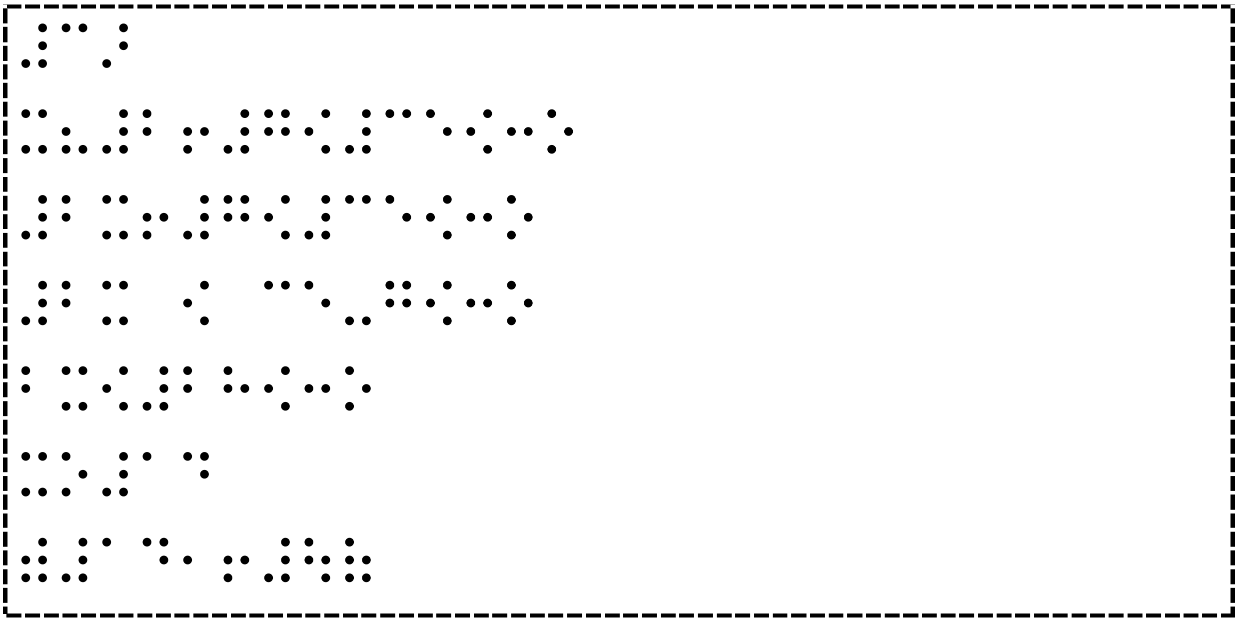


Figura 183: Extrato da resolução em Braille da questão 5 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

3)

$x \times 2 + 7 < 35 \Leftrightarrow$

$2x + 7 < 35 \Leftrightarrow$

$2x < 35 - 7 \Leftrightarrow$

$2x < 28 \Leftrightarrow$

$x > 14$

$]14, +\infty[$

Figura 183A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Rafael

Pedro

Figura 184: Extrato da resolução em Braille da questão 5 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

3)

x x 2 + 7 < 35⇔

9x< 35⇔

x < 3,9

Figura 184A: Transcrição do extrato da resolução da questão 5 do Miniteste de avaliação de conhecimentos do aluno Pedro

Através das explorações evidencia-se que os alunos Margarida e Rafael traduziram e resolveram corretamente a inequação e representaram corretamente o respetivo conjunto-solução. O aluno Pedro traduziu corretamente a situação problemática, contudo cometeu, na resolução da mesma, um erro de adição de termos não semelhantes e não representa o respetivo conjunto-solução.

8.10 - Considerações

Na resolução de equações e inequações do 1.º grau a uma incógnita, verifica-se que os alunos manifestam algumas dificuldades quando confrontados com equações ou inequações em que ambos os membros são compostos por expressões mais complexas e de maior dimensão, envolvendo essencialmente a utilização de parênteses e denominadores, facto este que se deve puramente à GMB, na medida em que esta assenta numa linearidade, numa única direção (da esquerda para a direita). Assim sendo, existe a necessidade de recorrer a parênteses auxiliares, tornando assim, a compreensão das expressões mais complexa, o mesmo não acontece na escrita a negro, em que nos permite uma direção complementar – verticalidade (em cima e em baixo)

Assinalam-se, também, as lacunas evidenciadas na utilização de vocabulário específico, uma vez mais relacionadas com as dificuldades de compreensão do enunciado proposto, contribuindo deste modo como uma variável de bloqueio na transição da linguagem natural para a linguagem algébrica, o que vai ao encontro do defendido por Kieran[327] que menciona que equacionar um problema (transição da linguagem natural para a linguagem algébrica) é uma área comum de dificuldades.

Constata-se ainda, que os alunos na resolução de problemas apresentam dificuldades ao nível da interpretação e compreensão do enunciado, dificuldade esta, não inerente à Matemática, e consequente busca de estratégias para a sua resolução, pressupõe a necessidade de articulação com o docente de língua materna, neste caso de português, o que não foi possível. Note-se, neste ponto, que a linguagem escrita, concretamente na grafia braille para a matemática e para a língua portuguesa, são um elemento fundamental para a aprendizagem e o desenvolvimento da autonomia nos

[327] Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*. NCTM, pp.707-762.

alunos cegos, sendo que lacunas no seu domínio podem constituir, como verificado, dificuldades na aquisição de novas capacidades.

CAPÍTULO IX – RESULTADOS

Apresentam-se os resultados referentes aos objetivos específicos, numeradas de E1 a E9, e os resultados relativos aos objetivos gerais, numeradas de G1 a G5.

9.1 - Resultados Específicos

E1 - A criação e aplicação de enunciados e materiais adaptados, associados ao trabalho colaborativo, promoveram, de um modo geral, o desenvolvimento, por parte dos alunos, da **compreensão do conceito de *sequência* e de *regularidade* associada a uma sequência**. Numa fase inicial do trabalho desenvolvido, os alunos convergiram em relações essencialmente recursivas, mas depressa evoluíram nos seus raciocínios, usando processos de raciocínio próprios e procedimentos adquiridos em contexto de sala de aula, procurando e reconhecendo, na maioria das vezes, relações pertinentes para a determinação de uma regra geral, a qual procuraram testar.

E2 - Apesar do sucesso alcançado, os alunos apresentaram **inúmeras dificuldades**. As estratégias utilizadas contribuíram, no entanto, para aproximar o nível de proficiência do aluno cego ao aluno sem NEE, uma vez que as dificuldades patenteadas nas tarefas realizadas por alunos cegos são **similares às patenteadas por outros alunos**:

i) Interpretação do enunciado, essencialmente em atividades que envolvam sequências pictóricas de qualquer género;

ii) Conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica;

iii) Justificação verbal ou escrita dos processos de raciocínio, o que muitas vezes se torna uma variável de bloqueio na apresentação de fundamentações explícitas;

iv) Processo de generalização simbólica;

v) Incapacidade de estenderem o domínio das situações descritas a valores intermédios;

vi) Transição entre o concreto e o abstrato, o que se torna um obstáculo à formalização algébrica das ideias descritas verbalmente.

E3 - Os alunos cegos evidenciaram **dificuldades na aquisição de conceitos** inerentes a este tópico e, consequentemente, na sua aplicação, as quais, apesar de não ter sido possível colmatar na totalidade, **foi possível minimizar**, tornando os alunos cegos mais proficientes no domínio do conceito de *função*. Os referidos obstáculos centraram-se, sobretudo, em:

i) hábitos muito interiorizados de memorização;
ii) dificuldades de abstração;
iii) ausência de hábitos de trabalho tátil.

E4 - Os alunos manifestaram durante todo o percurso antecedente à generalização, **processos de raciocínio muito relevantes**, através da representação algébrica: recorreram a raciocínios inversos na verificação de existência de imagens; verbalização de relações entre variáveis; utilização das variáveis na determinação de imagens; conversão entre diferentes representações das funções; atribuição de significados a objetos matemáticos associados a procedimentos algébricos e processos de tentativa e erro, orientados pela descoberta prévia de uma relação entre as variáveis dependente e independente, não tendo sido, por isso, necessário delinear qualquer estratégia específica neste âmbito.

E5 – Os alunos evidenciaram **dificuldades nas atividades que envolveram representação, generalização e conversão de diferentes tipos de uma representação de uma função**, devido à abstração inerente ao conceito de função.

E6 – Verificou-se uma tendência generalizada dos alunos cegos em recorrerem a uma **abordagem algébrica em situações problemáticas**, pouco comum nos alunos normovisuais, bem como que **aplicam corretamente as regras de resolução de equações**, de acordo com as etapas definidas, seguindo, regra geral, o ritmo da turma. Verificou-se, no entanto, profundas **dificuldades na determinação do conjunto-solução de uma inequação**, evidenciando-se, deste modo uma ausência total da compreensão dos intervalos de números reais.

E7 - Apesar de se ter verificado uma relativa **facilidade na resolução de *equações e inequações do 1.º grau a uma incógnita***, constatou-se que os alunos, quando confrontados com situações problemáticas, manifestam **dificuldades ao nível da interpretação e compreensão** do enunciado, sobretudo quando estes são de maior extensão, bem **em enunciados que requeiram a aplicação de conceitos matemáticos inerentes aos conteúdos programáticos de anos anteriores**.

E8 – Verificou-se um **impacto positivo** das atividades de exploração na aquisição e aplicação de conceitos e procedimentos, tendo em conta os resultados alcançados pelos alunos.

9.2 – Resultados Gerais

G1 – A GMB apresenta características próprias, tal como a simbologia Matemática em si, revestindo-se ambas de particularidades, limitações e dificuldades que só serão ultrapassáveis se alunos e professores detiverem o seu domínio.

i) A aprendizagem da grafia Braille reveste-se, para os invisuais, da mesma relevância que a alfabetização para as pessoas normovisuais, isto é, constitui uma importante ferramenta de comunicação que, por um lado, lhes garante o acesso à literacia e, por outro, à socialização. Contudo, a sua aprendizagem e consolidação apresentam uma complexidade relevante e, por vezes, algumas limitações, uma vez que **há diversas combinações possíveis dos pontos da célula Braille**, **podendo estas assumir significados distintos, consoante os contextos em que surgem, e o mesmo significado ser representado por símbolos diferentes**, o que se reflete no desempenho dos alunos, tendo em conta que é notória a influência do maior ou menor domínio do GMB na compreensão e aplicação dos conteúdos algébricos;

ii) O conhecimento da GMB, cuja estratégia de aprendizagem se apresenta, permitiu perceber a sua relevância no papel desempenhado pelo professor dentro da sala de aula, quando ensina alunos cegos, uma vez que só com este é possível compreender a importância do rigor necessário à linguagem usada no desempenho dos alunos face às tarefas propostas e prever determinados comportamentos, no sentido de os reforçar ou eliminar. Tendo em conta a total ausência de formação nesta área no que à formação inicial de professores diz respeito, caberá às escolas em geral e aos docentes em particular criar as condições necessárias para que qualquer docente que lecione alunos cegos não seja confrontado com uma limitação que pode afetar grandemente o desempenho dos seus alunos.

G2 - O processo de ensino-aprendizagem da Álgebra para alunos cegos é uma realidade complexa em que estes apresentaram inúmeras dificuldades, tendo-se evidenciado dificuldades de natureza transversal e não propriamente algébrica.

i) Uma das principais dificuldades evidenciadas pelos alunos não reside na aprendizagem de conceitos matemáticos, mas no **uso da linguagem, quer oral, quer escrita**, o que se traduz quer em **dificuldades de interpretação**, quer em **dificuldades de verbalização**. De facto, uma das primeiras lacunas com que os alunos se confrontam assenta na não compreensão do enunciado, sem a qual não é possível aplicar qualquer conhecimento algébrico. Além desta, os alunos, ainda que resolvam as tarefas propostas de modo adequado, apresentam dificuldades na justificação verbal e/ou escrita dos seus processos de raciocínio, o que muitas vezes se torna uma variável de bloqueio na apresentação de fundamentações explícitas. Acrescem, ainda, as dificuldades sentidas na **transição da linguagem natural**, por si só deficitária, **para a linguagem algébrica**;

ii) Relacionada com a anterior, uma segunda dificuldade latente consiste na **notação matemática**, tanto a nível da escrita como a nível da leitura. Esta lacuna, além de se prender com **dificuldades de compreensão e de expressão**, relaciona-se, também, com a **dificuldade de organização espacial** inerente aos recursos e materiais disponíveis e com a **ausência de pré-requisitos** para o efeito;

iii) Outra das dificuldades manifestadas pelos alunos observados respeita à **capacidade de abstração**, que pode ser associada à capacidade de criar categorias e exprimi-las, quer por meio de uma linguagem, quer por meio de qualquer outro sistema simbólico. Esta dificuldade, comum à maioria dos alunos, acentua-se no caso dos alunos cegos, possivelmente devido às limitações acrescidas que têm em criar “imagens” para conceitos e, inversamente, em fantasiar e imaginar a partir do concreto, uma vez que, sempre que ocorreu uma transferência do conceito para a realidade dos alunos, estes demonstraram maior facilidade em compreender e utilizar conceitos algébricos;

iv) Uma quarta dificuldade verificada assenta na **necessidade de utilização de processos rotineiros e sistemáticos**, possivelmente relacionada com uma necessidade de organização espacial que lhes incutida. Este obstáculo pode, no entanto, se usado corretamente, ser facilitador da aprendizagem;

v) Salienta-se, ainda, a dificuldade verificada na **análise de imagens**, **quer pela via descritiva, quer através do recurso a relevos**, prendendo-se esta, possivelmente, com a falta de hábitos de trabalho com este tipo de recursos e/ou materiais, tendo em conta que as mesmas foram, progressivamente, diminuindo;

vi) A **dificuldade de generalização** constitui, também, uma evidência;

vii) Finalmente, verificou-se um **ritmo de aprendizagem** mais **lento** que o do restante grupo-turma, limitação que se procurou colmatar com aulas de apoio individualizado semanais.

G3 - As estratégias delineadas e aplicadas, nomeadamente o recurso a trabalho de pares, a adaptação de enunciados e materiais e a criação de atividades e de explicações teóricas que fossem ao encontro da realidade dos alunos cegos fomentaram a inclusão destes alunos, tendo-se garantido os três princípios básicos **da inclusão: o acesso, a participação e o sucesso.**

i) Promoveu-se a **participação ativa** dos alunos em contexto de sala de aula;

ii) Fomentou-se o **reconhecimento** por parte da restante turma das capacidades destes alunos;

iii) Promoveu-se o **sucesso académico** deste alunos, tendo em conta que concluíram o 3.º Ciclo do Ensino Básico com classificações internas positivas e com resultados positivos no Exame Nacional de Matemática;

iv) Além disso, as tarefas produzidas e/ ou adaptadas para os alunos cegos tiveram impactos na aprendizagem dos alunos normovisuais, tendo sido possível aplicá-las no âmbito de atividades comuns a todos os alunos.

G4 – Foi evidente o **impacto positivo** das atividades de caráter exploratório, associadas às restantes estratégias, no **desenvolvimento do raciocínio matemático** dos alunos cegos e na **evolução do seu processo ensino-aprendizagem**.

i) Não foi necessário proceder a qualquer adequação curricular neste âmbito;

ii) Verificou-se uma efetiva evolução no processo de ensino-aprendizagem de todos os alunos, verificável pelos resultados quantitativos obtidos;

iii) Os alunos não apresentaram, no final do processo de investigação, o mesmo nível de sucesso, não tendo, consequentemente todos evoluído da mesma forma, possivelmente porque tinham, à partida, necessidades distintas, ainda que se tivesse verificado um conjunto de dificuldades comuns.

G5 – A análise e reflexão do trabalho desenvolvido pelos alunos constituiu um processo recursivo, do qual resultou que:

i) Na maioria das situações, os alunos cegos desenvolvem processos de raciocínio adequados, quando lhes são facultados os meios necessários para o efeito;

ii) Apesar dos raciocínios serem, maioritariamente adequados, com alguma frequência, os alunos apresentam resultados errados, consequência de dificuldades de interpretação, de organização espacial e de erros de cálculo.

CAPÍTULO X – CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

À semelhança de outros estudos desenvolvidos com alunos cegos, da presente investigação resulta que a limitação dos alunos cegos se prende essencialmente com a sua condição clínica, sendo possível, na maioria das situações analisadas, contornar as barreiras desta advenientes, com recurso a estratégias, recursos adequados à sua especificidade, sem necessidade de amputações ao currículo e, de modo a fomentar o ensino inclusivo, aplicáveis aos restantes alunos.

Salienta-se a urgência em que os resultados desta investigação sirvam de ponto de partida a investigações noutras áreas da Matemática, de modo a que se possa desenvolver um real ensino inclusivo dos alunos cegos nas escolas de ensino regular portuguesas e, sobretudo, em que, mais do que se procurar registar as limitações destes alunos, se procurem e apliquem estratégias de atuação que permitam colmatá-las.

No mesmo âmbito, resulta a necessidade de futuros estudos incidirem no início da escolaridade dos alunos cegos, isto é desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico, na busca de estratégias que impeçam que determinadas dificuldades e consequentes lacunas se instalem, comprometendo, desde cedo, todo o processo de ensino-aprendizagem destes alunos e, consequentemente, a sua inclusão na escola e na vida ativa.

Resulta também que a maioria das dificuldades detetadas não se prendem com questões matemáticas, mas com competências transversais aos currículos de várias disciplinas escolares e, em última instância, à vida prática destes alunos enquanto cidadãos do nosso país, detentores dos mesmos direitos e deveres que qualquer outro aluno. Assim sendo, salienta-se a importância do trabalho colaborativo entre docentes, pois só este poderá colmatar efetivamente algumas das lacunas vivenciadas por estes alunos; uma vez que o trabalho individual apenas permitirá atenuá-las; bem como a urgência de formação adequada de Braille a todos os docentes que trabalham com alunos cegos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AAVV (2002). *Aspectos evolutivos y educativos de la deficiencia visual.* Madrid. ONCE, Dirección de Educación.

Aguiar, J. (2009). *Educação inclusiva: jogos para o ensino de conceitos*. Campinas, Papirus Editora, pp.15.

Ainscow, M. (2003*). Making special education inclusive*. London, David Fulton Publishers.

Ainscow, M. & César, M. (2006). Inclusive education ten years after Salamanca: Setting the agenda. *European Journal of Psychology of Education*, 23(3), pp.231-238.

Ainscow, M. & Ferreira, W. (2003). *Compreendendo a educação inclusiva: algumas reflexões sobre experiências internacionais*. In D. Rodrigues, (org.). *Perspectivas sobre a inclusão: da educação à sociedade*. Porto, Porto Editora, pp.114.

Ainsworth, S. - DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 2006, pp. 183-198.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics*. For the Learning of Mathematics*, *14*(3), pp.24-35.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Arcavi, A. (2006). *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, pp. 29-48.

Arends, R. (2000). *Aprender a Ensinar*. Amadora: McGraw-Hill de Portugal, Lda.

Artigue, M. (1992) - Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, DC: MAA, pp.109-132.

Assude, T. (2003). Estudo do currículo de matemática: abordagem ecológica e alguns resultados. In *Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 29-44. Lisboa: APM.

Bairrão, J., Felgueiras, I., Fontes, P., Pereira, F., Vilhena, C. (1998). *Os alunos com necessidades educativas especiais: subsídios para o sistema de educação*. (1ª edição). Editorial do Ministério da Educação.

Baptista, J. A. (1999). O sucesso de todos na escola inclusiva. In Conselho Nacional de Educação (Ed.), *Uma educação inclusiva a partir da escola que temos (seminários e colóquios)*. Lisboa: Ministério da Educação, pp.127.

Batista, C. G. (2005). *Formação de conceitos em crianças cegas: Questões teóricas e implicações educacionais*. *Psicologia: Teoria e pesquisa, 21*(1), 7-15; Ochaíta, E. (1993). *Ceguera y desarrollo psicologico*. In A. Rosa, & E. Ochaíta (Eds.), *Psicología de la ceguera* (pp. 111-202). Madrid: Alianza Editorial; Tobin, M. J., Bozic, N., Douglas, G., Greaney, J., & Ross, S. (1997). Visually impaired children: Development and implications for education. *European Journal of Psychology of Education, XII*(4), pp. 431-447.

Bautista, Rafael (coord.). (1997). *Necessidades educativas especiais*. Ana Escoval (trad.). Saber mais (col.). Lisboa: Dinalivro, p.15.

Bell, J. (2004). *Como realizar um projecto de investigação* (3ª edição). Lisboa: Gradiva, p.20.

Bénard da Costa, Ana Maria (1999). *Uma educação inclusiva a partir da escola que temos*. In Conselho Nacional de Educação (Ed.), *Uma educação inclusiva a partir da escola que temos (seminários e colóquios)*, pp. 25-36. Lisboa: Ministério da Educação.

Bénard da Costa, A. B. (2006). *A educação inclusiva dez anos após Salamanca: Reflexões sobre um caminho percorrido*. In D. Rodrigues (Ed.), *Educação inclusiva: Estamos a fazer progressos?* , pp.13-29. Cruz Quebrada: Faculdade de Motricidade Humana.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* , pp. 309-365.

Bairrão, J.; Pereira, F.; Felgueiras, I.; Fontes, P.; Vilhena, Carla (1998). *Os Alunos com Necessidades Educativas Especiais: Subsídios para o Sistema de Educação*. Lisboa: CNE.

Bodin, A., Capponi, B (1996). Junior Secundary School Pratices. In *Internacional Handbook of Mathematics Education*. Part one, pp. 565-614. Kluwer Academic Press.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFERNELSON.

Booth, T., Ainscow, M. y Black-Hawkins, K. (2000). *Guía para la evaluación y mejora de la educación inclusiva (Index for inclusión)*. Disponible en: http://centros3.pntic.mec.es/cp.cisneros/inclusion.doc

Braga, C. (2006) - *Função: A Alma do Ensino de Matemática*. São Paulo: Annablume; Fapesp, p. 18.

Branco, N. (2008). O *estudo de Padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de mestrado. (Universidade de Lisboa).

Bueno, M. y Toro, S. (1994): *Deficiencia visual: aspectos psicoevolutivos y educativos.* Archidona: Ed. Aljibe.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In *Quadrante 16* , pp. 81-118.

Caraça, B. J. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Carmo, H. et Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Investigação – Guia para a auto-aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta

César, M. (2003). *A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos*. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade,* pp. 117-149. Porto: Porto Editora.

César, M. & Santos, N. (2006). From exclusion into inclusion: collaborative work contributions to more inclusive learning settings. *European Journal of Psychology of Education*, *21*(3), pp. 333-346.

Chazan, D.; Yerushalmy. *On Appreciation the Cognitive Complexity of School Algebra: Research on Algebra Learning and Directions of Curricular Change*. In Jeremy Kilpatrick, W.

Cohen, L.; Manion, L. (1994). *Research Methods in Education*. London: Routledge.

Correia, L. (1999). *Alunos com necessidades educativas especiais nas classes regulares*. Porto, Porto Editora.

Correia, L. & Cabral, M. (1999). *Práticas Tradicionais da Colocação do Aluno com Necessidades Educativas Especiais*. In: Correia, L. (Ed.), *Alunos com Necessidades Educativas Especiais nas Classes Regulares.* Porto, Porto Editora, pp. 11-16.

Correia, L. (2003). *Educação especial e inclusão*. Porto, Porto Editora.

Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais. Um guia para educadores e professores* (2.ª ed.) Porto, Porto Editora.

Costa, A. (2006). *A educação inclusiva dez anos após Salamanca: reflexões sobre o caminho percorrido*. *In*: D. Rodrigues (Ed.) E*ducação Inclusivas. Estamos a fazer progressos?* Cruz Quebrada, Faculdade de Motricidade Humana, pp.13-29.

Cullata, R. A., Tompkins, J. R., & Werts, M. G. (2003). *Fundamentals of special education: What every teacher needs to know* (2nd ed.). New Jersey: Merrill Prentice Hall.

Dick, Bob (2000). *A Beginner's Guide to Action Research*. Online em http://www.scu.edu.au/schools/gcm/ar/arp/guide.html>.

Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Alunos cegos e com baixa visão – Orientações curriculares*. Ministério da Educação

Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2008). *Educação Especial, Manual de Apoio à Prática*. Lisboa: Ministério da Educação.

Dordrecht: D. Reídle; Jaworski, B. (2002). Social constructivism in mathematics learning and teaching. In L. Haggarty (Ed.), *Teaching mathematics in secondary schools: A reader* (pp. 67-82). Londres: RoutledgeFalmer;

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, pp.103-131.

ECHEITA, G. (2006). *Educación para la inclusión o educación sin exclusiones.* Madrid: Narcea.

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficulties. *Advanced Mathematical Thinking* (Ed. Tall, D.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, Londres, pp. 140-152.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., e Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, pp. 533-556.

Elliott, J. (2005). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.

Ellis, A. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), pp. 221-262.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Estrela, M. (2002). Modelos de formação de professores e seus pressupostos conceptuais. *Revista de Educação*, 11 (1), pp.17-29.

Fernandes, F.; Fiorentini, D.; Cristovão, E. (2006). *Investigações Matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos de 6ª série*. In: Fiorentini, D.;

Cristovão, E.M. (Org.). *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, pp. 227-244.

Filloy & Rojano, (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), pp.19-25.

Fiorentini, D., Miorim, A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. In *Pro-posições*, 4(1), pp. 78-90.

Fonseca, V. (2002).Tendências futuras para a educação inclusiva. *Inclusão, 2*, pp. 21.

Franco, M. (2005). Pedagogia da pesquisa-acção*. Educação e Pesquisa*, 31(3), pp. 483-502.

Friedlander, A. e Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

García Fernández, J.A. (1998): *Integración escolar. Aspectos didácticos y organizativos*. UNED Ed.

García Fernández; J.A. (1998). *Integración Escolar de niño con discapacidad*. Madrid: UNED Ed.

Gary Martin e Deborah Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, pp. 123-135. EUA: NCTM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education,* 2nd ed.: New York, NY:Routledge, pp.178-203.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA: NCTM, pp.01-23.

Guerreiro, A. (2000). O Braille como instrumento comunicacional e intelectossocial*. "Luís Braille: Revista Oficial da ACAPO".* Lisboa: ACAPO. Nº 37 (Abril-Junho). Pp. 23-26.

Guerreiro, A. (2011). *Literacia Braille e Inclusão*. Lisboa: Camara Municipal de Lisboa.

Guerreiro, A. (2013). *Comunicação e Cultura Inclusivas*. Lisboa: Edições Universitárias Lusófona/ULHT.

Horton, J. Kirk, (2000). *Educação de alunos deficientes visuais em escolas regulares*. Jorge Casimiro (trad.). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, pp.81-82.

Jesus, S. N., Martins, M. M. (2000). *Escola Inclusiva e apoios educativos*. Porto: Edições Asa.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation*. Newbury Park: Sage.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom.* Reston, VA: NCTM, pp. 271-288.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, pp.317-326.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 91-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NewYork: Macmillan, pp. 390-419.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (1998). *Eighth International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*. Sevilha: S.A.E.M. Thales, pp. 271-290.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it?. *The Mathematics Educator, 8*(1), pp.139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education:Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). NCTM

Küchemann, D. (1978). Children´s understanding of numerical variable*. Mathematics in School,* 7(4), pp.23-28.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed) *Children´s understanding of mathematics*: 11-16 (pp.102-119). London: Murray.

Ladeira, F. & Queirós, S. (2002). Compreender a Baixa Visão. *Apoios educativos (col.).* Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica.

Lages, J. A. & Baptista, S. (2000). *A Invenção do Braille e a sua importância na vida dos cegos*. Lisboa: Comissão de Braille.

Leitão, F. (2010). *Valores Educativos, Cooperação e Inclusão*. Salamanca, Luso-Española de Ediciones.

Leite, T. (2005). *Diferenciação curricular e necessidades educativas especiais*. In: Sim-Sim, I. (Ed.), *Necessidades Educativas Especiais: Dificuldades da Criança ou da Escola*? Lisboa, Texto Editores, pp. 9-25.

Lessard-Hébert, M. (1996). *Pesquisa em Educação.* Lisboa: Instituto Piaget.

Lima, R. (2007). *Equações algébricas no ensino médio: Uma Jornada por diferentes mundos da Matemática*. Tese de Doutoramento. São Paulo: PUC/SP.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* pp.113-120.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.

Lopes, Carlos. (2009). *Exigência dos cegos portugueses*. Acedido em 13 de maio, 2013, em http://www.pcd.pt/noticias/ver.php?id=7309.

Lucerga, R. (1993). *Palmo a palmo: la motricidad fina y la conducta adaptativa a los objetos en los niños ciegos.* Madrid: ONCE.

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Lda.

Madureira, I.; Leite, T. (2003). *Necessidades Educativas Especiais*. Lisboa, Universidade Aberta.

Martín, M. B., Bueno, T.(1997). Deficiente visual e ação educativa, In Bautista, Rafael (coord.). Necessidades educativas especiais. Ana Escoval (trad.). *Saber mais (col.).* Lisboa: Dinalivro.

Martins, Bruno Sena. (2006). E se eu fosse cego? Narrativas silenciadas da deficiência. *Saber imaginar o social (col.)*. Porto: Afrontamento.

Matos, A.; Ponte, J. P. (2008). *O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. ° ano*. Relime, México, v. 11, n.º 2.

Matos, A. (2007). *Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de mestrado. (Universidade de Lisboa).

McKernan, J. (1996). *Curriculum action research, a handbook of methods and resources for the reflective*. London: Kogan Page Limited.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Monteiro, M. (2000*). Percepções dos professores do ensino básico acerca de alunos com dificuldades de aprendizagem e/ou problemas de comportamento: um estudo exploratório a propósito da inclusão educativa.* Dissertação de Mestrado Universidade do Minho, I.E.P.

Moura, A. R. L., & Sousa, M. C. (2005). O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: Dois olhares diferentes. *Zetetiké*, 13 (24), pp.11-45.

Morgado, J. (2003). *Qualidade, Inclusão e Diferenciação.* Lisboa, Instituto Superior de Psicologia Aplicada.

Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.ºano*. Tese de Mestrado. (Universidade de Lisboa).

NCTM (2000). *Principles and Sandards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM. (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

Neves, M. A. (1999). *Aprendizagem em Álgebra*. Tese de Doutoramento. Universidade Portucalense Infante D. Henrique.

Nunes, S., Lomônaco, J. F. B. (2010). O aluno cego: preconceitos e potencialidades. In *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional*. Volume 14, número 1 , p.55.

OCDE (1995). *A integração escolar das crianças e dos adolescentes deficientes: ambições, teorias e práticas.* Coimbra, SPRC.

Ochaíta, E. (1993). *Ceguera y desarrollo psicologico*. In A. Rosa, e E. Ochaíta (Eds.), *Psicología de la ceguera* (pp. 111-202). Madrid: Alianza Editorial.

Oliveira, H. (2009). *A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.* Educação e Matemática , pp. 83-86.

Oliveira, T. (2009). *Educação inclusiva e formação de professores*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação. Universidade de Coimbra.

Paiva, F. (2008). *As atitudes dos professores do ensino básico face à inclusão de alunos com NEE na sala de aula*. Tese em Psicologia Educacional, Lisboa, ISPA.

Paiva, F. (2012). *A formação e as atitudes de professores do ensino básico face à inclusão dos alunos com necessidades educativas especiais na sala de aula*. Dissertação de Doutoramento apresentada à Universidade da Extremadura, Badajoz.

Peral, L., & Gómez, J. (2003). Concepto de variable; dificultades de su uso a nível universitário. *Mosaicos Matematicos, 11*, pp.109-114.

Pereira, F. (2004). *Políticas e práticas educativas. O caso da educação especial e do apoio sócio-educativo nos anos 2002 a 2004*. Lisboa, Fundação Liga Portuguesa dos Deficientes Motores.

Pereira, L. (1993). Evolução Histórica da Educação Especial. *In* Pereira, L. (Ed.). *Integração Escolar, Colectânea de Textos*. Lisboa, Faculdade de Motricidade Humana, pp.9-11.

Pesquita, I., & Ponte, J. P. (2006). *Dificuldades dos alunos do 8.º Ano no trabalho em Álgebra*. Retirado em 10 de outubro de 2014 de http://www.eselx.ipl.pt/eselx/downloads/SIEM/C05.pdf

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas.* (Tradução de How to solve it, 1945). Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85* , pp. 36-42.

Ponte, J. P. (2005a). Gestão curricular em Matemática. In *GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular.* , pp. 11-34. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). *Números e Álgebra no currículo escolar*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro, *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério de Educação. DGIDC.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Obtido em 6 de setembro de 2009, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 1986, pp.42-46.

Puigdellívol, Ignasi. (1996). Programación de aula y adecuación curricular – el tratamiento de la diversidad. (2ª edição). *El Lápiz (col.)*. Barcelona: Editorial Grao.

Quivy, R., & Capenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais* (5ª ed.). Lisboa, Gradiva.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1. Norway, pp161-166.

Ribeiro, A. J. (2007). *Equação e seus multisignificados no ensino da Matemática: Contribuições de um estudo epistemológico*. São Paulo.

Rodrigues, A. (2006). *Análises de práticas e de necessidades de formação. Ciências da Educação.* Lisboa, Ministério da Educação.

Rodrigues, D. (2000). O paradigma da educação inclusiva – Reflexão sobre uma agenda possível. *Inclusão, 1*, pp.7-13.

Rodrigues, D. (2001). *A educação e a diferença*. *In*: D. Rodrigues (Ed.). *Educação e diferença: Valores e práticas para uma educação inclusiva*. Porto, Porto Editora, pp.13-34.

Rodrigues, D. (2003). *Perspectivas sobre inclusão. Da educação à sociedade.* Porto, Porto Editora;

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, pp.229-254.

Sanches, I. (2005). Compreender, agir, mudar, incluir. Da investigação-acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, 5, pp. 127-156.

Sanches, I; Teodoro, A. (2006). Da integração à inclusão escolar: cruzando perspectivas e conceitos. *Revista Lusófona de Educação*, 8, pp. 63-83.

Saraiva, M. J. & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento nº 4 al Nº 19*, pp. 74-83. Itália: Palermo.

Sarto, M.P. y Venegas, M.E. (Coords.) (2009). *Aspectos clave de la educación inclusiva*. Salamanca: INICO. Disponible en: http://inico.usal.es/publicaciones/pdf/Educacion-Inclusiva.pdf

Serra, H. (2005). Paradigmas da inclusão no contexto mundial. *Saber (e) Educar*, 10, pp, 35-50.

Serrano, I. (2005). *Percursos e práticas para uma escola inclusiva.* Tese de Doutoramento.

Serrazina, M. L. (1996). Ensinar/aprender matemática. In H. M. Guimarães (Ed.), *Dez anos de Profmat: Intervenções* (pp. 235 – 247). Lisboa: APM.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function, In: E. Dubinsky & G. Harel (Eds.): The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology. *Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, Vol. 25*, pp.25-58.

Silva, A. M. (1992). *Novo dicionário Compacto da Língua Portuguesa*. Editorial Confluência.

Silva, M. (2001). *A Análise de Necessidades de Formação na Formação Contínua de Professores: Um Caminho para a Integração Escolar*. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da Universidade de São Paulo. [Em linha]. Disponível em <http://www.teses.usp.br>. [Consultado em 14/01/2013]; Silva, M. (2008). Inclusão e formação docente. *EcoS,* 10(2), pp. 479-498.

Silva, M. (2004). Reflectir para (Re)Construir Práticas. *Revista Lusófona de Educação*, 4, pp. 51-60.

Silva, M. (2008). Inclusão e formação docente. *EcoS,* 10(2), pp. 479-498.

Simeonsson, R. J. (1994). *«Towards an epidemiology of developmental, educational, and social problems of childhood»*. In R. J. Simeonsson (Ed), *Risk*, *resilience & prevention*. *Promoting the well-being of all children*. Baltimore. P. H. Brookes.

Simões, A. (2000). Promover uma Educação Inclusiva. *Revista O Professor*, 70 (3).

Simon, J. (2000): *A Integração Escolar das Crianças Deficientes* (2nd ed). Lisboa: Edições ASA.

Souza, E. R., Diniz, M. I. (1994). *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo:IME-USP.

Struik, J. D. (1989). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Teixeira, Esperança Jales. (2008). *A conjugação da diferença como primeiro passo para a equidade*. In Miguéns, Manuel (Dir.). (2008). *De olhos postos na Educação Especial: [actas] / Seminário*. Lisboa: Conselho Nacional de Educação (org.).

Telles, R. A. M. (2004). A aritmética e a álgebra na matemática escolar. *Educação Matemática em Revista*, 11(16), pp.8-15.

Tripp, D. (2005). Pesquisa- acção: uma introdução metodológica. In *Educação e Pesquisa,* 31(3), pp. 443-466.

UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais*. Lisboa: UNESCO.

Usiskin, Z. (1988) - Conceptions of School Algebra and Uses os Variable. In: A. F. Coxford & A.P. Schulte (Eds.), *The Idea of Algebra, K–12* (pp. 8–19). Reston, VA: NCTM

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L., & Canavarro, P. (2006). *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 1, pp.63-75.

Vaz, J. (2005). *As Atitudes dos professores do ensino básico face à inclusão de crianças com necessidades educativas especiais*. Tese de Doutoramento, Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho.

Vaz, J. (2007). *Da Educação Inclusiva à Educação para a Cidadania*. *In*: Ramos, F. (Ed.), *Educação para a Cidadania Europeia com as Artes*. Comunidad Andaluza, Universidade de Granada, pp. 169-179.

Villalba, M. Rosa; Martínez, I. (coord.) (2000). *Aspectos evolutivos y educativos de la deficiencia visual*. Volumenes 1 y 2. Madrid: ONCE.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 14:3, pp. 293-305.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in "negativity". In L., Verchaffel, & S, Vosniadu (Eds), *The conceptual change approach to mathemathics learning and teaching, special issue of learning and instruction, 14*, pp.469-484.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2008). *A Álgebra ensinada por situações-problemas.* Lisboa: Instituto Piaget (Obra original publicada em 2002).

Vygotsky, L. S. (1932/1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, Trad.). Cambridge MA: Harvard University Press. [Trabalho original publicado em russo, em 1932].

Youschkevitch, A.P. (1976). *The Concept of Function*. In: *Archive for History of Exact Sciences.* Editions Springer.

Wagner, S. (1977). *Conservation of equation, conservation of function, and their relationship to formal operational thinking.* New York University.

Zabalza, M. (1999). *Diversidade e Currículo.* Lisboa, Ministério da Educação.

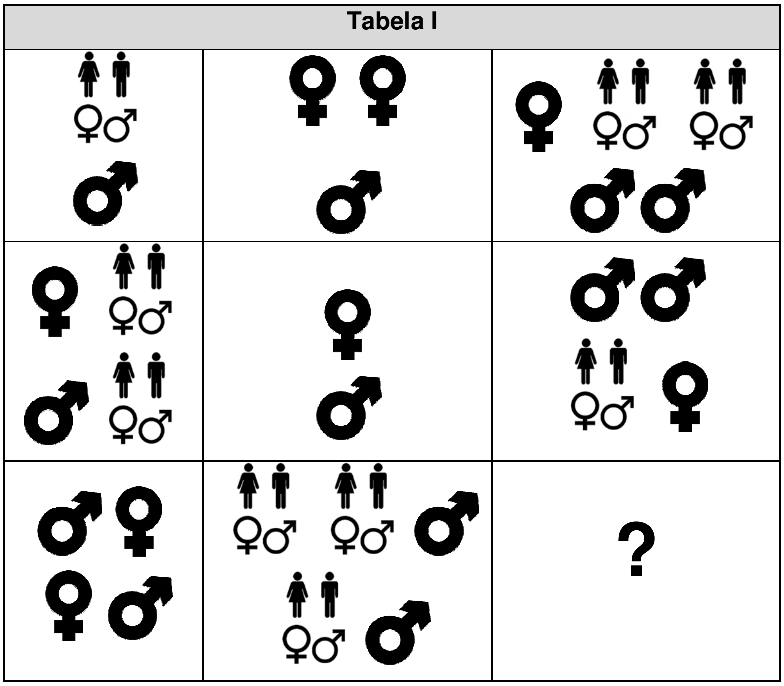
Zorn, P. (2002). Algebra, computer algebra, and mathematical thinking. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*.

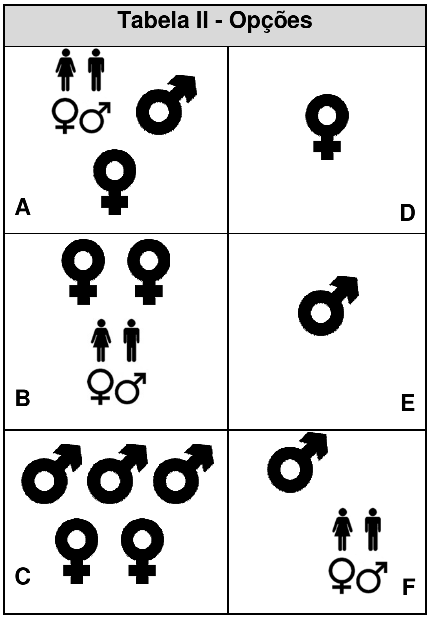
ANEXOS

Anexo I – Recursos Pedagógicos

Anexo 1 - Atividade I - *Masculino ou Feminino ou Casal?*

Escolhe na tabela II, a figura que te parece poder formar uma regularidade ou um padrão com as restantes da tabela I. Explica o teu raciocínio por palavras.

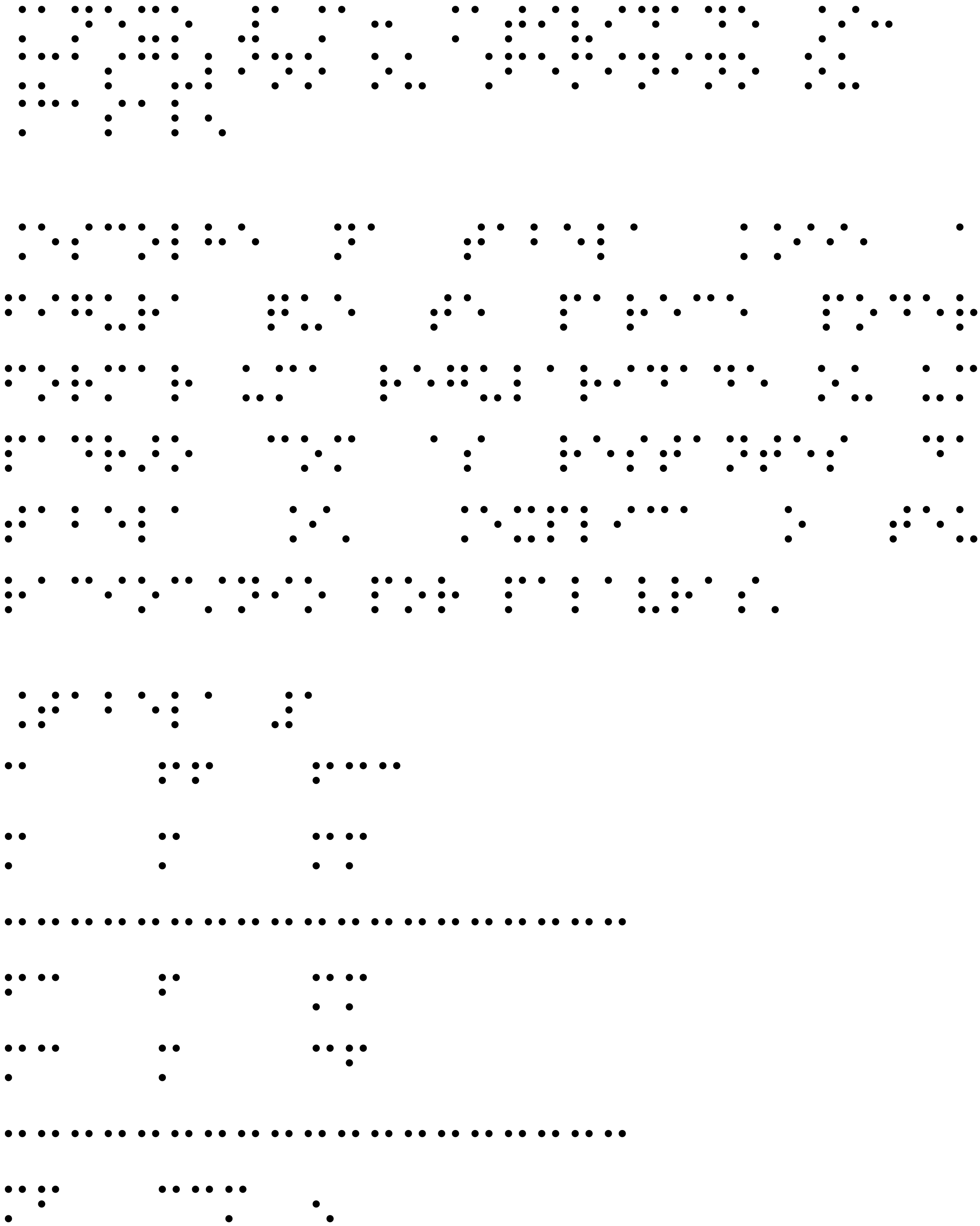




Legenda: ♂ - Masculino; ♀ - Feminino; ♀♂ - Casal.

Anexo 1A - Atividade I - ***Masculino ou Feminino ou Casal?***

(VERSÃO BRAILLE)



⠋⠍   ⠉⠍

⠨⠞⠁⠃⠑⠇⠁ ⠼⠃

⠉⠍   ⠋

⠋

⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒

⠋⠋   ⠍

⠉

⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒

⠍⠍⠍ ⠍

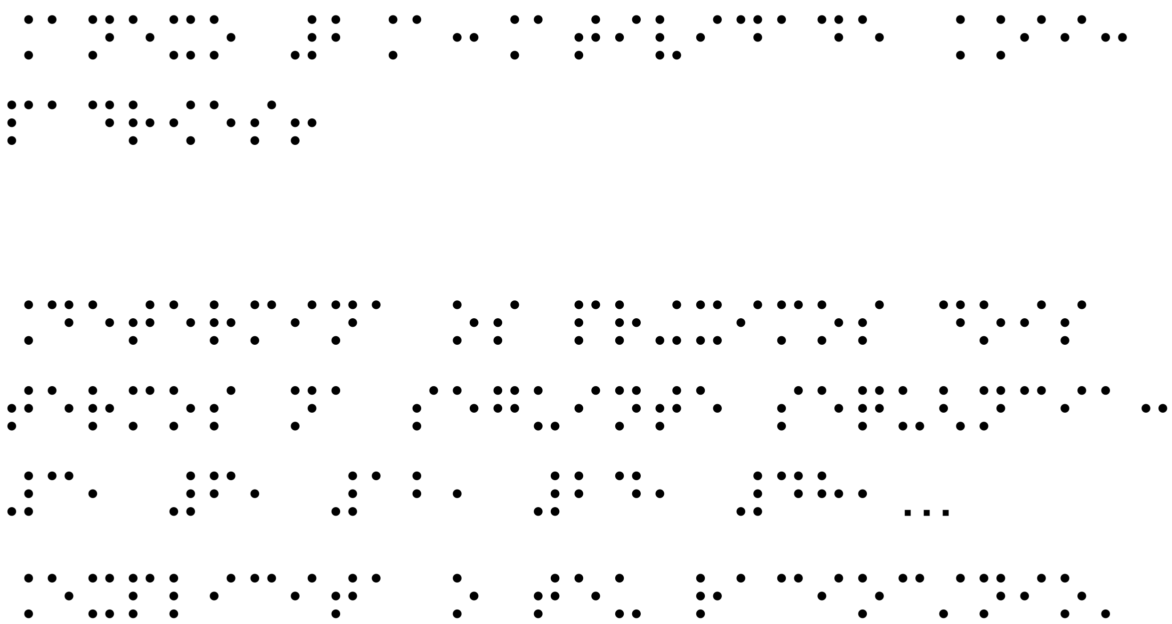
⠋⠋   ⠉

Anexo 2 - Atividade II - *padrões!*

Determina os próximos dois termos na seguinte sequência: 3, 6, 12, 24, 48,…
Explicita o teu raciocínio.

Anexo 2A - Atividade II - *padrões!*

(VERSÃO BRAILLE)



Anexo 3 - Atividade III - ***Igualdades numéricas.***

Observa as igualdades seguintes:

$$4^2 = 16$$

$$34^2 = 1156$$

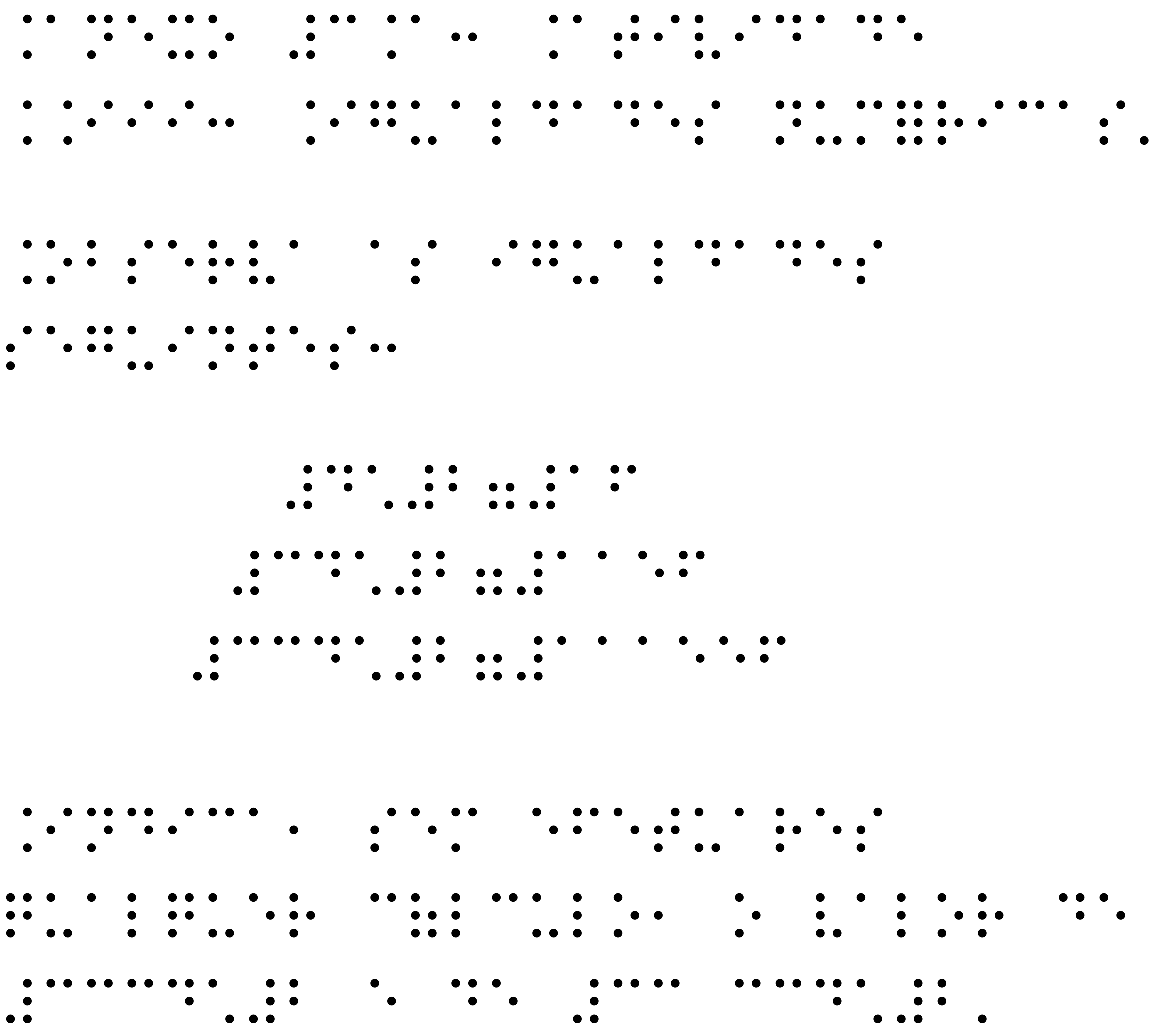
$$334^2 = 111\ 556$$

Indica, sem efetuares qualquer cálculo, o valor de 3334^2 e de $33\ 334^2$.

Explicita o teu raciocínio.

Anexo 3A - Atividade III - ***Igualdades numéricas.***

(VERSÃO BRAILLE)



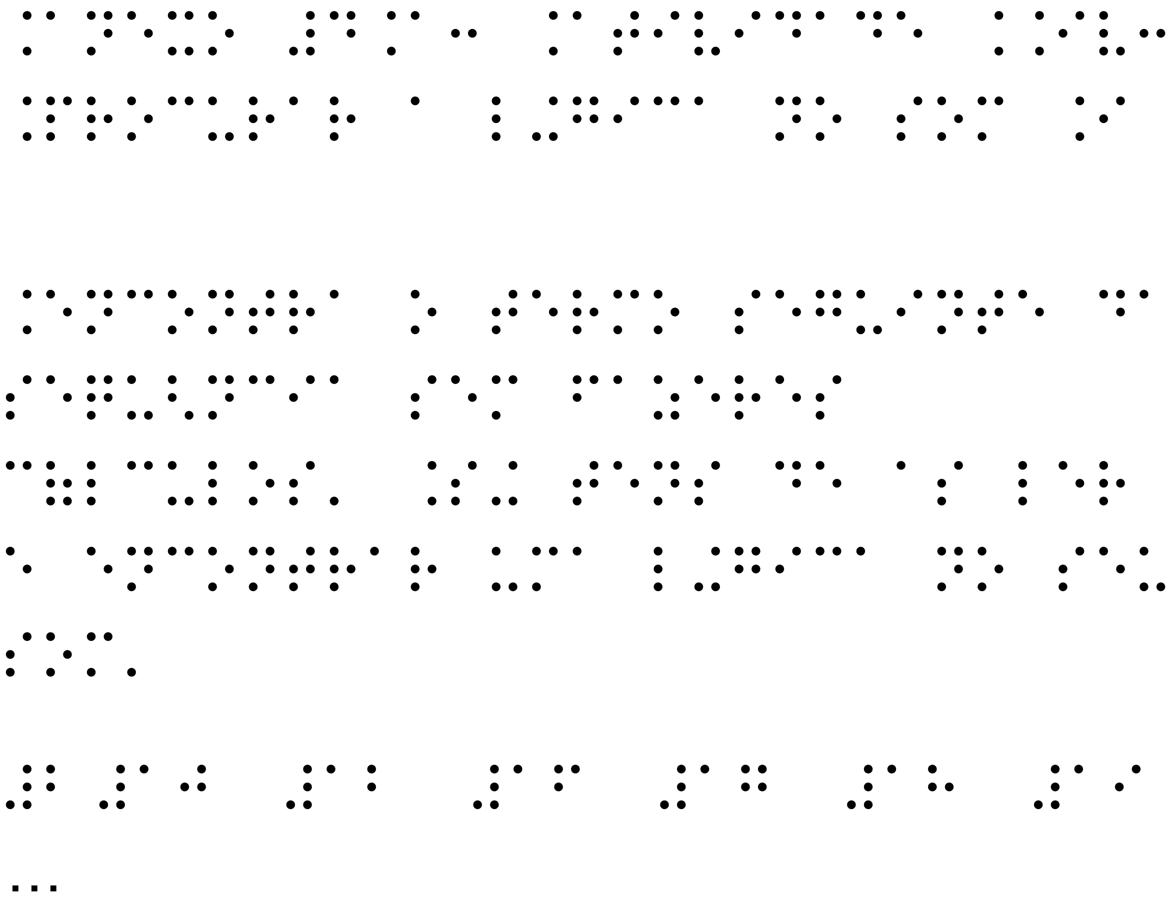
Anexo 4 - Atividade IV - *Procurar a lógica no som I*

Encontra o termo seguinte da sequência sem fazeres cálculos. Só tens de as ler e encontrar uma lógica no seu som.

2	10	12	16	17	18	19	…

Anexo 4A - Atividade IV - *Procurar a lógica no som I*

(VERSÃO BRAILLE)



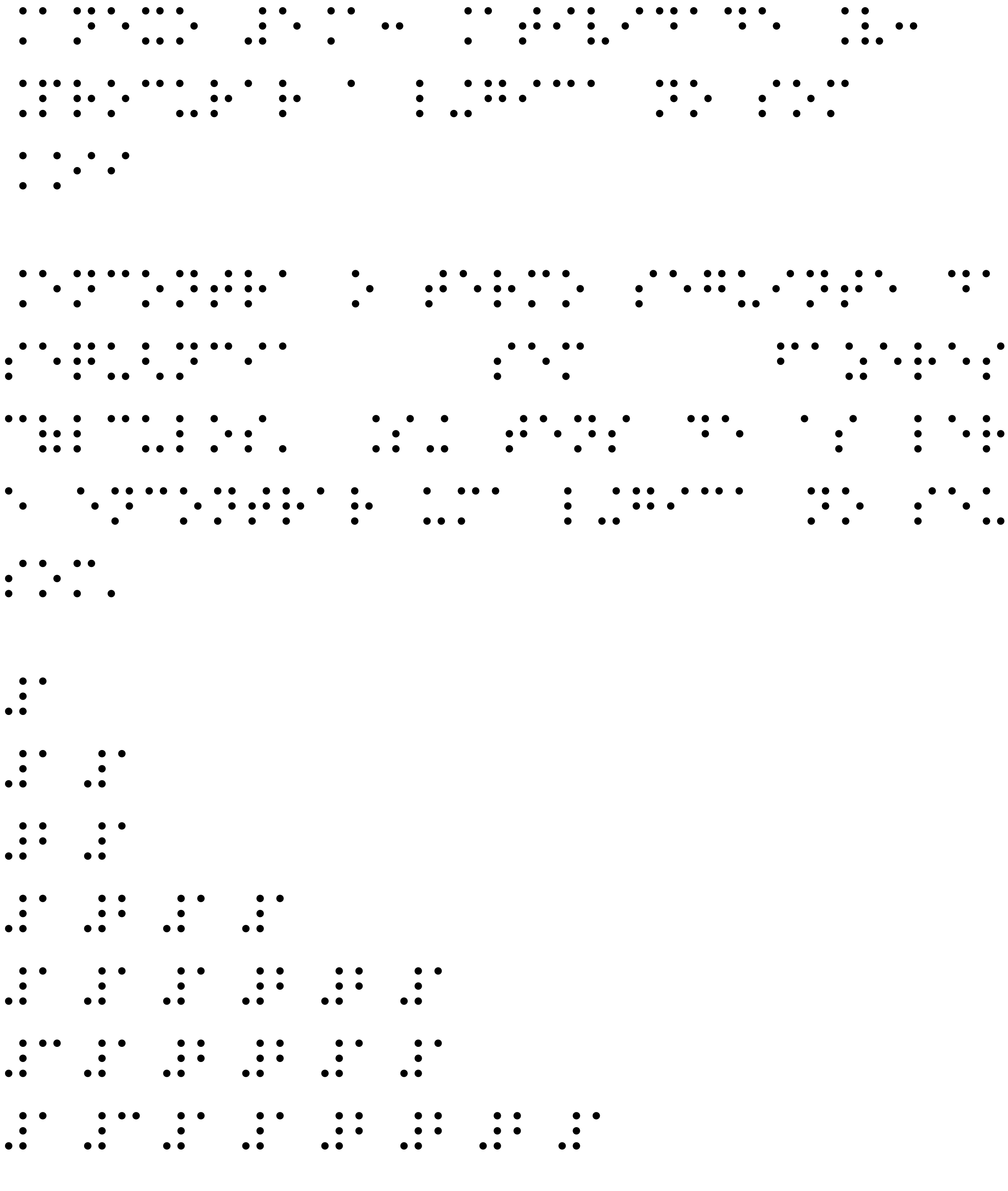
Anexo 5 - Atividade V - *Procurar a lógica no som II*

Encontra o termo seguinte da sequência sem fazeres cálculos. Só tens de as ler e encontrar uma lógica no seu som.

1									
1	1								
2	1								
1	2	1	1						
1	1	1	2	2	1				
3	1	2	2	1	1				
1	3	1	1	2	2	2	1		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

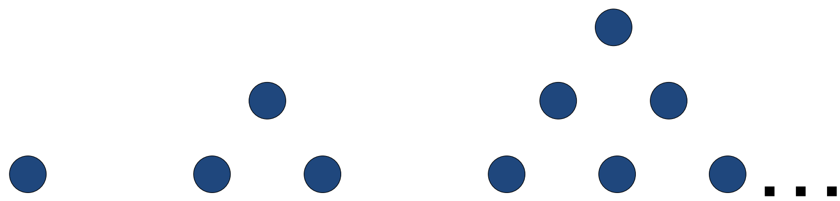
Anexo 5A - Atividade V - *Procurar a lógica no som II*

(VERSÃO BRAILLE)



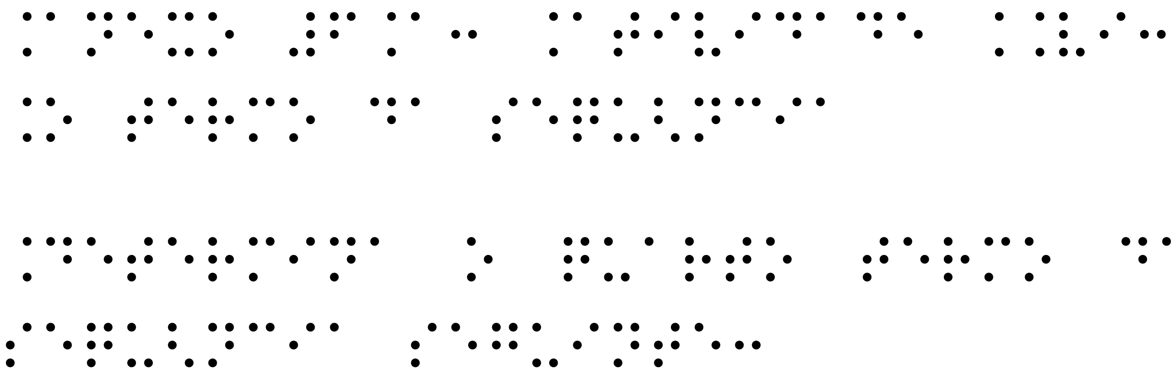
Anexo 6 - Atividade VI - *O termo da sequência*

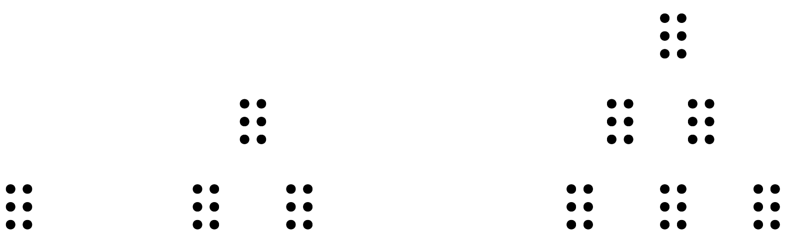
Determina o quarto termo da sequência seguinte:

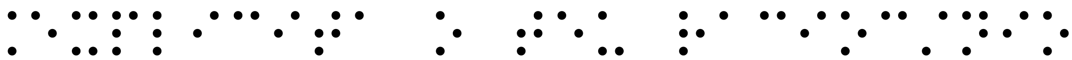


Explicita o teu raciocínio.

Anexo 6A - Atividade VI - *O termo da sequência*
(VERSÃO BRAILLE)

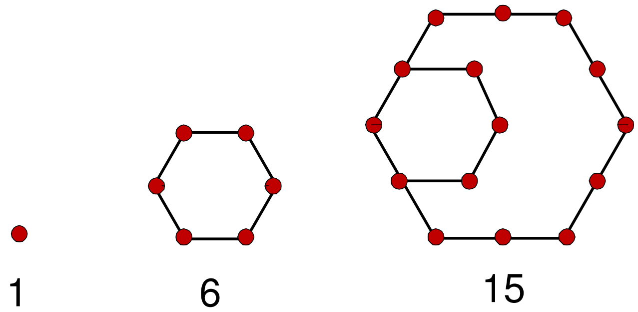






Anexo 7 - Atividade VII - *Números hexagonais.*

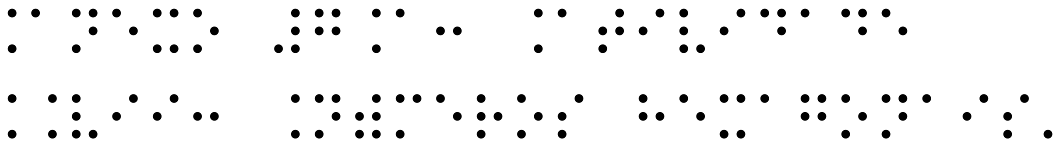
Descobre o próximo o termo seguinte da sequência dos números hexagonais.

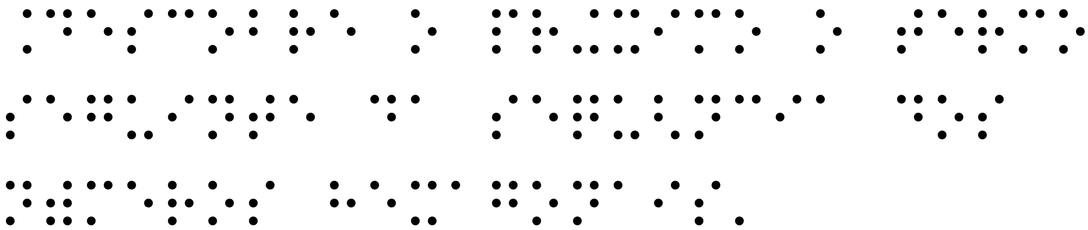


Explicita o teu raciocínio.

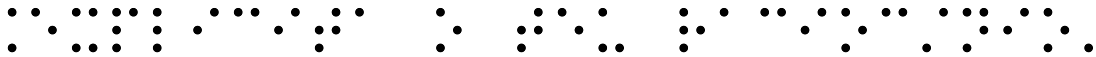
Anexo 7A - Atividade VII - *Números hexagonais.*

(VERSÃO BRAILLE)



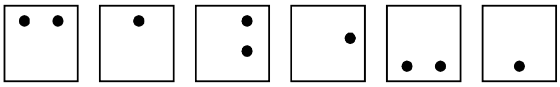


(Figura em relevo)



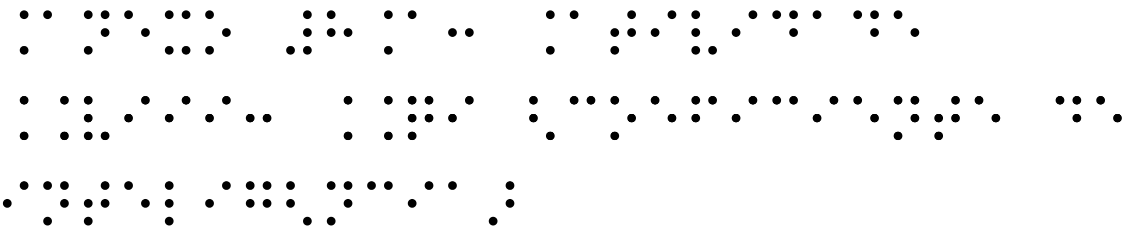
Anexo 8 - Atividade VIII - *QI (coeficiente de inteligência)*

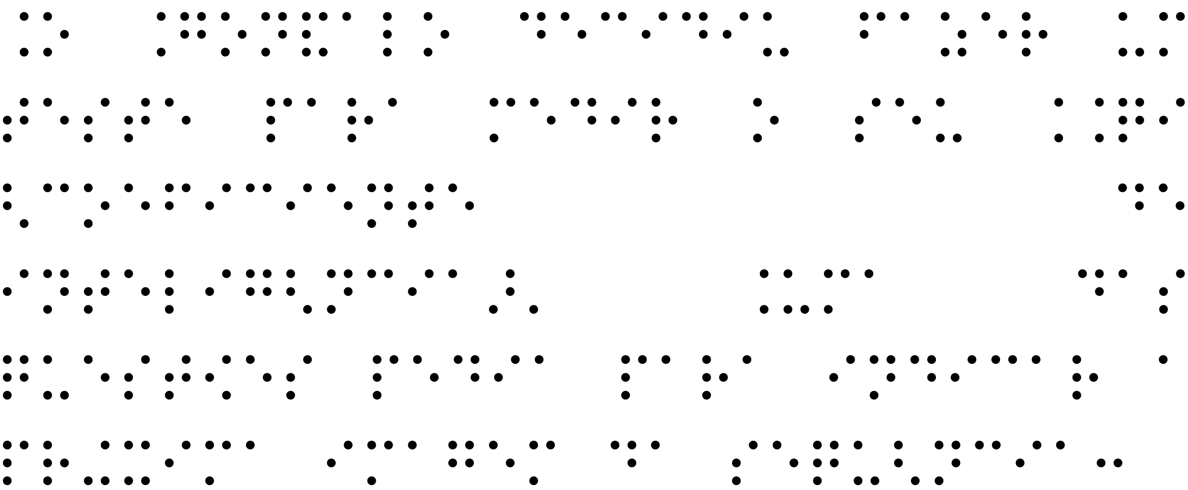
O Gonçalo decidiu fazer um teste para medir o seu QI (coeficiente de inteligência). Uma das questões pedia para indicar a próxima imagem da sequência:



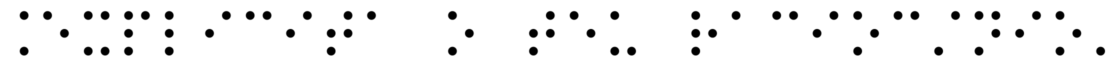
Explicita o teu raciocínio.

Anexo 8A - Atividade VIII - *QI (coeficiente de inteligência)*
(VERSÃO BRAILLE)





(Figura em relevo)



Anexo 9 - Atividade IX - *Sequência com retângulos*

Atividade IX: Parte I

Observa a seguinte sequência construída com retângulos.

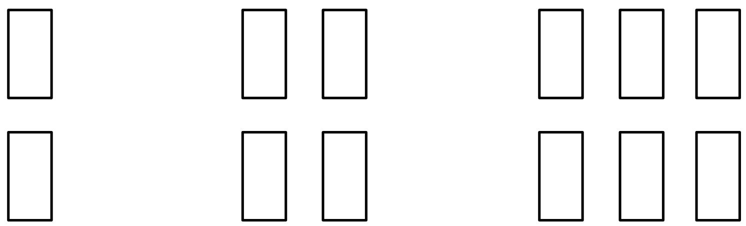


Fig.1 Fig.2 Fig.3

a) Quantos retângulos terá a figura seguinte?

b) Quantos retângulos formam a figura 10? E a figura 50? Explica o teu raciocínio.

c) Nesta sequência, existirá alguma figura composta por 157 retângulos? Se existir, indica o número da figura.

d) Nesta sequência, existirá alguma figura composta por 324 retângulos? Se existir, indica o número da figura.

e) Encontra um processo que permita determinar o número de retângulos da figura, dependendo do número da figura? Explica-o.

Atividade IX: Parte II

Observa a seguinte sequência:

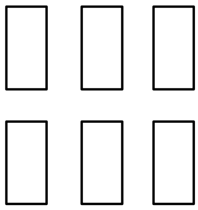


Fig.1

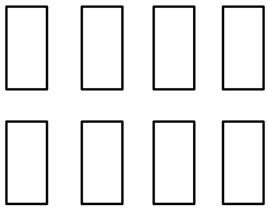


Fig.2

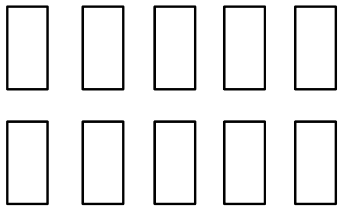
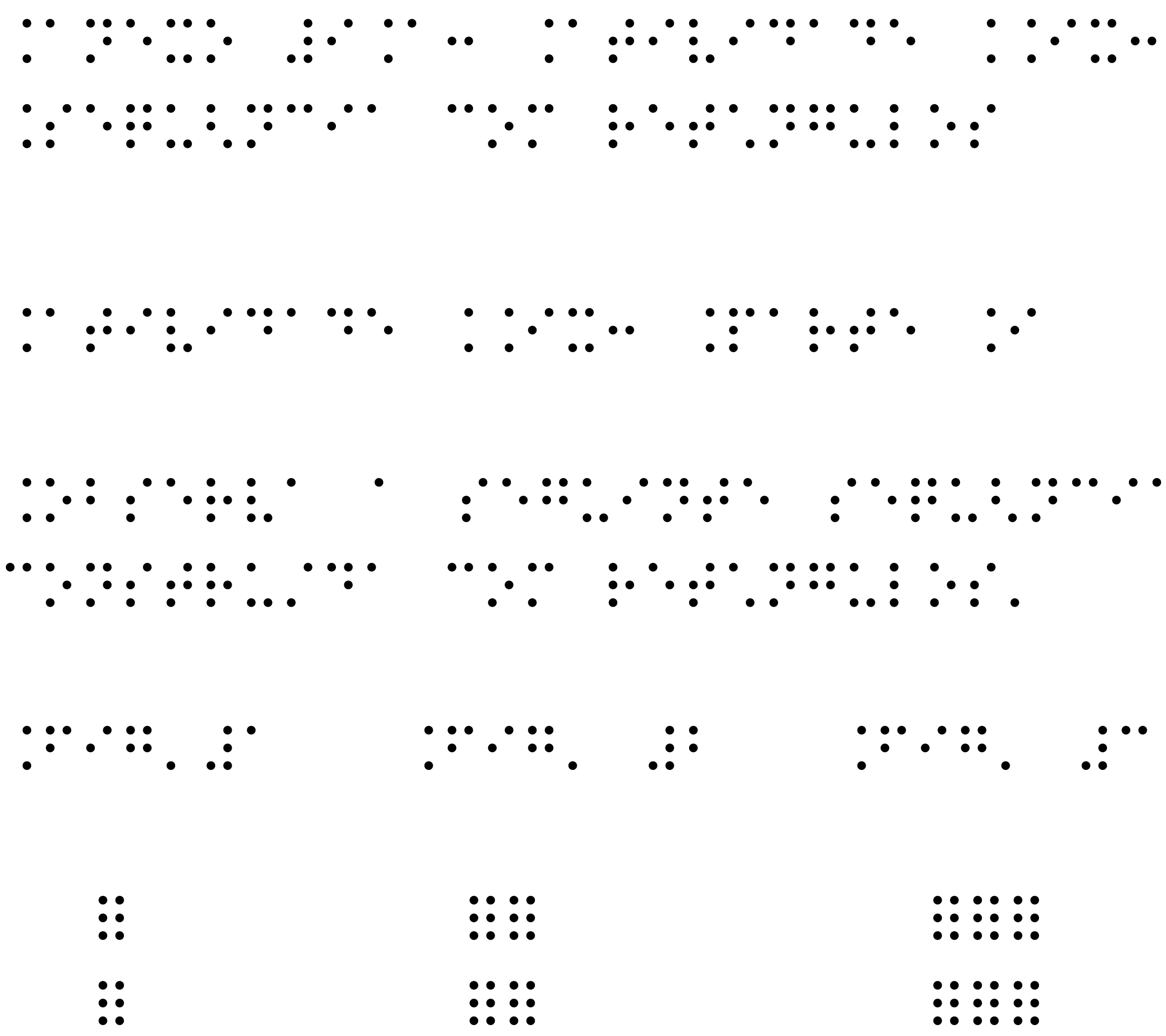


Fig.3

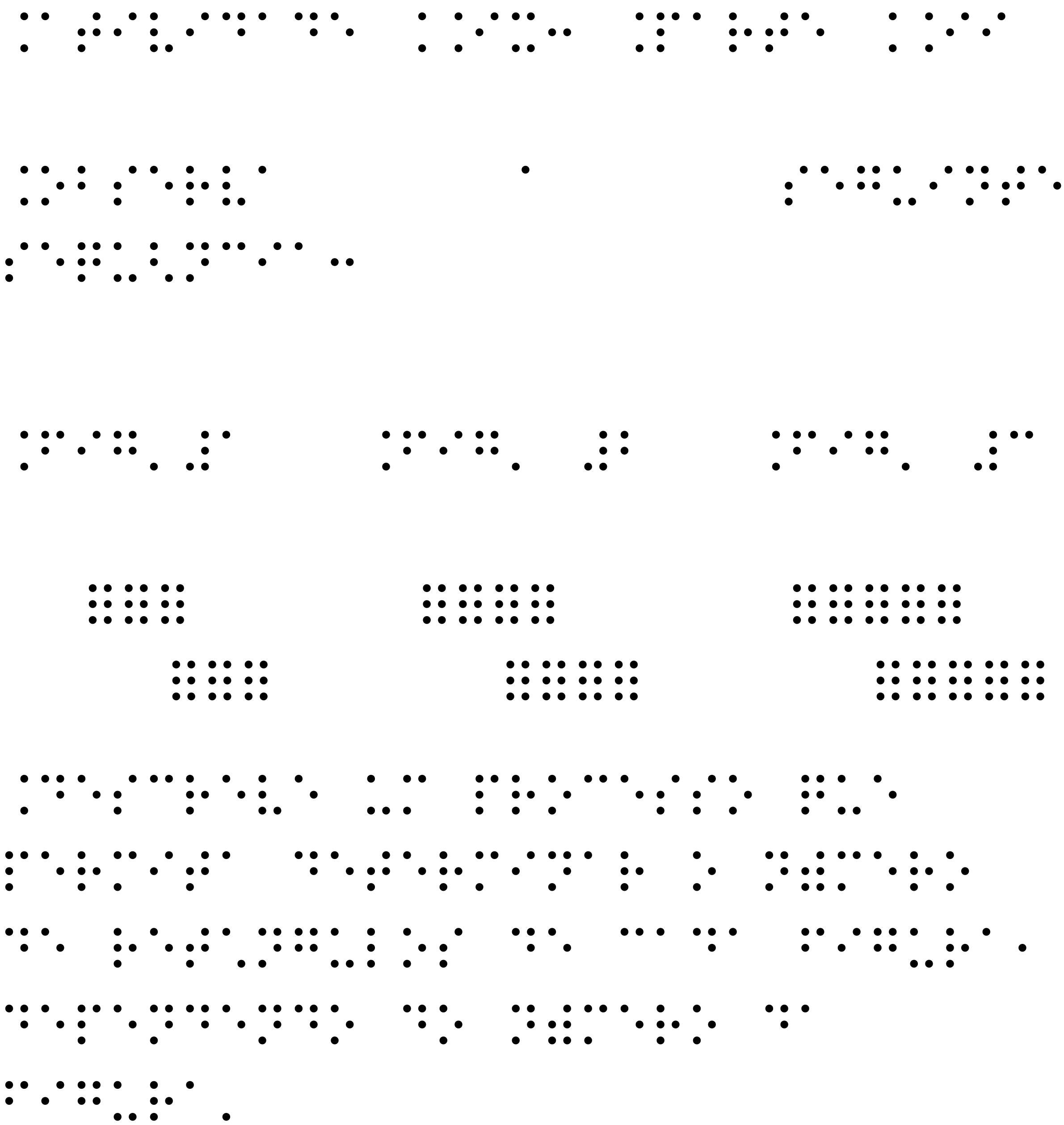
Descreve um processo que permita determinar o número de retângulos de cada figura, dependendo do número da figura.

Anexo 9A - Atividade IX - *Sequência com retângulos*
(VERSÃO BRAILLE)

Atividade IX: Parte I



Atividade IX: Parte II



Anexo 10 - Atividade X - *O triângulo retângulo de números ímpares*

Observa o seguinte triângulo retângulo de números ímpares:

1
1 3
1 3 5
1 3 5 7
1 3 5 7 9
1 3 5 7 9 11
_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

a) Escreve a sétima linha.

b) Adiciona os números de uma mesma linha e completa a tabela que se segue com os resultados.

Linha n.º	**Soma dos números da linha**
1	1
2	4
3	
4	
5	
6	
7	

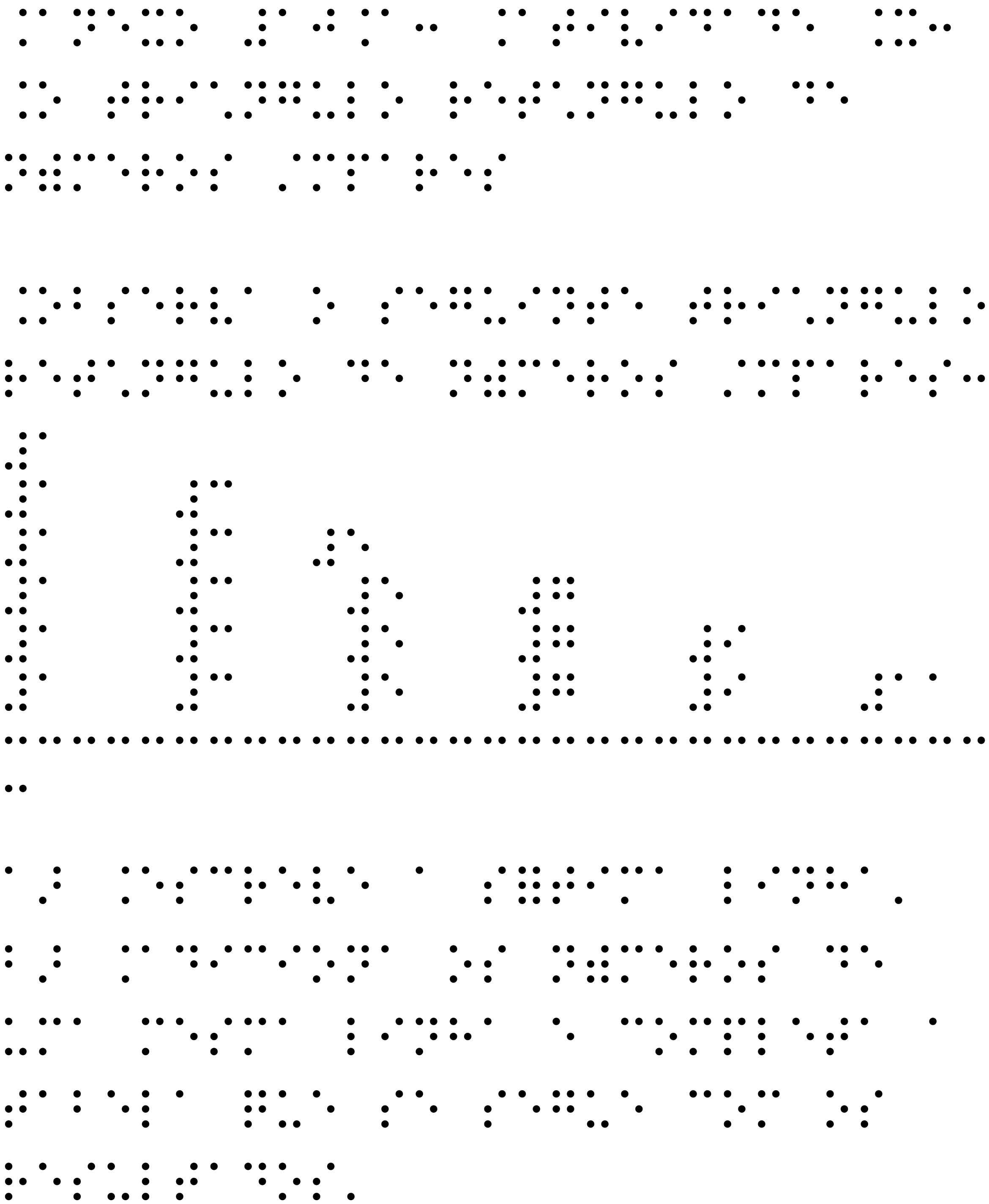
c) Observando os resultados obtidos, indica qual a soma dos números da oitava linha do triângulo, **sem a escrever**.

d) Qual é o número da linha do triângulo cuja soma dos números é 100?

e) Consegues encontrar um processo que nos indique a soma dos números de uma determinada linha do triângulo, dependendo do número da linha? Explica-o.

Anexo 10A - Atividade X - *O triângulo retângulo de números ímpares*

(VERSÃO BRAILLE)



⠞⠗⠊⠡⠝⠛⠥⠇⠕⠂ ⠙⠑⠏⠑⠝⠙⠑⠝⠙⠕ ⠙⠕
⠝⠾⠍⠑⠗⠕ ⠙⠁ ⠇⠊⠝⠓⠁⠢ ⠨⠑⠭⠏⠇⠊⠉⠁⠤⠕⠄

Anexo 11 - Tarefa de Exploração I: *Localização de pontos no plano*.

Questão 1: Determina as coordenadas dos pontos marcados no referencial.

Questão 2: Qual ou quais os pontos pertencentes aos quadrantes pares? O que podes concluir?

Questão 3: Qual ou quais os pontos pertencentes aos quadrantes ímpares? O que podes concluir?

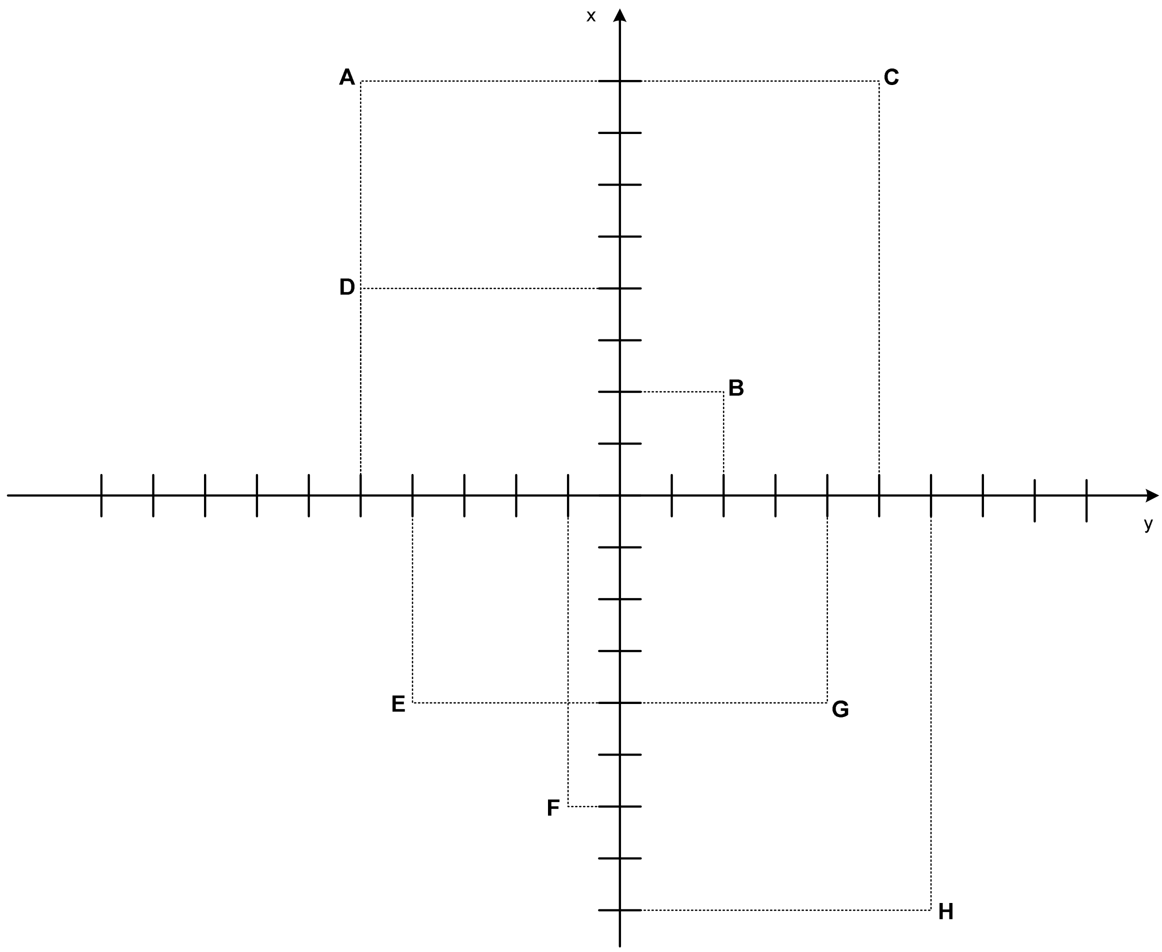
Questão 4: Descobre pontos cuja abcissa é igual à ordenada.

Questão 5: A soma das coordenadas seja positiva e o produto negativo

Questão 6: A soma das coordenadas seja negativa e o produto positivo.

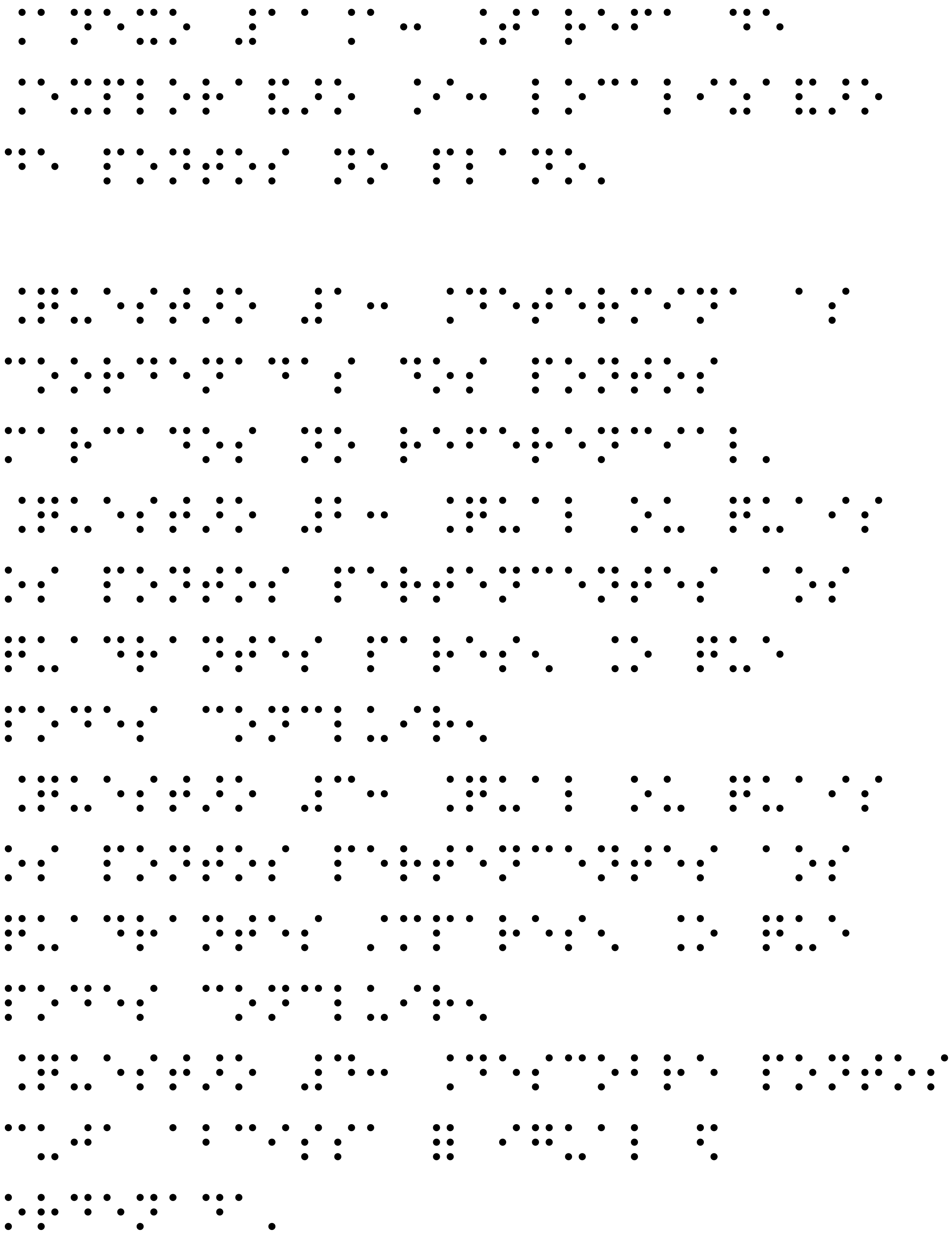
Questão 7: Qual o quadrante a que pertence cada um dos pontos seguintes?

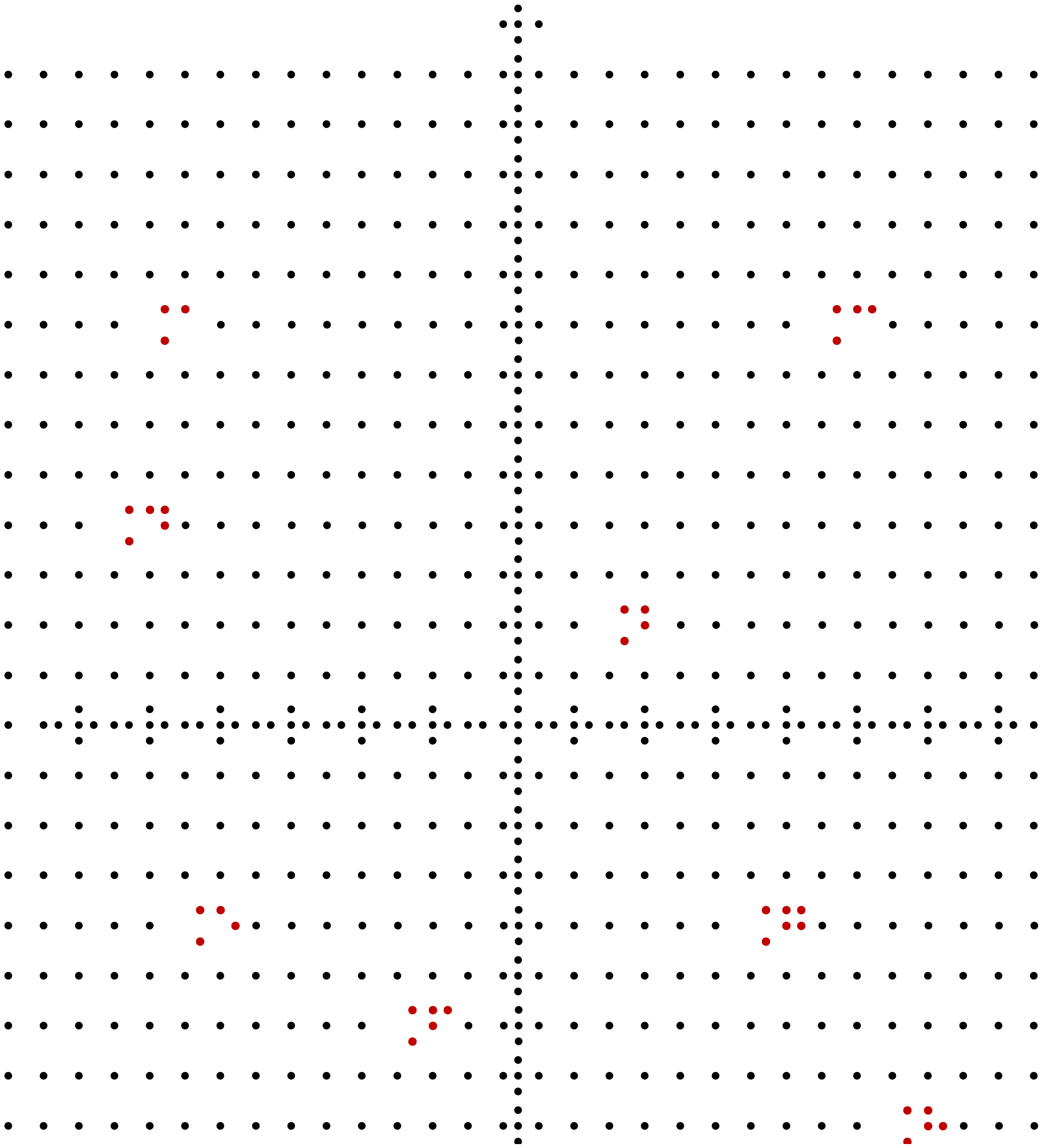
(2 , − 3) ; (− 2 , − 2); (−1 , 4); (1 , 5)



Anexo 11A - Tarefa de Exploração I: *Localização de pontos no plano.*

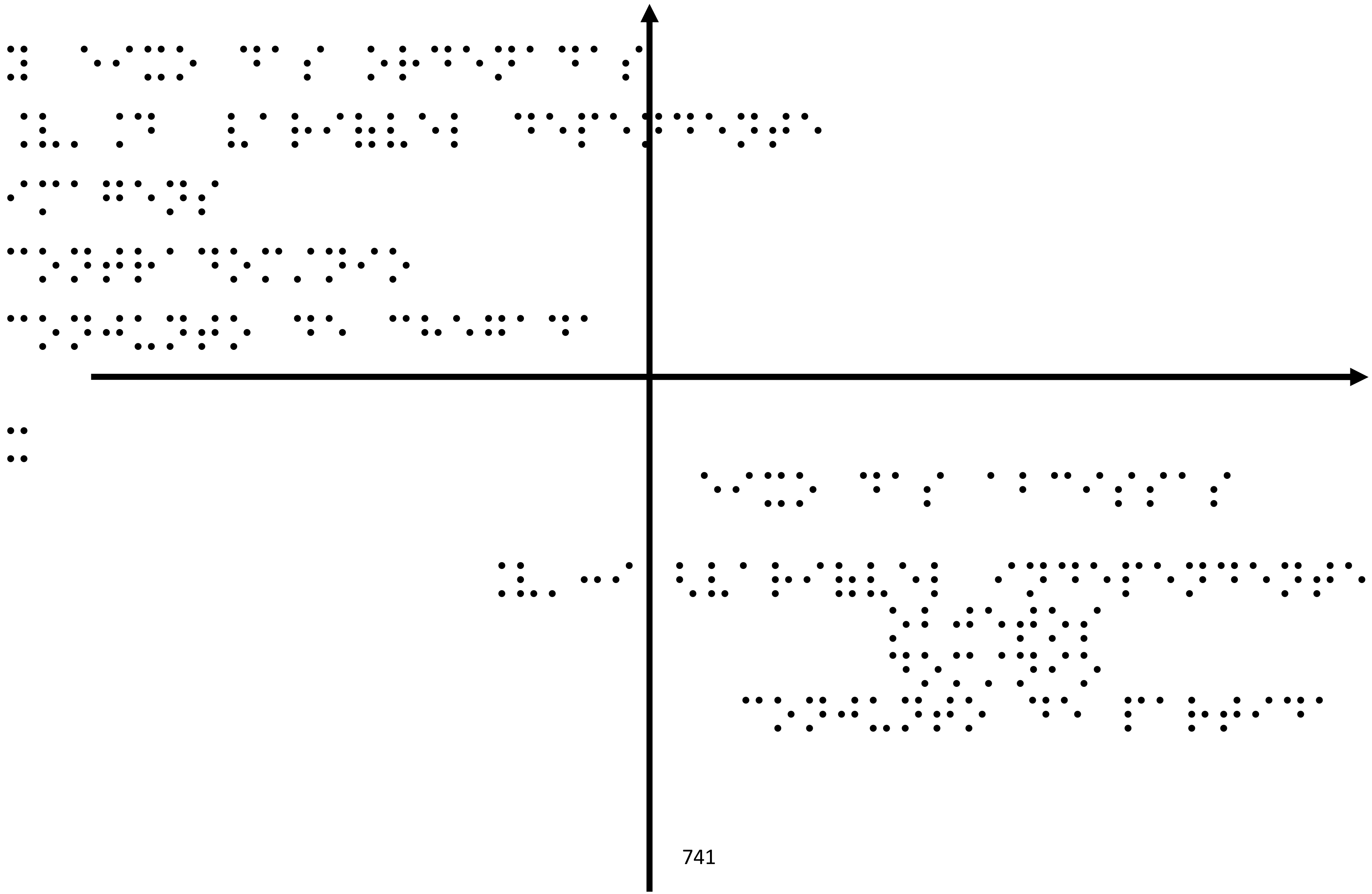
(VERSÃO BRAILLE)





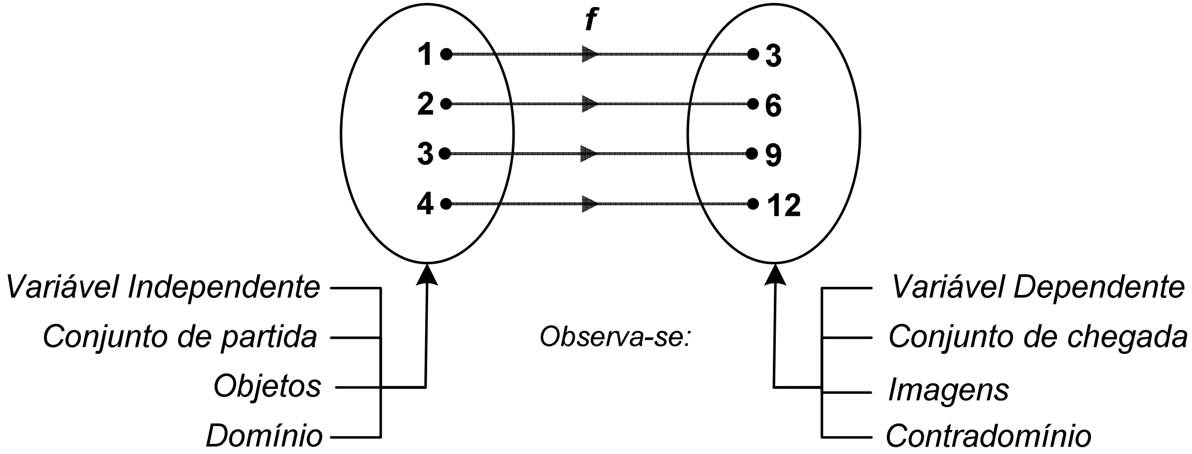
Anexo 12A – *Componentes de uma função no referencial cartesiano*

(VERSÃO BRAILLE)



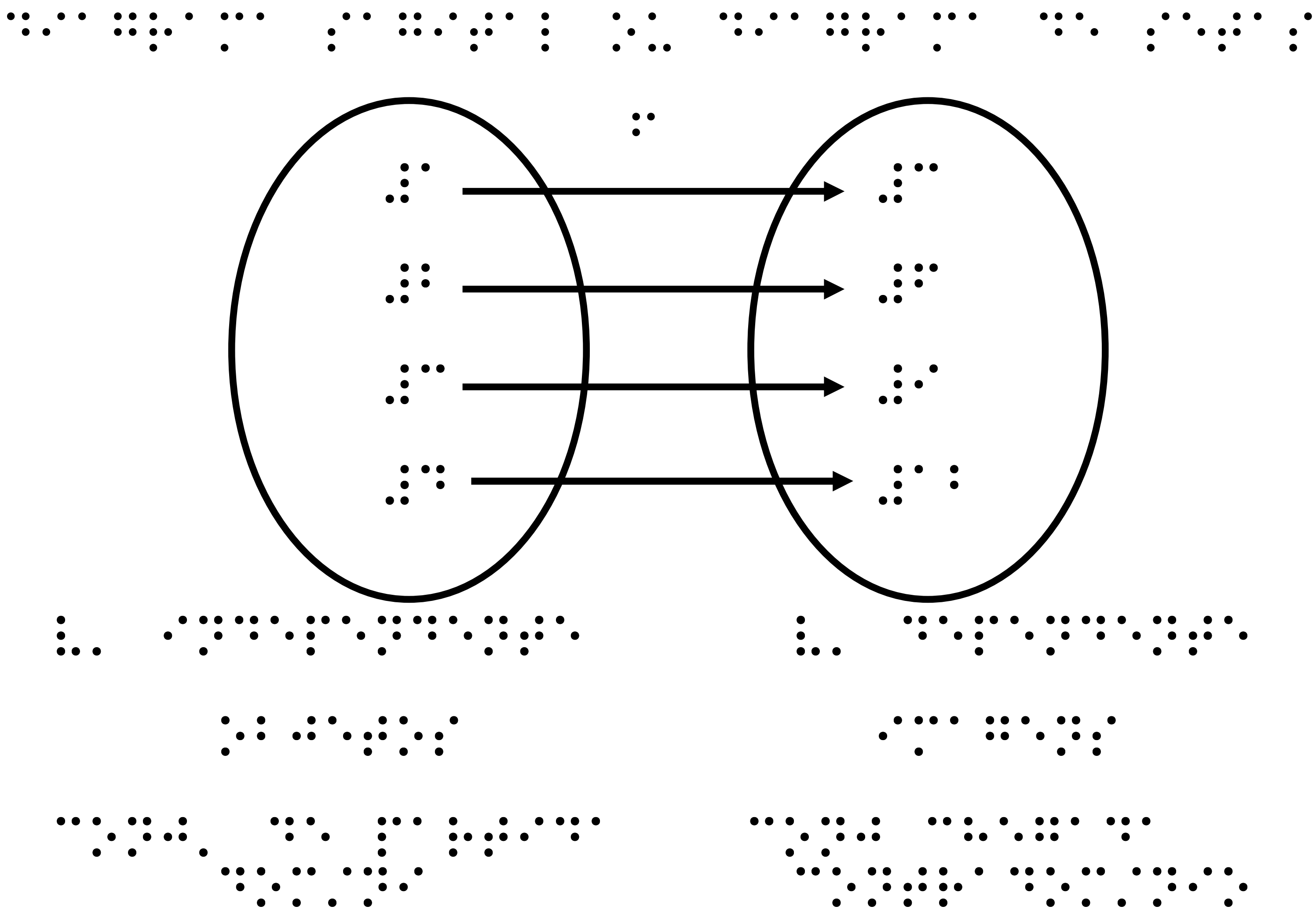
Anexo 13 – *Diagrama Sagital ou Diagrama de Setas*

Diagrama Sagital ou Diagrama de Setas



Anexo 13A – *Diagrama Sagital ou Diagrama de Setas*

(VERSÃO BRAILLE)



Anexo 14 – *Esquematização em tabela*

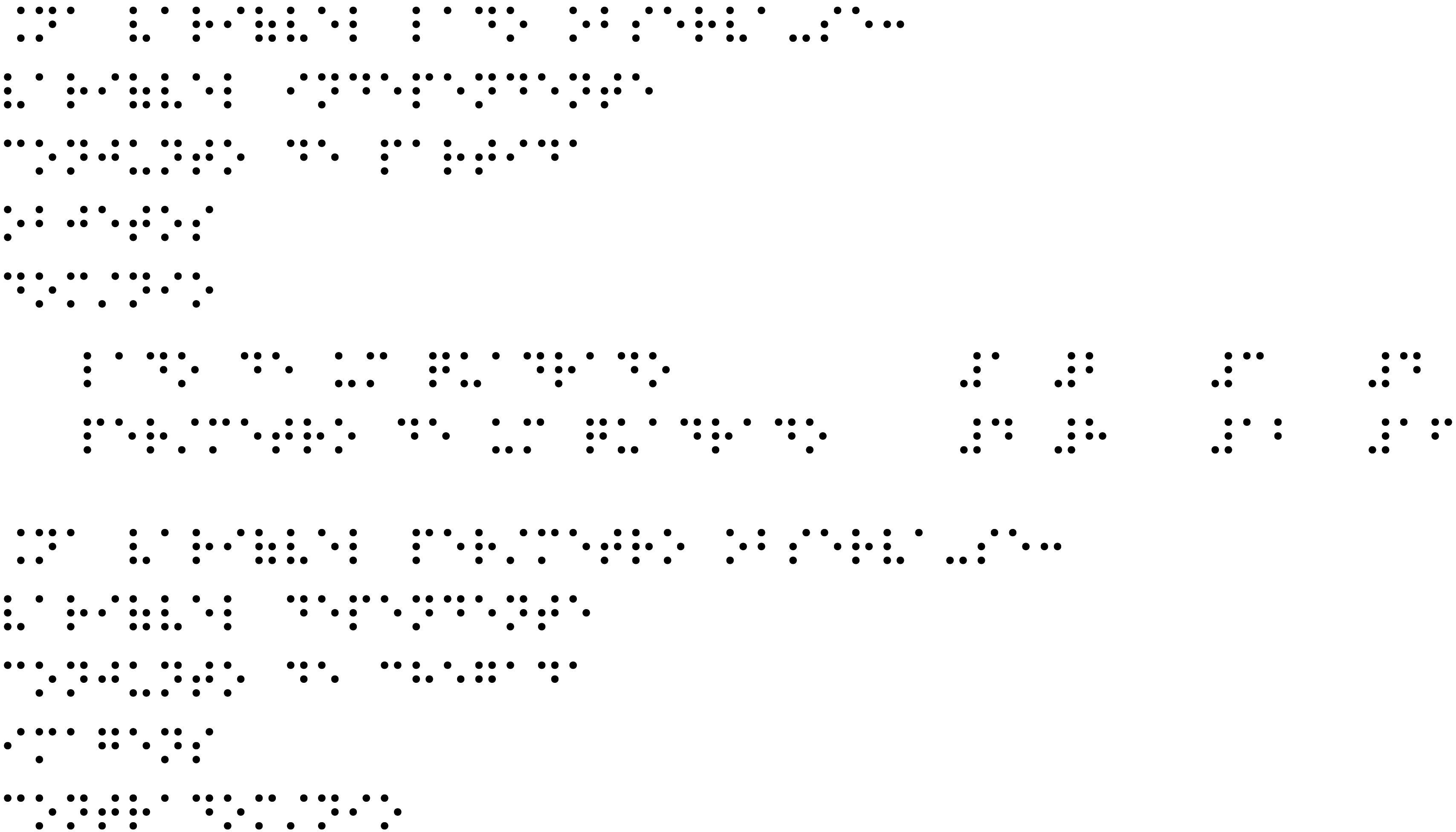
Variável Independente
Conjunto de partida
Objetos
Domínio

Lado de um quadrado (l)	1	2	3	4
Perímetro do quadrado (P)	4	8	12	16

Variável Dependente
Conjunto de chegada
Imagens
Contradomínio

Anexo 14A – *Esquematização em tabela*

(VERSÃO BRAILLE)



Anexo 15

MINITESTE DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS

Tema: *Sequências e Regularidades*

1 - Observa a sequência de números da tabela.

Número da linha	1	2	3	4	5
Valor da sequência	30	27	24	21	18

1.1 - Identifica uma regularidade.

1.2 - Qual o valor da sequência na 7ª linha?

1.3 - Existe alguma linha com o valor da sequência zero?

1.4 - Descreve uma regra que relacione o número da linha com o valor da sequência que funcione sempre?

2 – Considera a sequência de termo geral $10 - 4n$.

2.1 – Determina os três primeiros termos desta sequência.

2.2 – Determina o termo de ordem seis desta sequência.

2.3 – Verifica se -70 e 0 são termos desta sequência.

3 - Considera a sequência do número total de quadradinhos.

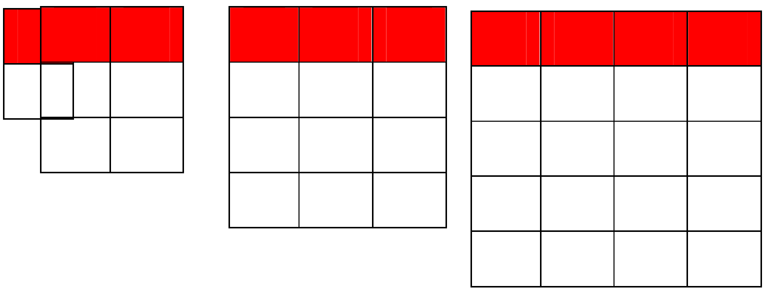


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

3.1 - Quantos quadradinhos terão a figura seis?

3.2 - Existe alguma figura com cem quadradinhos?

3.3 - Descreve uma regra que relacione o número da figura com o número de quadradinhos e que funcione para todas as figuras?

Anexo 16

FICHA DE TRABALHO N.º1

Tema: *Conceito de função*

1. Na figura está representada uma sequência de quatro quadrados (A1, A2, A3 e A4) e em cada um deles está indicado a medida do lado (L1, L2, L3 e L4). Observa-se que o quadrado A1 tem a medida do lado L1 = 1cm; A2 tem L2 = 2cm; A3 tem L3 = 3cm e A4 tem L4 = 4cm.

A) Considera a correspondência que à medida do lado de cada quadrado faz corresponder o seu perímetro.

a1) A correspondência descrita anteriormente representa uma função? Justifica a tua resposta.

a2) Completa a seguinte tabela:

Medida do lado (L)	Perímetro do quadrado (P)
1	?
2	?
3	?
4	?

a3) A tabela preenchida em **a2)** traduz uma situação de proporcionalidade direta? Em caso afirmativo, indica a constante de probabilidade e o seu significado neste contexto.

a4) Determina uma expressão algébrica que traduza esta correspondência.

B) Considera agora a correspondência que à medida do lado de cada quadrado faz corresponder a sua área.

b1) A correspondência descrita anteriormente representa uma função? Justifica a tua resposta.

b2) Completa a seguinte tabela:

Medida do lado (L)	Área do quadrado (A)
1	?
2	?
3	?
4	?

b3) A tabela preenchida em **b2)** traduz uma situação de proporcionalidade direta? Em caso afirmativo, indica a constante de probabilidade e o seu significado neste contexto.

b4) Determina uma expressão algébrica que traduza esta correspondência.

2. O Gonçalo foi à praia. Quando saiu da praia, estava a 4 quilómetros de casa. Seguiu a pé, a caminho de casa, sempre a andar ao mesmo ritmo. Pelo seu relógio, concluiu que percorreu cada quilómetro em 15 minutos.

a) Completa a tabela, sendo t o tempo, em minutos, e d a distância do Gonçalo a casa, em quilómetros.

Tempo (t)	Distância (d)
0	?
?	3
30	?
?	1
60	?

b) A correspondência estabelecida entre o tempo (t), em minutos e a distância (d), em quilómetros é uma função? Justifica a tua resposta.

c) Quais são as variáveis dependente e independente?

Anexo 17

<u>FICHA DE TRABALHO N.º2</u>

Tema: *Representações de uma função*

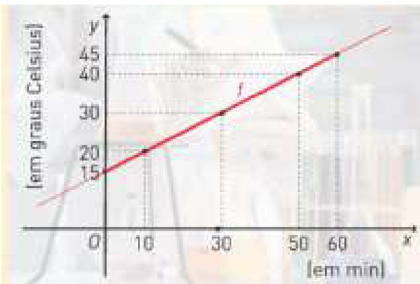
1. Uma empresa de táxis cobra 2,5€ de taxa inicial, acrescida de 0,5€ por cada quilómetro percorrido.

a) Constrói uma tabela que represente uma função de domínio $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15\}$ onde se relacione a distância percorrida, em quilómetros, com o preço a pagar, em euros.

b) Verifica se se trata de um caso de proporcionalidade direta. Em caso afirmativo, indica a constante de proporcionalidade e o seu significado.

c) Encontra uma expressão algébrica que represente esta função.

2. Na figura está representada graficamente a função f que relaciona a temperatura de uma substância ao longo do tempo durante uma experiência do laboratório realizada durante uma hora.



a) Descreve como variam as duas grandezas x e y?

b) Qual o valor da temperatura passados 20 minutos?

c) Quando a temperatura for 35 graus, quantos minutos terão passados?

d) Consegues descrever uma regra que relacione x e y e que funcione sempre?

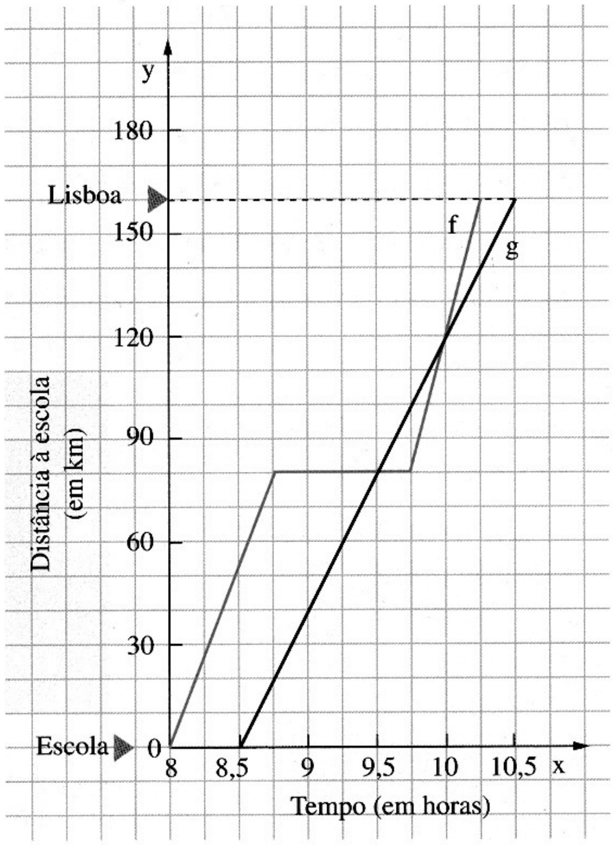
Anexo 18

FICHA DE TRABALHO N.º3

Tema: *Representações de uma função*

1. Os dois gráficos representam os percursos de dois autocarros que saíram da mesma escola em direção a Lisboa com intervalo de meia hora.

O autocarro que saiu mais cedo teve uma avaria e precisou de se dirigir a uma oficina.



a) A que horas saiu da escola o 1º autocarro? E o 2º autocarro?

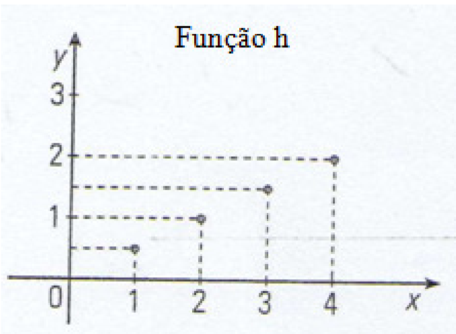
b) A que distância estava o 1º autocarro da escola quando se avariou?

c) Qual dos autocarros chegou primeiro a Lisboa?

d) A que distância se encontra a escola de Lisboa?

e) A que distância se encontravam os dois autocarros da escola, quando o 1º autocarro ultrapassou o 2º?

2. Considera a seguinte função:

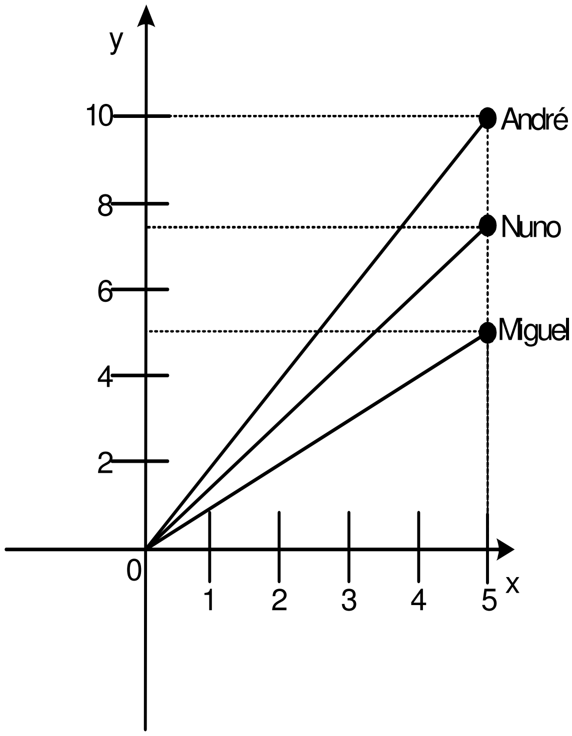


a) Representa a função h por meio de uma tabela.

b) Indica o domínio e contradomínio de h.

c) Qual a imagem do objeto 2? E qual o objeto que tem imagem 1?

3. O André o Nuno e o Miguel trabalham em diferentes lojas de gomas, na distribuição de publicidade ao domicílio. No referencial ao lado encontram-se registadas as horas de trabalho e o respetivo pagamento.



a) Qual dos três rapazes recebeu mais dinheiro? Explica porquê.

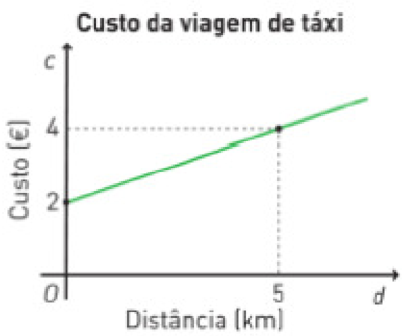
b) Quanto ganha cada um deles numa hora de trabalho?

c) Determina o número de horas que é preciso o Miguel trabalhar para ganhar *15€*.

d) Determina a expressão algébrica da função que relaciona o tempo de trabalho (horas) e o valor a receber (euros), no caso do Miguel.

e) Organiza numa tabela, o valor a receber pelo Miguel por cada hora de trabalho.

4. O Sr. Raul é taxista. Por cada serviço prestado, o cliente paga uma taxa fixa, acrescida de um valor por cada quilómetro percorrido. O gráfico da função que relaciona o custo a pagar pelo cliente e a distância percorrida faz parte da semirreta representada na figura ao lado.



a) Indica o valor da taxa fixa.

b) Determina o preço de cada quilómetro percorrido (sem considerar a taxa fixa).

c) Um cliente fez uma viagem de 12 quilómetros. Qual foi o valor a pagar ao taxista?

d) Um cliente pagou 14€ por uma viagem. Qual foi a distância percorrida?

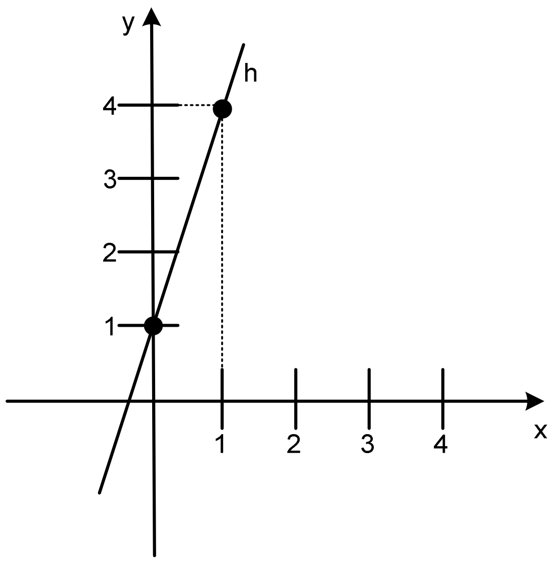
e) Determina a expressão analítica da função que relaciona o custo da viagem com a distância percorrida.

f) Organiza numa tabela os valores da distância percorrida e do respetivo custo representados pelo gráfico da função.

5. Na figura pode observar-se a representação gráfica de uma função afim *h*.

Qual a expressão algébrica que define a função *h*?

Escolhe a opção correta:



A) y=3x+1 **B)** y=4x+1

C) y=3x+4 **D)** y=3x+0,5

6. O aparelho de ar condicionado de uma sala de cinema teve uma avaria durante a exibição de um filme.

A temperatura, *C*, da sala, *t* horas após a avaria e até ao final do filme, pode ser dada, aproximadamente, pela expressão: $C(t) = 21 + 2t$, com *C* expresso em graus centígrados e *t* expresso em horas.

a) Na sala, qual era a temperatura, em graus centígrados, uma hora após a avaria? Explica como chegaste à sua resposta.

b) Qual foi, na sala, o aumento da temperatura por hora, em graus centígrados?

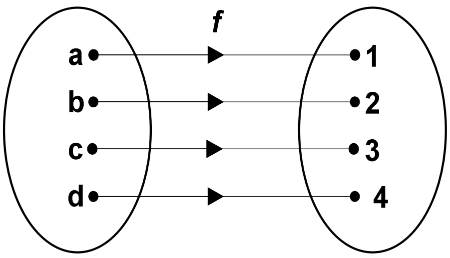
c) No final do filme, a temperatura na sala era de 24 graus centígrados. Há quanto tempo tinha ocorrido a avaria? Apresenta o resultado em minutos.

Anexo 19

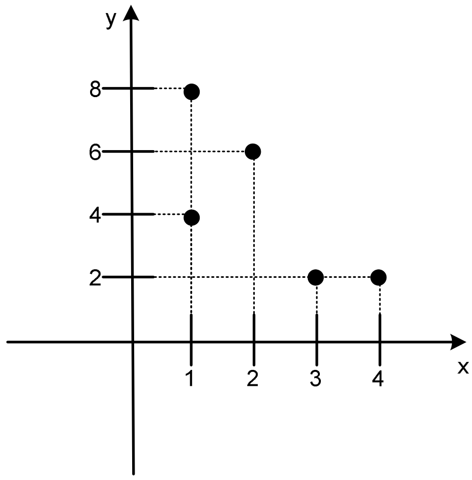
MINITESTE DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS
Unidade Temática: Funções

1. Observa as seguintes representações e indica a que representa uma função.

A)



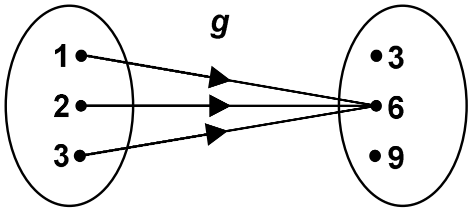
B)



C)

x	2	3	5	6	10
y	1	1,5	2,5	3	5

D)



2. Consideremos a seguinte sequência: 3, 5, 7, 9, 11.

O seu termo geral, isto é, o termo correspondente ao elemento genérico de ordem ***n***, pode ser representado por 2n+1, podendo estabelecer-se uma correspondência da seguinte forma:

Ordem do termo	1	2	3	*n*
Termo	3	5	7	*2n+1*

2.1. A correspondência apresentada na tabela é uma função? Justifica a tua resposta.

2.2. Indica o domínio e o contradomínio da função.

2.3. Designemos esta correspondência por f. Calcula:

2.3.1. Qual é a imagem do objeto 3?

2.3.2. Qual o objeto que tem por imagem 21?

2.3.3. f(6)

2.3.4. f(x) = 11

3. No Verão, a Joana come um gelado por semana e cada gelado custa 2€. Porém, começou a pensar se, em vez de um gelado, comesse dois, três ou quatro, quanto iria pagar por semana.

Podemos resumir a informação numa tabela de modo a compreender como varia a

N.º de Gelados	1	2	3	4	5	….
Despesa Semanal (€)	2		6			

despesa semanal em função do número de gelados.

3.1. Completa a tabela referente ao número de gelados comprados e a respetiva despesa:

3.2. Qual a variável independente? E qual a variável dependente?

3.3. Designando por x o número de gelados e por y a despesa semanal (em euros), complete a expressão $y =$ ___x.

3.4. As grandezas número de gelados e despesa semanal são diretamente proporcionais? Em caso afirmativo, indique a constante de proporcionalidade e o seu significado no contexto do problema.

Anexo 20

<u>Ficha de Trabalho – "*Equações I*"</u>

1. O Gonçalo pensou num número e adicionou-lhe 6 unidades. Multiplicou o resultado por 3 e obteve 30. Qual foi o número em que o Gonçalo pensou? Apresenta todos os cálculos efetuados.

2. Em cada uma das alíneas seguintes, descobre o número de modo a obteres afirmações verdadeiras:

2.1) 6 + ? =15 **2.2)** ? - 200 = 120 **2.3)** 3 x ? + 6 = 30 **2.4)** 3 x (? + 6) = 30

3. Descobre em cada caso o valor de ***x***, de modo que os triângulos sejam equiláteros. Explica o teu raciocínio.

3.1) Na figura está representado um triângulo em que dois dos seus lados medem 120cm cada um, e o terceiro lado mede x+11.

3.2) Na figura está representado um triângulo em que dois dos seus lados medem 30cm cada um, e o terceiro lado mede 3x+12.

4) Considera um retângulo em que a medida do seu comprimento é igual à medida da largura mais 5 cm. Se o perímetro do retângulo for igual a 38 cm, quanto medem, a largura e o comprimento dele? Justifica a tua resposta

.

5) Dos valores que se indicam, qual é solução de cada uma das seguintes equações? Indica qual a letra que corresponde à resposta correta.

5.1) a + 9 = 4

Possíveis soluções: A) 5; B) 3; C) -5

5.2) b – 3 = - 9

Possíveis soluções: A) -12; B) -6; C) 6

5.3) - 3 + 3 c = 15

Possíveis soluções: A) -5; B) 6; C) 4

6. Considera as duas situações A e B e responde às questões de cada uma delas:

6.1) <u>Situaçâo A</u>: Considera a seguinte equação: 9x - 4 =10.
Indica o primeiro membro e o segundo membro da equação, os termos sem incógnita (independentes) e os termos com incógnita.

6.2) <u>Situaçâo B</u>: Considera uma equação onde esse conhece o primeiro membro 2x + 4 e o segundo membro 14.
Indica os termos sem incógnita (independentes), os termos com incógnita e a respetiva equação.

Anexo 21

FICHA DE TRABALHO

Resolução de problemas envolvendo Equações

Resolve cada um dos seguintes problemas, começando por escrever uma equação que traduza cada um deles.

1. Pensei num número e adicionei-lhe 6. Multipliquei o resultado por 3 e por fim subtraí o número em que tinha pensado. Obtive o valor 32. Qual o número em que pensei?

2. Os três lados de um triângulo têm comprimentos diferentes. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro lado e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado. Se o perímetro do triângulo for 31 cm, qual a medida de cada um dos lados do triângulo?

3. Imaginemos uma estrada retilínea onde existem três casas A, B e C. A ordem pela qual estão dispostas as casas é a seguinte: A, B e C. Sabendo que a distância entre a casa A e a casa B é o triplo da distância entre a casa B e a casa C e que a distância entre a casa A e casa B é 72km, qual a distância entre A e B?

Anexo 22

Ficha de Trabalho – “Ine*quações I*”

1. Representa cada uma das afirmações por meio de uma inequação.

a) *y* é menor do que 17.

b) A soma de *x* com o seu triplo é pelo menos 18.

c) A diferença entre 15 e 2*x* não é maior do que 30.

d) O produto de *y* por 6 é, no máximo 400.

e) O quociente entre *m* e 5 é maior do que 18.

f) A diferença de quadrados entre 5 e 3 é menor que *r*.

g) O quadrado da diferença entre 10 e 5 é menor ou igual a *y*.

Anexo 23

Questão - Aula – “Terminologia usada em Inequações”

1. Considere-se a seguinte inequação: $3y + 4 > -2y - 3$

Indique:

a) 1.º membro da inequação;

b) 2.º membro da inequação;

c) Termos do 1.º membro;

d) Termos do 2.º membro;

e) Incógnita;

f) Termos com incógnita;

g) Termos independentes.

Anexo 24

<u>FICHA DE TRABALHO</u>

Resolução de Inequações do 1.º grau

1 - Resolve cada uma das inequações, apresentando o conjunto-solução na forma de um intervalo de números reais.

a) $x + 5 \geq 8$

b) $11 - m \leq -3$

c) $8x + 4 - 2x > 5(x - 1)$

d) $(5y+2) \div 5 > y \div 2 + 5 \div 2$

Anexo 25

FICHA DE TRABALHO

Resolução de problemas envolvendo Inequações do 1.º grau

Resolve cada um dos seguintes problemas, começando por escrever uma expressão que traduza cada um deles.

1. Que valores pode ter k para que $k + 5$ seja superior a 5?

2. Pensei num número. De seguida subtrai-lhe 10 e depois multipliquei por 5. Obtive um número menor que 25. Que número pensei inicialmente?

3. Pensei num número, multipliquei-o por 2 e depois somei-lhe 7. Obtive um número superior a 35. Qual é o número?

4. Inventa um enunciado de um problema que corresponda à seguinte inequação:

$7+b > 40$

5. Qual é o maior valor inteiro que y pode assumir, de modo que a expressão $-4(y - 4) - 3$ represente um número do intervalo $]-3, +\infty[$?

Anexo 26

MINITESTE DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS - *Equações*

Tópico: Equações do 1.º grau

1. Considera as seguintes balanças em equilíbrio:

A balança 1:

O prato da esquerda contém três elementos: um número 3, uma letra y e uma letra y.

O prato da direita contém dois elementos: um número 7 e uma letra y.

A balança 2:

O prato da esquerda contém quatro elementos: um número 9, uma letra y, uma letra y e uma letra y.

O prato da direita contém também quatro elementos: um número 2, um número 5, um número 6 e uma letra y.

Em cada uma das balanças, descobre o valor desconhecido.

2. Resolve as seguintes equações:

2.1. $25\, b – 4 = b + 20$

2.2. $[2\, (n – 4)]÷3 + 2(3n-1) = 1÷3$

2.3. $8x + 4 -2x > 5(x – 1)$

3. O Gonçalo adora resolver equações de 1º grau. Acontece que ele é muito distraído e engana-se com facilidade a resolver as equações.

Podes ajudar o Gonçalo a descobrir os seus erros? Identifica os erros e corrige-os.

3.1.

$$
\begin{aligned}
&3+4x=11 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 7x=11 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x=\frac{11}{7}
\end{aligned}
$$

3.2.

$$
\begin{aligned}
&6(x-4)+2=5x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 6x-24+2=5x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 6x-22=5x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x=-22
\end{aligned}
$$

3.3.

$$
\begin{aligned}
&7x+4=x+7 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 7x-x=7-4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 6x=3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x=2
\end{aligned}
$$

4. Resolve a seguinte situação problemática:

A Joana e Carla vão comprar uma prenda para a Beatriz. As duas amigas juntas têm 24 euros mas a Joana tem mais 8 euros do que a Carla. Quanto dinheiro tem cada rapariga?

5. Resolve a seguinte situação problemática:

Pensei num número, multipliquei-o por 2 e depois somei-lhe 7. Obtive um número superior a 35. Qual é o número?

Anexo II – Legenda de figuras

Anexo III – Legenda de tabelas

Anexo IV – Questionários

Questionário 1 - Aluno

1. Numera, de 1 a 5, considerando 1 – o menos adequado e 5 – o mais adequado.

A Matemática serve essencialmente para…

Para calcular.	
Para compreender.	
Para memorizar.	
Para raciocinar.	
Para solucionar problemas.	

2. Analisa o teu desempenho na disciplina de Matemática, preenchendo os espaços correspondentes a cada item com [X], de acordo com a seguinte escala:

1 – sempre; 2 – frequentemente; 3 – por vezes; 4 – raramente; 5 – nunca

	1	2	3	4	5
Gosto de Matemática.					
Sou bom aluno.					
Realizo as tarefas autonomamente.					
Resolvo os exercícios no mesmo tempo que os meus colegas.					
Gosto de trabalhar em pares ou grupos.					
Gosto de participar oralmente.					
Faço os trabalhos de casa.					
Estudo com regularidade.					
Preciso de APA.					
Compreendo os enunciados.					
Justifico os resultados.					
Escrevo facilmente expressões matemáticas.					
Conheço a simbologia matemática.					
Necessito da máquina de calcular.					

Obrigado pela tua colaboração

Questionário 2 - Professor

1. Numere, de 1 a 5, aquela que, na sua opinião é a conceção do aluno, considerando

1 – o menos adequado e 5 – o mais adequado.

A Matemática serve essencialmente para…

Para calcular.	
Para compreender.	
Para memorizar.	
Para raciocinar.	
Para solucionar problemas.	

2. Analise o desempenho do aluno na disciplina de Matemática, preenchendo os espaços correspondentes a cada item com [X], de acordo com a seguinte escala:

1 – sempre; 2 – frequentemente; 3 – por vezes; 4 – raramente; 5 – nunca

	1	2	3	4	5
Gosta de Matemática.					
É bom aluno.					
Realiza as tarefas autonomamente.					
Resolve os exercícios no mesmo tempo que os meus colegas.					
Gosta de trabalhar em pares ou grupos.					
Gosta de participar oralmente.					
Faz os trabalhos de casa.					
Estuda com regularidade.					
Precisa de APA.					
Compreende os enunciados.					
Justifica os resultados.					
Escreve facilmente expressões matemáticas.					
Conhece a simbologia matemática.					
Necessita da máquina de calcular.					

Obrigado pela sua colaboração

Questionário 3

1. Analisa o teu desempenho na disciplina de Matemática, preenchendo os espaços correspondentes a cada item com [X], de acordo com a seguinte escala:

1 – sempre; 2 – frequentemente; 3 – por vezes; 4 – raramente; 5 – nunca

	1	2	3	4	5
Resolvo com facilidade expressões numéricas					
Uso expressões numéricas para representar situações					
Identifico sequências e regularidades numéricas e não numéricas.					
Determino termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação					
Resolvo e formulo problemas envolvendo funções					
Compreendo o conceito de função					
Identifico e assinalo pares ordenados no referencial cartesiano					
Represento gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim					
Simplifico expressões algébricas					
Compreendo a noção de equação					
Resolvo equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução					
Compreendo a noção de inequação					
Compreendo a noção de solução de uma inequação					
Resolvo e formulo problemas envolvendo equações					
Resolvo e formulo problemas envolvendo inequações					

Obrigado pela tua colaboração

Anexo V – Planos Educativos Individuais

APROVADO pelo O.D.A.G.E

CARGO: ___________________________

ASSINATURA: _____________________

DATA: _____/_____/_____

Anexo 1

PLANO EDUCATIVO INDIVIDUAL

1.IDENTIFICAÇÃO

Nome do aluno: [redacted]
Data de Nascimento: [redacted] 7 º **ano** 3 º **ciclo** **Turma:** A
Morada: [redacted]
Telefone: [redacted]

1.1. INFORMAÇÃO FAMILIAR

Nome do Pai: [redacted] **Idade:** **Profissão:**
Nome da Mãe: [redacted] **Idade:** 42 **Profissão:** Desempregada
Morada: [redacted]
Telefone: [redacted]
Observações:

1.1.1. Informação caso o aluno não viva com os pais

2. CARACTERIZAÇÃO DO ALUNO

(Dados de anamnese e alíneas b), c) e d) do nº1, do Dec.-Lei 319/91 de 23 de Agosto)

A [redacted] é portadora de Glaucoma Congênito Bilateral, com Cegueira à direita e Alta Miopia, Astigmatismo com Ambliopia profunda no olho esquerdo (AV OD-03 OE-0,2, após correcção). Iniciou acompanhamento de Oftalmologia com acompanhamento pela Drª Arabela (cirurgiã) e pelo Dr. Bívar (consulta de sub-visão), no Instituto Gama Pinto.

Segundo relatório de IOGP, datado de 16/10/2006, a Rute é cega de OD e conta a 2m em OE.

(vide relatórios no Processo Individual da aluna)

2.1 OUTRAS INFORMAÇÕES

(Anexar documentos comprovativos)

A [redacted] foi sujeita a várias intervenções cirurgicas aos dois olhos, no sentido de estacionar a perda de visão, no olho direito tem ptiris lubli e não tem função, usando prótese por motivos estéticos. Assim, deve-se evitar jogos com bolas (ex: baskett, andebol) e gestos bruscos de cabeça (cambalhotas) , ter atenção especial nas aulas de Educação Física.

2.2 INFORMAÇÃO PSICOLÓGICA

2.3 NECESSIDADES EDUCATIVAS ESPECIAIS

As necessidades educativas da [redacted] prendem-se com o seu déficit visual, necessitando de um reforço em algumas áreas curriculares disciplinares e de equipamentos especiais de compensação.

3. INFORMAÇÃO ESCOLAR

A [redacted] frequentou o Externato "[redacted]" onde iniciou a escolaridade obrigatória no ano lectivo [redacted]. Iniciou a sua frequência no [redacted], no ano lectivo seguinte e nesse ano lectivo sofreu uma retenção devido a falta de assiduidade que comprometeu a aquisição de conhecimentos e o seu nível de desempenho.

3.1. Aquisições das competências do (a) aluno(a), sob o ponto de vista educacional

A [redacted] apresenta um desenvolvimento psicomotor regular e boa relação interpessoal com colegas e professores. Ao nível das áreas verbais tem uma fluência e compreensão verbal adequada à sua idade, porém nos aspectos do raciocínio verbal, leitura e escrita existem algumas dificuldades, nomeadamente na compreensão e interpretação de textos, com algumas lacunas nos aspectos gramaticais da língua e na construção frásica.

Há necessidade de desenvolver estratégias de trabalho com a aluna que lhe permitam dinamizar metodologias de estudo autónomo e reforçar as aprendizagens curriculares.

3.2 Medidas previamente estabelecidas e resultados obtidos

A partir do ano lectivo [redacted], a frequentar o 2º ano de escolaridade, beneficiou de Apoio Pedagógico Acrescido a Dificuldades de Aprendizagem, Dactilografia Braille e Mobilidade. Quando transitou para o 5º ano manteve apenas o Apoio Pedagógico Acrescido a Português, Inglês e Matemática.

4. OBJECTIVOS A ATINGIR E MEDIDAS A APLICAR

4.1 Objectivos gerais

- Desenvolver as competências gerais e transversais.

4.2 Objectivos específicos

- Adequar os conteúdos programáticos e as actividades decorrentes dos mesmos ao nível de desempenho da aluna, atendendo às necessidades educativas da mesma.

4.3 Medidas do Regime Educativo Especial previstas para o aluno

a) Equipamentos especiais de compensação – Máquina Braille; cubarítmo; relevos em substituição das imagens

c) Adaptações curriculares – Língua Portuguesa; Matemática; Ciências físico-Quimicas; Educação Física, E.V., E.T. (em anexo);

d) Condições especiais de matrícula;

f) Condições especiais de avaliação - Prolongamento de 30 minutos na realização dos testes e em situação individual, tipo de prova com menos questões e questões directas, diferenciação na cotação das questões;

g) Adequação na organização de classes e turmas – turma reduzida; posição numa carteira próxima do quadro;

h) Apoio pedagógico Acrescido - Língua Portuguesa, Matemática, Inglês e Braille.

4.4 Modalidades de avaliação e procedimentos

A avaliação terá como base as produções e participações da aluna no decurso do processo de ensino-aprendizagem. Incluirá a aferição dos pareceres de todos os participantes no mesmo, professoras, técnicos, médicos, encarregado de educação. Também assumirá um carácter mensal e/ou trimestral visando possíveis ajustamentos.

5. ASSINATURA DOS INTERVENIENTES NA ELABORAÇÃO DO PEI

O D G A E ____

DIRECTOR DE TURMA______________________________________

PROFESSORA DE APOIO EDUCATIVO _______________________________

OUTROS PROFESSORES ___________________________________

____

____

____

CONCORDO COM O PRESENTE PLANO EDUCATIVO INDIVIDUAL

ENCARREGADO DE EDUCAÇÃO _________________________________

DATA:_____/___________/ 20____

Anexo 2

APROVADO pelo O.D.A.G.E
CARGO: ___________________________
ASSINATURA: _____________________
DATA: _____/______/______

PLANO EDUCATIVO INDIVIDUAL

1.IDENTIFICAÇÃO

Nome do aluno: [redacted]
Data de Nascimento: [redacted] **7 º ano** **3 º ciclo** **Turma:** A
Morada: [redacted]
Telefone: [redacted]

1.2. INFORMAÇÃO FAMILIAR

Nome do Pai: [redacted] **Idade:** 46 **Profissão:** Electricista/Militar
Nome da Mãe: [redacted] **Idade:** 45 **Profissão:** Doméstica
Morada: [redacted]
Telefone: [redacted]
Observações:

1.1.1. Informação caso o aluno não viva com os pais

2. CARACTERIZAÇÃO DO ALUNO

(Dados de anamnese e alíneas b), c) e d) do nº1, do Dec.-Lei 319/91 de 23 de Agosto)

O [redacted] teve um desenvolvimento psicomotor normal, porém aos onze anos de idade sofreu um processo inflamatório inespecífico que durou uma semana cuja sequela foi a perda severa de visão em ambos os olhos, pelo que foi observado pela primeira vez no Instituto Oftalmológico Nacional de Angola.

Após esta situação a família veio para Portugal a fim de obter melhor acompanhamento médico e em foi observado na consulta de Oftalmologia Pediátrica do H. S. José, onde mantém acompanhamento, apresentando Amaurose ODE com Nistagmus, catarata e deslocamento de retina bilateral sem solução cirurgica, traduzindo-se em cegueira total incurável. Nesta data foi sujeito a uma intervenção cirúrgica, no Porto, sem quaisquer resultados.

Foi observado numa consulta de oftalmologia no Centro de Oftalmologia de Barcelona (BARRAQUER), que confirmou o diagnóstico e recomendou consultas periódicas do estado ocular.

2.1 OUTRAS INFORMAÇÕES

(Anexar documentos comprovativos)

2.2 INFORMAÇÃO PSICOLÓGICA

À entrada do aluno no [redacted], o relatório de observação psicológica do Dr. Cabral de Sá, indica que o [redacted] apresentava um nível de conhecimentos gerais fraco e capacidades de raciocínio lógico fraco mas revelando potencialidades de base médias.

2.3 NECESSIDADES EDUCATIVAS ESPECIAIS

As necessidades educativas do [redacted] prendem-se com o diagnóstico de cegueira total, as necessidades de adaptação a esta condição física, nomeadamente nas questões de orientação e mobilidade, de aprendizagem do Braille.

3. INFORMAÇÃO ESCOLAR

O [redacted] realizou a escolaridade regular até ao 6º ano em Angola, até ao momento que sofreu o processo inflamatório que conduziu à cegueira. Veio frequentar o [redacted], por indicação da ACAPO, para o 5º ano de escolaridade.

3.1. Aquisições das competências do (a) aluno(a), sob o ponto de vista educacional

O [redacted] não apresenta dificuldades nas áreas motoras, tem um raciocínio lógico satisfatório e o seu rendimento escolar revela um nível de dempenho médio. Ao nível das áreas verbais, tem uma fluência e compreensão verbal adequada à sua idade, porém na interpretação de algum vocabulário, na leitura e escrita em Braille existem algumas dificuldades, nomeadamente na escrita evidencia muitos erros ortográficos, com algumas lacunas nos aspectos gramaticais da língua e na construção frásica.

3.2 Medidas previamente estabelecidas e resultados obtidos

Nos dois anos lectivos anteriores, beneficiou de aulas de apoio pedagógico acrescido, em Matemática, Português, Inglês, Braille e Mobilidade.

4. OBJECTIVOS A ATINGIR E MEDIDAS A APLICAR

4.1 Objectivos gerais

- Desenvolver as competências gerais e transversais.

4.2 Objectivos específicos

- Adequar os conteúdos programáticos e as actividades decorrentes dos mesmos ao nível de desempenho do aluno, atendendo às necessidades educativas do mesmo.

4.3 Medidas do Regime Educativo Especial previstas para o aluno

a) Equipamentos especiais de compensação – Máquina Braille, Cubarítmo, Informática Braille;

b) Adaptações Materiais – Tem um armário para organizar o seu material;

c) Adaptações Curriculares – E.V.E.T.., E. Física (cumprindo os conteúdos definidos mas com adaptações materiais) e nas disciplinas de Língua Portuguesa, Francês, Inglês, Ciências físico-Quimicas; Matemática(em anexo);

d) Condições especiais de matrícula;

f) Condições especiais de avaliação - Prolongamento de 30 minutos na realização dos testes e em situação individual, tipo de prova com menos questões e questões directas;

g) Adequação na organização de classes ou turmas – turma reduzida;

h) Apoio pedagógico Acrescido - Língua Portuguesa, Matemática, Inglês, Braille, Informática Braille

4.4 Modalidades de avaliação e procedimentos

A avaliação terá como base as produções e participações do aluno no decurso do processo de ensino-aprendizagem. Incluirá a aferição dos pareceres de todos os participantes no mesmo, professoras, técnicos, médicos, encarregado de educação. Também assumirá um carácter mensal e/ou trimestral visando possíveis ajustamentos.

5. ASSINATURA DOS INTERVENIENTES NA ELABORAÇÃO DO PEI

O D G A E ____

DIRECTOR DE TURMA____

PROFESSORA DE APOIO EDUCATIVO

____

OUTROS PROFESSORES

____

____

____

____

____

CONCORDO COM O PRESENTE PLANO EDUCATIVO INDIVIDUAL

ENCARREGADO DE EDUCAÇÃO

____

DATA:_____/___________/ 20___

APROVADO pelo O.D.A.G.E

CARGO: ____________________________

ASSINATURA: ______________________

DATA: _____/______/______

Anexo 3

PLANO EDUCATIVO INDIVIDUAL

1.IDENTIFICAÇÃO

Nome do aluno: [redacted]
Data de Nascimento: [redacted] 7 º **ano** 3 º **ciclo** **Turma:** A
Morada: [redacted]
Telefone: [redacted]

1.3. INFORMAÇÃO FAMILIAR

Nome do Pai: [redacted] **Idade:** 45
Profissão:___________________
Nome da Mãe: [redacted] **Idade:** 43 **Profissão:** Emp. Limpeza
Morada: [redacted]
Telefone: [redacted]
Observações:

1.1.1. Informação caso o aluno não viva com os pais

O [redacted], vive com a mãe, o padrasto e dois primos.

2. CARACTERIZAÇÃO DO ALUNO

(Dados de anamnese e alíneas b), c) e d) do nº1, do Dec.-Lei 319/91 de 23 de Agosto)

De acordo com dados do Dispensário Médico, de 11/06/2003, o [redacted] é portador de Ptisis Bulbi no OD e no OE tem hipertensão ocular, Glaucoma da córnea e Catarata traumática, sem acuidade visual em ambos os olhos, apenas percepção luminosa no OE. É seguido no Instituto Gama Pinto desde os 12 anos de idade e pela Drª Alzira Pereira no Centro de Saúde Casal de Cambra/Queluz. Já foi sujeito a intervenções cirúrgicas devido ao traumatismo da córnea. (Vide relatórios no Processo Individual do Aluno)

2.1 OUTRAS INFORMAÇÕES

(Anexar documentos comprovativos)

Segundo registos do processo Individual do aluno realizou a escolaridade até ao 6º ano a negro, sem necessidade de equipamentos especiais de compensação. Durante o mês de Julho, teve acompanhamento específico do Núcleo de Apoio à Deficiência Visual, do DEB, para mais rapidamente de adaptar ao Braille como sistema de comunicação escrita. Foi neste serviço que recomendaram a integração do aluno no [redacted], com a indicação de frequência por regime de disciplinas.

2.2 INFORMAÇÃO PSICOLÓGICA

2.3 NECESSIDADES EDUCATIVAS ESPECIAIS

As necessidades educativas do [redacted] estão associadas à deficiência visual de que é portador, utilizando o Braille como sistema de comunicação escrita. As maiores dificuldades detectadas ao longo da escolaridade associam-se ao desenvolvimento motor (coordenação manual), autonomia (evidenciando lentidão na realização de actividades e necessidade de apoio individualizado por parte dos professores).

3. INFORMAÇÃO ESCOLAR

O [redacted] iniciou a escolaridade obrigatória na E.B.1 N.º 2 de Casal de Cambra, seguindo no 5º ano para a E.B. 2/3 Prof. Agostinho da Silva e ingressado no [redacted] no presente ano lectivo.

3.1. Aquisições das competências do (a) aluno(a), sob o ponto de vista educacional

O [redacted] revela dificuldades na compreensão e aplicação de conhecimentos a novas situações de aprendizagem, exigindo apoio individualizado para conseguir desenvolver as competências definidas para o ano de escolaridade e apresentar um nível de desempenho satisfatório. Nas áreas perceptivas, em especial na percepção táctil necessita de continuar o trabalho realizado por forma a aumentar a percepção da simbologia Braille. Nas áreas verbais, o [redacted] tem um bom desenvolvimento, tem uma fluência e compreensão verbal adequadas, porém na leitura evidencia dificuldades na descodificação e associação dos caracteres, sendo esta com velocidade lenta, o que não beneficia a compreensão e interpretação de textos. Na escrita tem maior à vontade, mas com muitos erros ortográficos e má apresentação gráfica dos trabalhos, necessitando de investir mais na construção de texto e nas noções gramaticais.

3.2 Medidas previamente estabelecidas e resultados obtidos

No ano lectivo transacto o aluno realizou a frequência do 7º ano apenas de algumas disciplinas: Língua Portuguesa, Inglês, História, Físico-Quimica e Área de Projecto. Ficou retido. Beneficiou de equipamentos especiais de compensação (utilização máquina Braille) e Apoio Pedagógico Acrescido a Língua Portuguesa, Inglês, Braille e Orientação e Mobilidade.

4. OBJECTIVOS A ATINGIR E MEDIDAS A APLICAR

4.1 Objectivos gerais

- Integração sócio-afectiva;
- Desenvolvimento da autonomia social e pessoal;
- Desenvolvimento das competências transversais, gerais e essenciais definidas;

4.2 Objectivos específicos

- Desenvolver as aprendizagens das várias disciplinas;
- Adequar os conteúdos programáticos e as actividades decorrentes dos mesmos ao nível de desempenho do aluno, atendendo às necessidades educativas do mesmo;

4.3 Medidas do Regime Educativo Especial previstas para o aluno

a) Equipamentos especiais de compensação - Máquina Braille, Cubarítmo, substituição de imagens por descrições e relevos, gravador;

b) Adaptações Materiais – O aluno tem um armário para guardar e organizar os seus materiais;

c) Adaptações Curriculares – E.V., E.T., E.Física, Língua Portuguesa; Matemática, Inglês, Francês e C. Física- Química; Ciências-Naturais

d) Condições especiais de matrícula

f) Condições especiais de avaliação - Prolongamento de 30 minutos na realização dos testes e em situação individual, tipo de prova com menos questões e questões directas;

g) Adequação na organização de classes ou turmas – turma reduzida;

h) Apoio pedagógico Acrescido – Língua Portuguesa, Matemática, Inglês, Braille, Informática Braille e Orientação e Mobilidade.

4.4 Modalidades de avaliação e procedimentos

A avaliação terá como base as produções e participações do aluno no decurso do processo de ensino-aprendizagem. Incluirá a aferição dos pareceres de todos os participantes no mesmo, professoras, técnicos, médicos, encarregado de educação. Também assumirá um carácter mensal e/ou trimestral visando possíveis ajustamentos.

5. ASSINATURA DOS INTERVENIENTES NA ELABORAÇÃO DO PEI

O D G A E ____

DIRECTOR DE TURMA______________________________________

PROFESSORA DE APOIO EDUCATIVO

____

OUTROS PROFESSORES

____

____

____

____

____

ENCARREGADO DE EDUCAÇÃO

____

DATA:_____/_____________/ 20___